MAT 2453 - Cálculo I - POLI - 2003
2^a Lista de Exercícios

1. Calcule a derivada indicada em cada caso:

   a) y'' se $y = \dfrac{x}{1-x}$; b) y'' se $y = x^2 - \dfrac{1}{x^2}$; c) $\dfrac{d^2}{dx^2}\left(\dfrac{1-x}{1+x}\right)$;

   d) $\dfrac{d^2}{dx^2}\left(x^3 + \dfrac{1}{x^3}\right)$; e) $\dfrac{d^{500}}{dx^{500}}(x^{131} - 3x^{79} + 4)$.

2. Calcule $\dfrac{dy}{dx}$ por derivação implícita:

   a) $x = y - y^7$; b) $x^4y^3 - 3xy = 60$.

3. Determine a equação da reta tangente à curva dada, no ponto dado:

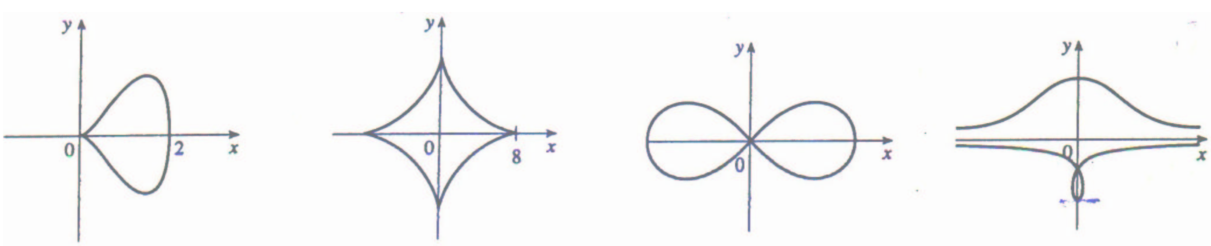
   a) $y^2 = x^3(2-x)$ (1,1) (piriforme)

   b) $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = 4$ $(-3\sqrt{3}, 1)$ (astróide)

   c) $2(x^2+y^2)^2 = 25(x^2-y^2)$ (3,1) (lemniscata)

   d) $x^2y^2 = (y+1)^2(4-y^2)$ (0,-2) (concóide de Nicomedes)

   Os gráficos das equações acima são respectivamente:



   Resp.: a) $x = y$; b) $y - 1 = \dfrac{1}{\sqrt{3}}(x + 3\sqrt{3})$; c) $9x + 13y = 40$; d) $y = -2$.

4. Calcule os seguintes limites:

   (a) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^x$ (Resp.: $\dfrac{1}{e^2}$)

   (b) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2+3}{x^2+1}\right)^{x^2}$ (Resp.: e^2)

   (c) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+c}{x-c}\right)^x$, $c \neq 0$ (Resp.: e^{2c})

   (d) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\left[\ln(x+3)^{x+4} - \ln(x+2)^{x+4}\right]$ (Resp.: 1)

5. Seja $y = f(x)$ dada por $f(x) = x^3 + \ln x$, $x > 0$ e $x = g(y)$ sua função inversa.
   (a) Calcule $g'(y)$ em termos de $g(y)$.
   (b) Calcule $g'(1)$. (Resp.: (b) 1/4)

6. Sejam $f(x) = e^x + \ln x$ e $h(x) = f^{-1}(x)$. Ache $h'(e)$. (Resp.: $\frac{1}{1+e}$)

7. Calcule a derivada de cada uma das funções abaixo:

   (a) $\cosh x = \dfrac{1}{2}(e^x + e^{-x})$

   (b) $senh\, x = \dfrac{1}{2}(e^x - e^{-x})$

   (c) $f(x) = e^{(e^x)}$

   (d) $f(x) = x^e + e^x$

   (e) $f(x) = e^{\frac{1}{x^2}} + \dfrac{1}{e^{(x^2)}}$

   (f) $f(x) = \ln(e^x + 1)$

   (g) $f(x) = (\ln x)^2$

   (h) $f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2+1})$

   (i) $f(x) = \ln(\ln x)$

   (j) $f(x) = \ln\sqrt{\dfrac{x+1}{x-1}}$

   (k) $f(x) = x^\pi + \pi^x$

   (l) $f(x) = x^{(x^x)}$

   (m) $f(x) = 2^{(x^2)} + 3^{2x}$

   (n) $f(x) = (1 + e^x)^{(x^2)}$

   (o) $f(x) = (2x+1)^x$

   (p) $f(x) = x\text{arctg } x$

   (q) $f(x) = \text{arcsen } (x^3)$

   (r) $f(x) = \text{arcsen } (e^x)$

   (s) $f(x) = x^2 e^{\text{arctgx}}$

   (t) $f(x) = \dfrac{\text{tg } (3x)}{\text{arctg } (3x)}$

   (u) $f(x) = \ln(\text{arctg } x)$

   (v) $f(x) = (1 + \cos^2 x)^{sen\, x}$

8. Usando princípios da física pode ser mostrado que, quando um cabo é pendurado entre dois postes, toma a forma de uma curva $y = f(x)$, que satisfaz a equação diferencial $\dfrac{d^2y}{dx^2} = \dfrac{pg}{T}\sqrt{1 + \left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2}$, onde p é a densidade linear do cabo, g é a aceleração da gravidade e T é a tensão no cabo no ponto mais baixo e o sistema de coordenada é apropriadamente escolhido. Verifique que a função $y = f(x) = \dfrac{T}{pg}\cosh\left(\dfrac{pgx}{T}\right)$ é a solução dessa equação diferencial, onde $\cosh t = (e^t + e^{-t})/2$.

9. Use o TVM para provar as seguintes desigualdade:

   a) $|\text{sen } b - \text{sen } a| \;\leq\; |b-a|, \quad \forall a, b \in \mathbb{R}.$

   b) $|\sqrt{a} - \sqrt{b}| \leq \dfrac{1}{2}|a-b|, \quad \forall a, b \in \mathbb{R}$, com $a \geq 1$ e $b \geq 1$.

   c) $\left|\ln \dfrac{a}{b}\right| \leq |a-b|, \quad \forall a, b \in \mathbb{R}$, com $a \geq 1$ e $b \geq 1$.

   d) $b^b - a^a > a^a(b-a), \quad \forall a, b \in \mathbb{R}$ com $1 \leq a < b$.

10. Dois corredores iniciam uma corrida ao mesmo tempo e terminam empatados. Prove que em algum momento durante a corrida eles têm a mesma velocidade.

11. Esboce o gráfico de:

    (a) $f(x) = x^3 + 3x^2 + 4$

    (b) $f(x) = x^4 + 2x^3 + 1$

    (c) $f(x) = x^4 - 2x^3$

    (d) $f(x) = \dfrac{2x^2}{x^2 - 1}$

    (f) $f(x) = x - \dfrac{1}{x}$

    (g) $f(x) = \dfrac{9}{x^2 + 9}$

    (h) $f(x) = 2\cos x + \text{sen } 2x \qquad 0 \leq x \leq 2\pi$

    (i) $f(x) = \dfrac{x}{2} - \text{sen } x \qquad 0 \leq x \leq 3\pi$

    j) $f(x) = \sqrt{3 + |x-4|}$

12. Esboce as curvas de equações:

    (a) $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}, \quad a > 0$

    (b) $y^2 = x^3 + x^2$

13. Seja f uma função definida em um intervalo $(a, +\infty)$, $a \in \mathbb{R}$. Dizemos que a reta $y = mx+n$ é uma <u>assíntota</u> no infinito para f se $\lim\limits_{x \to +\infty} [f(x) - (mx+n)] = 0$

    (a) Prove que a reta $y = mx + n$ é uma assíntota para f se, e somente se,

    $$m = \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} \quad \text{e} \quad n = \lim_{x \to +\infty} [f(x) - mx].$$

    Observação: O que foi feito para $x \to +\infty$ vale também para $x \to -\infty$, com as necessárias adaptações.

    (b) Determine as assíntotas e esboce o gráfico de:

    (i) $f(x) = \dfrac{x^3}{x^2+1}$

    (ii) $f(x) = \sqrt{4x^2 + x + 1}$

(iii) $f(x) = \sqrt[3]{x^3 - x^2}$ (iv) $f(x) = \dfrac{x^2}{x+1}$

(v) $f(x) = \dfrac{x^3 - x + 1}{x^2}$ (vi) $f(x) = \sqrt[3]{x(x-1)^2}$

14. Mostre que a equação $3x - 2 + \cos\left(\dfrac{\pi x}{2}\right) = 0$ tem exatamente uma raiz real.

15. Mostre que $\sqrt{1+x} < 1 + \dfrac{1}{2}x$ se $x > 0$.

16. Mostre que a equação $x^3 - 6x + c = 0$ tem no máximo uma raiz no intervalo [-1,1].

17. Prove as seguintes desigualdades:

    (a) $2\sqrt{x} > 3 - \dfrac{1}{x}, \quad \forall x > 1$

    (b) $e^\pi > \pi^e$

    (c) $\dfrac{tg\ b}{tg\ a} > \dfrac{b}{a}$ sempre que $0 < a < b < \dfrac{\pi}{2}$

    (d) $x - \dfrac{x^3}{3!} <$ sen $x < x - \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!}, \quad \forall x > 0$

    (e) $x^2 + 3 \geq 4\sqrt{x} \quad \forall x \geq 0$. (note que a igualdade vale apenas para $x = 1$)

18. Para que pontos da circunferência $x^2 + y^2 = 25$ a soma das distâncias a (2,0) e (-2,0) é mínima?

    Resp.: (5,0) e (-5,0)

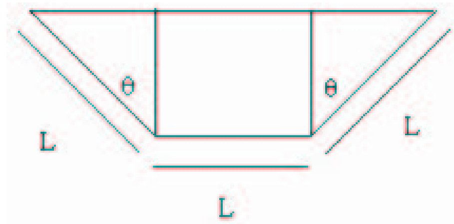
19. Achar os pontos da hipérbole $x^2 - y^2 = 1$ mais próximos de (0,1).

    Resp.: $\left(\pm\dfrac{\sqrt{5}}{2}\ ,\ \dfrac{1}{2}\right)$

20. Um muro de 2 metros de altura está a 1 metro de distância da parede lateral de um prédio. Qual o comprimento da menor escada cujas extremidades se apoiam uma na parede, e outra no chão do lado de fora do muro?

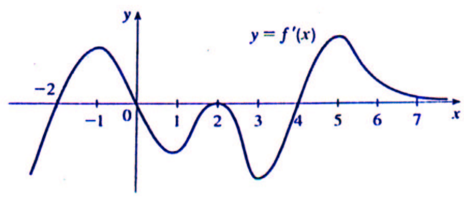
    Resp.: $\left(1 + \sqrt[3]{4}\right)^{3/2}$.

21. Um reservatório tem fundo horizontal e seção transversal como se mostra na figura. Achar a inclinação dos lados com a vertital de modo a obter a máxima capacidade.



Resp.: $\theta = \dfrac{\pi}{6}$

22. Considere o gráfico da derivada f' de uma função f. (Veja a figura abaixo)



(a) Em que intervalos f é crescente ou decrescente?

(b) Para quais valores de x f tem um máximo ou mínimo local?

(c) Em que intervalos f é côncava para cima ou para baixo?

(d) Ache os pontos de inflexão de f.

(e) Assumindo que f seja contínua e que $f(0) = 0$, esboce o gráfico de f.

23. Seja f derivável em $\mathbb{R}$ e seja g dada por $g(x) = \dfrac{f(x)}{x}$, $x \neq 0$. Suponha que p é ponto de máximo local de g.

a) Prove que $pf'(p) - f(p) = 0$.

b) Prove que a reta tangente ao gráfico de f no ponto de abscissa p passa pela origem.

24. Determine a constante a tal que $f(x) = x^2 + \frac{a}{x}$ tenha:

(a) Um mínimo local em $x = 2$.

(b) Um mínimo local em $x = -3$.

(c) Mostre que f não terá máximo local para nenhum valor de a.

Resp.: (a) 16 (b) -54

25. Determine c para que a função dada tenha uma única raiz real.

a) $f(x) = x^3 + 3x^2 - 9x + c$.

b) $f(x) = x^3 - x + a$.

26. Achar, caso existam, os valores máximo e mínimo de:

   a) $f(x) = \text{sen}x - \cos x,\ x \in [0, \pi]$.

   b) $f(x) = \sqrt{3 + 2x - x^3},\ -\dfrac{1}{2} \leq x \leq 1$.

   c) $f(x) = \dfrac{1}{x} + \ln x,\ \dfrac{1}{2} \leq x \leq 4$.

27. Seja $f : I\!\!R \to I\!\!R$ uma função derivável até segunda ordem e seja $a \in I\!\!R$ fixado. Verifique se as afirmações são verdadeiras ou falsas. Justifique:

   (a) Se $f'(x) > 0$, para todo $x > a$, então $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

   (b) Se $f'(x) > 0$ e $f''(x) > 0$, para todo $x > a$, então $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

28. Calcule os limites:

   (a) $\lim\limits_{x \to \frac{1}{2}^-} \dfrac{\ln(1 - 2x)}{\text{tg } \pi x}$ Resp. 0

   (b) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x^{100}}{\sqrt[5]{x}}$ Resp. 0

   (c) $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{\ln x}{\text{cotg } x}$ Resp. 0

   (d) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{e^{2x}}$ Resp. 0

   (e) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{xe^x}{e^{x^2}}$ Resp. 0

   (f) $\lim\limits_{x \to 0^+} x^p \ln x,\ p > 0$ Resp. 0

   (g) $\lim\limits_{x \to +\infty} x \text{ sen } \left(\dfrac{p}{x}\right)$ Resp. p

   (h) $\lim\limits_{x \to 0} \left(\dfrac{1}{1 - \cos x} - \dfrac{2}{x^2}\right)$ Resp. 1/6

   (i) $\lim\limits_{x \to 0} \left[\dfrac{1}{\ln(1 + x)} - \dfrac{1}{e^x - 1}\right]$ Resp. 1

   (j) $\lim\limits_{x \to 0^+} (x \text{ sen } x)^{tg\, x}$ Resp. 1

   (k) $\lim\limits_{x \to 0} (e^x + 3x)^{1/x}$ Resp. e^4

   (l) $\lim\limits_{x \to 0^+} x^{\text{tg}(x^2)}$ Resp. 1

   (m) $\lim\limits_{x \to 0^+} \left[\dfrac{1}{x} + \ln x\right]$ Resp. $+\infty$

   (n) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\text{arctg}(2x^2)}{\ln(1 + 3x^2)}$ Resp. 2/3

   (o) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln(1 + x^2)}{x \text{ arctg } x}$ Resp. 1

   (p) $\lim\limits_{x \to 0} (1 + \text{sen}2x)^{\frac{1}{sen\, x}}$ Resp. e^2

   (q) $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}^+} (\text{tg } x \sec x - \sec^2 x)$ Resp. $\dfrac{-1}{2}$

29. Esboce o gráfico de:

(a) $f(x) = x^x$

(b) $f(x) = \begin{cases} xe^{1/x^2} & \text{se} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{se} \quad x = 0 \end{cases}$

(c) $f(x) = \dfrac{e^x}{x}$

(d) $f(x) = x^2 \ln x$

(e) $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$

(f) $f(x) = e^x - e^{3x}$

(g) $f(x) = x^{1/x}$

h) $f(x) = x - 3\ln x - \dfrac{2}{x}$

30. (a) Esboce o gráfico de $f(x) = x^2 e^{-x}$.

    (b) Determine, em função de k, o número de soluções da equação $ke^x = x^2$.

31. (a) Ache o mínimo de $f(x) = \dfrac{e^x}{x}$ no intervalo $(0, +\infty)$. Resp. $x = 1$.

    (b) Prove que $\dfrac{e^{a+b}}{ab} \geq e^2, \quad \forall a, b \in I\!R_+^*$.

32. Seja $f(x) = \dfrac{c}{1 + ae^{-bx}}$ com $a > 0$, $abc \neq 0$.

    (a) Mostre que f é crescente no intervalo $(-\infty, \infty)$ se $abc > 0$ e decrescente se $abc < 0$.

    (b) Mostre que o ponto de inflexão de f ocorre em $x = \dfrac{\ln a}{b}$.

    (c) Esboce o gráfico de f para a $b > 0$ e $b < 0$.

33. Para que números positivos a a curva $y = a^x$ corta a reta $y = x$?

    Resp.: $a \leq e^{1/e}$.

34. Uma folha de papel retangular de 8,5 × 11 pol é colocada em uma superfície plana. Um dos vértices é colocado no lado maior oposto, como mostra a figura, e deixado lá enquanto se dobra e se marca a folha. O problema é tornar o comprimento do vinco o menor. Chamamos esse comprimento de L. Experimente fazer isso com papel.

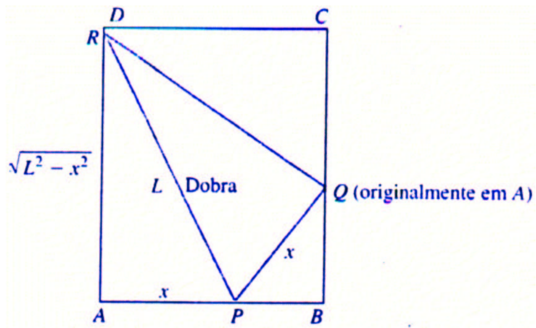
    a) Demonstre que $L^2 = 2x^3/(2x - 8,5)$.

    b) Que valor de x minimiza L^2?

    Resp.: $\frac{51}{8}$.

    c) Qual é o valor mínimo de L?

    Resp.: $\frac{51\sqrt{3}}{8}$.



35. Um triângulo isóceles está circunscrito a um círculo de raio R. Se x é a altura do triângulo, mostre que sua área é mínima quando $x = 3R$.

36. Qual é o menor valor da constante a para o qual a desigualdade $ax + \frac{1}{x} \geq 2\sqrt{2}$ seja válida para todo número positivo x?

    Resp.: $a = 2$

37. Uma pirâmide tem base quadrada e quatro faces triangulares com igual inclinação. Se a área total da base e das faces é dada, mostre que o volume é máximo quando a altura é $\sqrt{2}$ vezes a aresta da base.

38. Um cilindro é gerado girando-se um retângulo ao redor do eixo x, onde a base do retângulo está apoiada. Seus vértices superiores estão sobre a curva $y = \dfrac{x}{x^2+1}$. Qual é o maior volume que tal cilindro pode ter?

    Resp.: $\frac{\pi}{4}$

39. Um arame de comprimento L deve ser cortado em 2 pedaços, um para formar um quadrado e outro um triângulo equilátero. Como se deve cortar o arame para que a soma das áreas cercadas pelos 2 pedaços seja (a) máxima? (b) mínima? Mostre que no caso (b) o lado do quadrado é 2/3 da altura do triângulo.

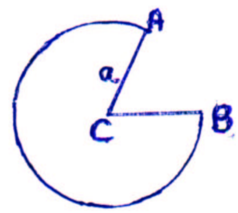
    Resp.: (a) Deve-se formar apenas um quadrado.

    (b) o lado do quadrado é $\dfrac{\sqrt{3}L}{9+4\sqrt{3}}$.

40. Um corredor de largura a forma um ângulo reto com um segundo corredor de largura b. Uma barra longa, fina e pesada deve ser empurrada do piso do primeiro corredor para o segundo. Qual o comprimento da maior barra que pode passar a esquina?

    Resp.: $(a^{2/3} + b^{2/3})^{3/2}$

41. Um papel de filtro circular de raio a deve ser transformado em um filtro cônico cortando um setor circular e juntando as arestas CA e CB. Ache a razão entre o raio e a profundidade do filtro de capacidade máxima.



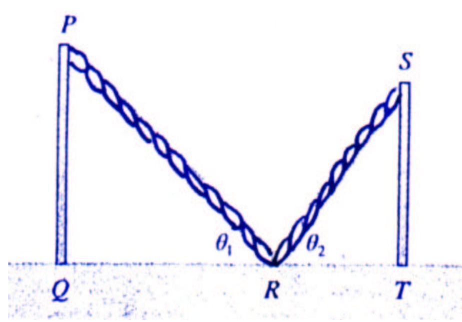
Resp.: $\sqrt{2}$

42. (a) Latas cilíndricas fechadas devem ser feitas com um volume V especificado. Qual é a razão entre a altura e o diâmetro da base que minimiza a quantidade de metal gasto para fazer a lata?

    (b) Por que as latas encontradas no mercado não são em geral como em (a)? Em geral o metal vem em uma chapa retangular. Não há desperdício envolvido em cortar a chapa que formará a superfície lateral, mas as tampas devem ser cortadas de uma peça quadrada, e as sobras, são desprezadas (ou então recicladas). Ache a razão entre a altura e o diâmetro de uma lata de volume V que minimiza o custo do material utilizado.

    Resp.: (a) 1 (b) $4/\pi$

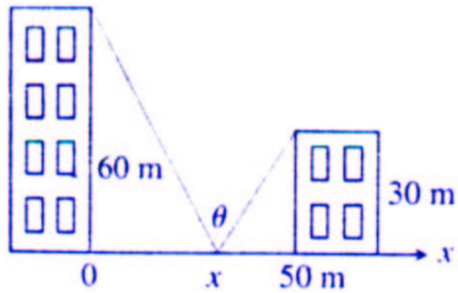
43. Uma corda PRS está presa em dois postes verticais PQ e ST, indo do topo de PQ a um ponto R no solo entre os postes e depois ao topo de ST, como mostra a figura. Prove que o menor comprimento de tal corda ocorre quando $\theta_1 = \theta_2$.



44. Você foi contratado para construir um painel solar no nível do solo no eixo leste-oeste entre dois prédios, conforme a figura a seguir. A que distância do prédio mais alto você deve colocar o painel para maximizar o número de horas que o painel ficará exposto à luz quando o sol passar perpendicularmente sobre o painel? Comece pela seguinte observação:

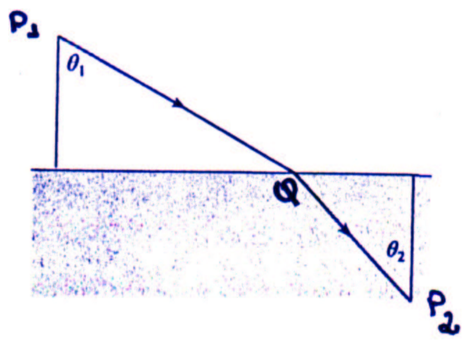
$$\theta = \pi - \text{arc cotg}\,\frac{x}{60} - \text{arc cotg}\,\frac{50-x}{30}.$$

    Determine, então, o valor de x que maximiza θ.



45. Um canhão, situado no solo, é posto sob um ângulo de inclinação θ. Seja r o alcance do canhão, isto é, a distânca entre o canhão e o ponto de impacto da bola. Então r é dado por $f = \dfrac{2v^2}{g}\text{sen }\theta \cos\theta$, onde v e g são contantes. Para que ângulo o alcance é máximo?
    Resp.: $\theta = \frac{\pi}{4}$

46. Suponhamos que a velocidade da luz seja v_1 no ar e v_2 na água. Um raio de luz, partindo de um ponto P_1, acima da superfície da água, e chegando a um ponto P_2 abaixo da superfície, percorrerá o caminho que exigir o menor tempo. Mostrar que o raio cruzará a superfície no ponto Q do plano vertical que passa por P_1 e P_2 situado de modo que $\dfrac{\text{sen }\theta_1}{v_1} = \dfrac{\text{sen }\theta_2}{v_2}$, onde θ_1 e θ_2 são os ângulos indicados na figura.



(Admita que o raio de luz estará sempre no plano vertical passando por P_1 e por P_2, ortogonal à superfície da água.)