$3^{\underline{a}}$ Lista de Cálculo I - POLI - 2003

I - Integrais Indefinidas

Calcule as integrais indefinidas abaixo. Para a verificação das resposta lembre-se que $\int f(x)dx = F(x) + k,\ k \in I\!R \ \Rightarrow\ F'(x) = f(x), \forall x \in D_f$.

1. $\int \frac{x^7 + x^2 + 1}{x^2}\, dx$
2. $\int e^{2x}\, dx$
3. $\int \cos 7x\ dx$
4. $\int tg^2\, x\ dx$
5. $\int \frac{7}{x-2}\, dx$
6. $\int tg^3 x \sec^2 x\ dx$
7. $\int \frac{\mathrm{sen}^3 x}{\sqrt{\cos x}}\, dx$
8. $\int tg\, x\ dx$
9. $\int tg^3 x\ dx$
10. $\int \frac{x}{1+x^2}\, dx$
11. $\int \frac{x}{1+x^4}\, dx$
12. $\int \frac{x^2}{1+x^2}\, dx$
13. $\int x\sqrt{1-x^2}\, dx$
14. $\int secx\ dx$
15. $\int \frac{1}{x\sqrt{1+\ln x}}\, dx$
16. $\int x^2 \sqrt[5]{x^3+1}\, dx$
17. $\int \frac{4x+8}{2x^2+8x+20}\, dx$
18. $\int \frac{\sqrt{\ln x}}{x}\, dx$
19. $\int \frac{dx}{(arc\mathrm{sen}x)\ \sqrt{1-x^2}}$
20. $\int \frac{e^x}{1+e^x}\, dx$
21. $\int \frac{\mathrm{sen}2x}{1+\cos^2 x}\, dx$
22. $\int e^{x^3} x^2\, dx$
23. $\int e^x \sqrt[3]{1+e^x}\, dx$
24. $\int \frac{\mathrm{sen}\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\, dx$
25. $\int \frac{e^{arctg\, x}}{1+x^2}\, dx$
26. $\int 2x(x+1)^{2003}\, dx$
27. $\int x\, \mathrm{sen}x\ dx$
28. $\int e^x \cos x\ dx$
29. $\int x^r\ \ln x\ dx, r \in I\!R$
30. $\int (\ln x)^2\ dx$
31. $\int xe^{-x}\, dx$
32. $\int x arctg\, x\ dx$
33. $\int arc\mathrm{sen}x\ dx$
34. $\int \sec^3 x\ dx$
35. $\int \cos^2 x\, dx$
36. $\int \mathrm{sen}^2 x \cos^3 x\ dx$
37. $\int \mathrm{sen}^2 x \cos^2 x\ dx$
38. $\int \frac{1-\mathrm{sen}x}{\cos x}\, dx$
39. $\int \frac{3x^2+4x+5}{(x-1)(x-2)(x-3)}\, dx$
40. $\int \frac{1}{2x^2+8x+20}\, dx$
41. $\int \frac{3x^2+4x+5}{(x-1)^2(x-2)}\, dx$
42. $\int \frac{x^5+x+1}{x^3-8}\, dx$
43. $\int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}\, dx$
44. $\int x^2\sqrt{1-x^2}\, dx$
45. $\int e^{\sqrt{x}}\, dx$

46. $\int \ln(x+\sqrt{1+x^2})\,dx$

47. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{5-2x+x^2}}$

48. $\int \sqrt{x}\,\ln x\; dx$

49. $\int \operatorname{sen}(\ln x)\,dx$

50. $\int \dfrac{x}{x^2-4}\,dx$

51. $\int \dfrac{3x^2+5x+4}{x^3+x^2+x-3}\,dx$

52. $\int \sqrt{a^2+b^2x^2}\,dx$

53. $\int \dfrac{1}{\sqrt{a^2+b^2x^2}}\,dx$

54. $\int \sqrt{x^2-2x+2}\,dx$

55. $\int \sqrt{3-2x-x^2}\,dx$

56. $\int \dfrac{1}{(1+x^2)\sqrt{1-x^2}}\,dx$

57. $\int \cos^3 x\,dx$

58. $\int \operatorname{sen}^5 x\; dx$

59. $\int \dfrac{\cos^5 x}{\operatorname{sen}^3 x}\,dx$

60. $\int \operatorname{sen}^3\left(\frac{x}{2}\right)\cos^5\left(\frac{x}{2}\right)\,dx$

61. $\int \dfrac{1}{\operatorname{sen}^5 x\cos^3 x}\,dx$

62. $\int \operatorname{sen}^4 x\; dx$

63. $\int \operatorname{sen}^2 x\cos^5 x\,dx$

64. $\int \operatorname{sen}^2 x\cos^4 x\; dx$

65. $\int \cos^6(3x)\,dx$

66. $\int \dfrac{\cos^2 x}{\operatorname{sen}^6 x}\,dx$

67. $\int \dfrac{1}{\operatorname{sen}^2 x\cos^4 x}\,dx$

68. $\displaystyle\int \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}dx$

69. $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x}-\sqrt[3]{x}}dx$
(Dica: Faça $u=\sqrt[6]{x}$)

70. $\displaystyle\int \frac{x+1}{x^2(x^2+4)^2}dx$

71. $\displaystyle\int \frac{arctg\ x}{x^2}dx$

II - Aplicações da Integral Definida

1. Calcule a área da região compreendida entre os gráficos de $f(x)=x^3-2x+1$ e $g(x)=-x+1$, com $-1\le x\le 1$. (Resp.: $\frac{1}{2}$)

2. Desenhe a região $A=B\cap C\cap D$ e calcule a área de A, onde

   $B=\{(x,y)\in I\!R^2 : y\ge x^2-4\}$, $C=\{(x,y)\in I\!R^2 : y\le 12-3x^2\}$ e

   $D=\{(x,y)\in I\!R^2 : y\le 3x^2+12x+12\}$ (Resp.: 104/3)

3. Desenhe a região $A=\{(x,y)\in I\!R^2 : y\ge x^2-1,\ y\le x+1 \text{ e } y\ge -x^2-3x-2\}$ e calcule a sua área. (Resp.: 107/24)

4. Sejam $f:[-1,3]\to I\!R$ contínua com $f(x)\le 0$, para todo $x\in[-1,3]$,

   $A=\{(x,y)\in I\!R^2 : -1\le x\le 3 \text{ e } y\ge f(x)\}$ e $B=\{(x,y)\in I\!R^2 : -1\le x\le 3$ e $y\le x^2+3\}$, tais que a área de $A\cap B$ seja igual a 23. Calcule $\int_{-1}^{3} f(x)dx$. (Resp.: -5/3)

5. Determine $m > 0$ para que a área delimitada por $y = x^2,\ y = x^2\,/\,2$ e a reta $y = mx$ seja igual a 4. (Resp.: $m = 2$)

6. Desenhe a região do plano delimitada pela curva $y = x^3 - x$ e por sua reta tangente no ponto de abscissa $x = -1$. Calcule a área desta região. (Resp.: 27/4)

7. Encontre a área da região limitada entre as curvas $x = y^3 - y$ e $x = 1 - y^4$. (Resp.: 8/5)

8. Calcule $\int_0^1 (x + \sqrt{1 - x^2})dx$, interpretando-a como uma área. (Resp.: $\pi/4 + 1/2$)

9. Calcule $\int_{-1}^1 x^3 \text{sen}(x^2 + 1)dx$. (Resp.: 0)

10. Encontre o volume de uma pirâmide cuja base é o quadrado de lado L e cuja altura é h.

11. Considere o sólido cuja base é o astróide de equação $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$ e tal que as seções transversais por planos paralelos ao plano Oxz são quadrados. Calcule seu volume. (Resp.: $\frac{128}{105}a^3$)

12. Calcule $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{\pi}{n}\left(\text{sen}\frac{\pi}{n} + \text{sen}\frac{2\pi}{n} + ... + \text{sen}\frac{(n-1)\pi}{n}\right)$. (Resp.: 2)

13. Se uma **força constante** de magnitude F for aplicada na direção do movimento de um objeto e se esse objeto mover-se uma distância d, definimos o **trabalho** W realizado pela força sobre o objeto como sendo $W = F.d$, se a força agir no sentido do movimento e $-F.d$, se agir no sentido oposto. Suponha agora que um objeto move-se na direção positiva ao longo do eixo x, sujeito a uma **força variável** $F(x)$. Defina o trabalho W realizado pela força sobre o objeto quando este se move de $x = a$ até $x = b$ e encontre uma fórmula para calculá-lo.

14. *Energia cinética.* Use as notações do exercício anterior, a segunda lei de Newton e a regra da cadeia
$$\frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dx}\frac{dx}{dt} = v\frac{dv}{dx}$$

para mostrar que o trabalho realizado por uma força F atuando sobre uma partícula de massa m que se moveu de x_1 até x_2 é

$$W = \int_{x_1}^{x_2} F(x)dx = \frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2,$$

onde v_1 e v_2 são as velocidades do corpo em x_1 e x_2. Em Física, a expressão $(1/2)mv^2$ é chamada de **energia cinética** de um corpo em movimento com velocidade v. Portanto, o trabalho realizado por uma força é igual à variação da energia cinética do corpo e podemos determinar o trabalho calculando esta variação.

15. Calcule o comprimento do gráfico de $f(x) = \ln(\cos x)$, para $0 \leq x \leq \pi/4$. (Resp.: $ln((1+\sqrt{2}))$)

16. Calcule o comprimento da astróide cuja equação é $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$. (Resp.: $6a$)

17. Calcule a área da região interna ao laço formado pela curva $y^2 = x^2(x+3)$. (Resp.: $\frac{24}{5}\sqrt{3}$)

18. Calcule o volume do sólido obtido pela rotação em torno do eixo Ox do conjunto

    a) $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq xy \leq 2,\ x^2+y^2 \leq 5 \text{ e } x > 0\}$
    (Resp.: $\pi \left[\int_0^1 (5-x^2)dx + \int_1^2 \dfrac{4}{x^2}dx + \int_2^{\sqrt{5}} (5-x^2)dx\right] = ...$)

    b) $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq \sqrt{x} \text{ e } (x-1)^2 + y^2 \leq 1\}$ (Resp.: $\dfrac{\pi}{6}$)

    c) $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 2 \text{ e } e^{-x} \leq y \leq e^x\}$ (Resp.: $\dfrac{\pi}{2}(e^2 - e^{-2})^2$)

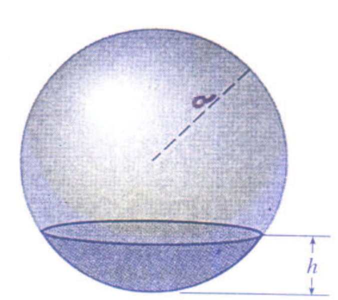
19. Sejam S_1 o sólido limitado pela esfera de centro na origem e raio 2 e S_2 o sólido obtido pela rotação de $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 9 \text{ e } |y| \leq \sqrt{x}\}$ em torno do eixo Ox. Determine o volume do sólido $S = S_1 \cap S_2$.
    (Resp.: $V(S_1 \cap S_2) = \pi \left[\int_0^{x_0} x dx + \int_{x_0}^2 (4-x^2)dx\right] = ...$ onde $x_0 = \dfrac{-1+\sqrt{17}}{2}$)

20. Seja $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + (y-2)^2 \leq 1\}$. Calcule o volume do sólido obtido pela rotação de A em torno do eixo Ox. (Resp.: $4\pi^2$)

21. Seja $A = \{(x,y) \in I\!R^2 : 0 \le x \le 1 \text{ e } \ln(x+1) + 2 \le y \le e^x + 4\}$. Determine o volume do sólido obtido pela rotação de A em torno da reta $y = 2$. (Resp.: $\pi \left[\int_0^1 (e^x + 2)^2 dx - \int_0^1 \ln^2(x+1) dx \right] = ...$)

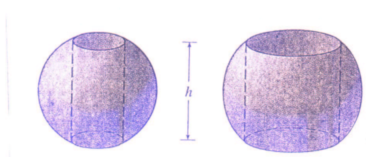
22. O disco $x^2 + y^2 \le a^2$ é girado em torno da reta $x = b$ $(b > a)$ para gerar um sólido, com a forma de um pneu. Esse sólido é chamado **toro**. Calcule seu volume. (Sugestão: Note que $\int_{-a}^{a} \sqrt{a^2 - y^2} dy = \frac{\pi a^2}{2}$.) (Resp.: $(2\pi b)(\pi a^2)$)

23. Calcule o volume de uma calota esférica de altura h, $(h \le a)$ de uma esfera de raio a. (Resp.: $\pi \left(a - \frac{h}{3} \right) h^2$)



24. Determine o comprimento da curva $y = \cosh x$, $-3 \le x \le 4$. (Resp.: $senh 4 + senh 3$)

25. Um anel esférico é o sólido que permanece após a perfuração de um buraco através do centro de uma esfera sólida. Se a esfera tem raio R e o anel esférico tem altura h, prove o fato notável de que o volume do anel depende de h, mas não de R.



III - Miscelânea

1. Seja $f : I\!R \to I\!R$ uma função contínua e periódica de período $2L$ $(L > 0)$ (isto é, $f(x+2L) = f(x),\ \forall x \in I\!R$). Seja $n \in Z\!\!Z$. Prove que:
$$\frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right)dx = \frac{1}{L}\int_{a}^{a+2L} f(x)\cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right)dx.$$

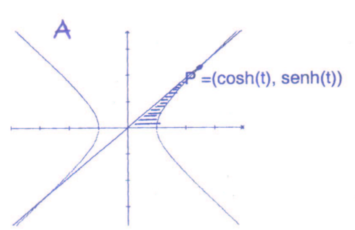
2. Seja f uma função contínua em um intervalo $[a,b]$ e sejam $u(x)$ e $v(x)$ funções diferenciáveis, cujos valores estão em $[a,b]$. Então
$$\frac{d}{dx}\int_{u(x)}^{v(x)} f(t)dt = f(v(x))\frac{dv}{dx} - f(u(x))\frac{du}{dx}.$$
A fórmula acima é conhecida como **Regra de Leibniz**.

3. Calcule $g'(x)$ onde
   (a) $g(x) = \displaystyle\int_{cos\,x}^{sen\,x} e^{t^2}dt$
   (b) $g(x) = \displaystyle\int_{\sqrt{x}}^{2\sqrt{x}} \text{sen}(t^2)dt$

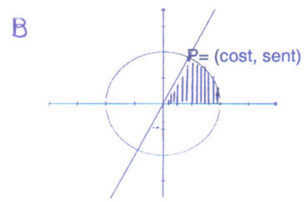
4. Calcule $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\text{sen}x\cos x}{x+1}dx$ em termos de $A = \displaystyle\int_0^{\pi} \frac{\cos x}{(x+2)^2}dx$.
   (Resp.: $\frac{1}{2}(\frac{1}{\pi+2} + \frac{1}{2} - A)$)

5. A temperatura de uma localidade, em um certo dia, foi modelada por $T(t) = 16 + 7\text{sen}\left(\dfrac{t-6}{16}\pi\right)$ com t expresso em horas, $6 \le t \le 22$ e $T(t)$ em graus Celsius. Determine a temperatura média deste local, neste dia. (Resp.: $(16 + \frac{14}{\pi})^oC$)

6. Fixe um ponto $P = (cosht, senht)$ sobre o ramo da hipérbole $x^2 - y^2 = 1$ com $x \ge 1$. Mostre que a área da região A hachurada (compreendida entre o gráfico da hipérbole, o eixo x, e a reta que liga P à origem) é $\frac{t}{2}$.



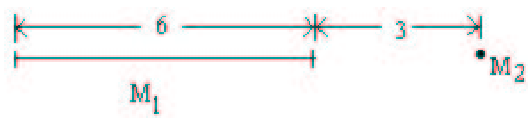
Observação: Note que a área da região B hachurada abaixo também é $\frac{t}{2}$, onde $P = (cost, sent)$ é um ponto qualquer da circunferência $x^2 + y^2 = 1$.



7. Sabe-se que a intensidade da força de atração entre duas partículas é dada por

$$F = \frac{Cm_1m_2}{d^2}$$

onde C é uma constante, m_1 e m_2 são as massas das partículas e d é a distância entre elas. Uma barra linear homogênea de massa $M_1 = 18Kg$ e uma massa pontual $M_2 = 2Kg$ estão dispostas como na figura. Calcule a intensidade da força de atração entre as duas massas. (Resp.: $\frac{4}{3}C$)



8. Encontre uma função f contínua no intervalo $(0, +\infty)$ e um número real C tal que

$$\int_1^x \frac{f(t)}{t^2} dt = \ln(1 + x^2) + C$$

(Resp.: $f(x) = \dfrac{2x^3}{1+x^2}; C = -\ln 2$)

9. Considere a função:

$$F(x) = \int_1^x \frac{1}{t} dt \qquad\qquad \text{para todo } x > 0.$$

Prove que para todo $a > 0$ e $x > 0$ vale:

(a) $F'(x) = \dfrac{1}{x}$

(b) $F(ax) = F(a) + F(x)$

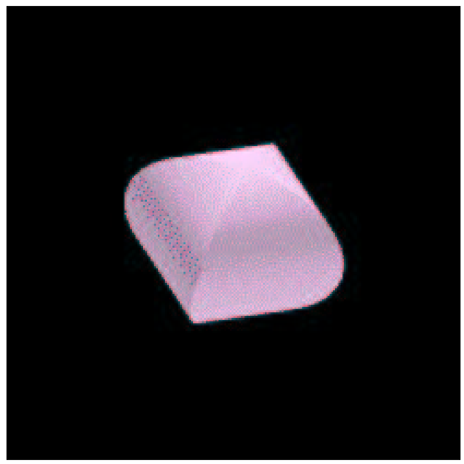
(Observe que poderíamos ter definido a função **logaritmo natural** como sendo essa função F).

10. Seja f uma função contínua em um intervalo I contendo a origem e seja

$$y = y(x) = \int_0^x \operatorname{sen}(x-t) f(t)\,dt$$

Prove que $\begin{cases} y'' + y = f(x) \\ y(0) = y'(0) = 0 \end{cases}$

11. Ache o volume da interseção de dois cilindros, ambos de raio R e cujos eixos são ortogonais. (Resp.: $\frac{16}{3}R^3$)



RESPOSTAS DAS INTEGRAIS INDEFINIDAS

I - Integrais Indefinidas

1) $\dfrac{x^6}{6} + x - \dfrac{1}{x} + k$

2) $\dfrac{e^{2x}}{2} + k$

3) $\dfrac{\operatorname{sen} 7x}{7} + k$

4) $\operatorname{tg} x - x + k$

5) $7 \ln|x-2| + k$

6) $\dfrac{\operatorname{tg}^4 x}{4} + k$

7) $2\sqrt{\cos x}\left(\dfrac{\cos^2 x}{5} - 1\right) + k$

8) $-\ln|\cos x| + k$

9) $\dfrac{\mathrm{tg}^2 x}{2} + \ln|\cos x| + k$

10) $\dfrac{1}{2}\ln(1+x^2) + k$

11) $\dfrac{1}{2} arctg\, x^2 + k$

12) $x - arctg\, x + k$

13) $-\dfrac{1}{3}\sqrt{(1-x^2)^3} + k$

14) $\ln|\mathrm{sec} x + \mathrm{tg}\, x| + k$

15) $2\sqrt{1+\ln x} + k$

16) $\dfrac{5}{18}\sqrt[5]{(x^3+1)^6} + k$

17) $\ln(2x^2+8x+20) + k$

18) $\dfrac{2}{3}\sqrt{(\ln x)^3} + k$

19) $\ln|\mathrm{arcsen}\, x| + k$

20) $\ln(1+e^x) + k$

21) $-\ln(1+\cos^2 x) + k$

22) $\dfrac{1}{3}e^{x^3} + k$

23) $\dfrac{3}{4}\sqrt[3]{(1+e^x)^4} + k$

24) $-2\cos\sqrt{x} + k$

25) $e^{\mathrm{arctg}\, x} + k$

26) $2(x+1)^{2004}\left(\dfrac{x+1}{2005} - \dfrac{1}{2004}\right) + k$

27) $-x\cos x + \mathrm{sen} x + k$

28) $\dfrac{1}{2}e^x(\mathrm{sen} x + \cos x) + k$

29) $\begin{cases} \dfrac{x^{r+1}}{r+1} lnx - \dfrac{x^{r+1}}{(r+1)^2} + k \text{ se } r \neq -1 \\ (lnx)^2 + k \text{ se } r = -1 \end{cases}$

30) $x(\ln x)^2 - 2(x\ln x - x) + k$

31) $(-x-1)e^{-x} + k$

32) $\dfrac{x^2}{2}\mathrm{arctg}\, x - \dfrac{x}{2} + \dfrac{1}{2}\mathrm{arctg}\, x + k$

33) $x\mathrm{arcsen}\, x + \sqrt{1-x^2} + k$

34) $\dfrac{1}{2}\sec x \mathrm{tg}\, x + \dfrac{1}{2}\ln|\sec x + \mathrm{tg}\, x| + k$

35) $\dfrac{1}{2}(x + \mathrm{sen}\, x\cos x) + k$

36) $\dfrac{\mathrm{sen}^3 x}{3} - \dfrac{\mathrm{sen}^5 x}{5} + k$

37) $\dfrac{1}{8}\left(x - \dfrac{\mathrm{sen}4x}{4}\right) + k$

38) $\ln|1 + \mathrm{sen} x| + k$

39) $6\ln|x-1| - 25\ln|x-2| + 22\ln|x-3| + k$

40) $\dfrac{\sqrt{6}}{12}\text{arctg}\left(\dfrac{x+2}{\sqrt{6}}\right) + k$

41) $-22\ln|x-1| + \dfrac{12}{x-1} + 25\ln|x-2| + k$

42) $\dfrac{x^3}{3} + \dfrac{35}{12}\ln|x-2| + \dfrac{61}{24}\ln\left[1+\left(\dfrac{x+1}{\sqrt{3}}\right)^2\right] + \dfrac{\sqrt{3}}{12}\text{arctg}\left(\dfrac{x+1}{\sqrt{3}}\right) + k$

43) $\dfrac{1}{2}\text{arcsen}x - \dfrac{1}{2}x\sqrt{1-x^2} + k$

44) $\dfrac{x}{8}(2x^2-1)\sqrt{1-x^2} + \dfrac{1}{8}\text{arcsen}x + k$

45) $2(\sqrt{x}-1)e^{\sqrt{x}} + k$

46) $x\ln(x+\sqrt{1+x^2}) - \sqrt{1+x^2} + k$

47) $\ln|\sqrt{5-2x+x^2} + x - 1| + k$

48) $\dfrac{2}{3}x\sqrt{x}\left(\ln x - \dfrac{2}{3}\right) + k$

49) $\dfrac{x}{2}\left[\text{sen}(\ln x) - \cos(\ln x)\right] + k$

50) $\dfrac{1}{2}\ln|x^2-4| + k$

51) $2\ln|x-1| + \dfrac{1}{2}\ln(x^2+2x+3) + \dfrac{1}{\sqrt{2}}\text{arctg}\dfrac{x+1}{\sqrt{2}} + k$

52) $x\sqrt{a^2+b^2x^2} + \dfrac{a^2}{2b}\ln\left[\dfrac{bx}{a} + \dfrac{\sqrt{a^2+b^2x^2}}{a}\right] + k$

53) $\dfrac{1}{b}\ln\left[\dfrac{bx}{a} + \dfrac{\sqrt{a^2+b^2x^2}}{a}\right] + k$

54) $\dfrac{x-1}{2}\sqrt{x^2-2x+2} + \dfrac{1}{2}\ln(x-1+\sqrt{x^2-2x+2})$ +k

55) $\left(\dfrac{x+1}{2}\right)\sqrt{3-2x-x^2} + 2\text{arcsen}\left(\dfrac{x+1}{2}\right) + k$

56) $\dfrac{1}{\sqrt{2}}\text{arctg}\left(\dfrac{x\sqrt{2}}{\sqrt{1-x^2}}\right) + k$

57) $\text{sen}x - \dfrac{1}{3}\text{sen}^3x + k$

58) $-\cos x + \dfrac{2}{3}\cos^3 x - \dfrac{1}{5}\cos^5 x + k$

59) $\dfrac{\text{sen}^2x}{2} - \dfrac{1}{2\text{sen}^2 x} - 2\ln|\text{sen}x| + k$

60) $\dfrac{1}{4}\cos^8\left(\dfrac{x}{2}\right) - \dfrac{1}{3}\cos^6\left(\dfrac{x}{2}\right) + k$

61) $\dfrac{\text{tg}^2x}{2} + 3\ln|\text{tg}x| - \dfrac{3}{2\text{tg}^2x} - \dfrac{1}{4\text{tg}^4x} + k$

62) $\dfrac{3x}{8} - \dfrac{\text{sen}(2x)}{4} + \dfrac{\text{sen}(4x)}{32} + k$

63) $\frac{\text{sen}^3 x}{3} - 2\frac{\text{sen}^5 x}{5} + \frac{\text{sen}^7 x}{7} + k$

64) $\dfrac{x}{16} - \dfrac{\text{sen}(4x)}{64} + \dfrac{\text{sen}^3(2x)}{48} + k$

65) $\dfrac{5}{16}x + \dfrac{1}{12}\text{sen}(6x) + \dfrac{1}{64}\text{sen}(12x) - \dfrac{\text{sen}^3(6x)}{144} + k$

66) $-\dfrac{\text{cotg}^3 x}{3} - \dfrac{\text{cotg}^5 x}{5} + k$

67) $\text{tg}x + \dfrac{\text{tg}^3 x}{3} - 2\text{cotg}(2x) + k$

68) $arc\,sen\,x + \sqrt{1-x^2} + k$

69) $2\sqrt{x} + 3\sqrt[3]{x} + 6\sqrt[6]{x} + 6\ln|\sqrt[6]{x} - 1| + k$

70) $\dfrac{1}{4}ln|x| - \dfrac{1}{4x} - \dfrac{1}{4}[\dfrac{1}{2}ln(x^2+4) + \dfrac{1}{2}arctg(\dfrac{x}{2})] + k$

71) $\dfrac{-arctgx}{x} + ln|x| - ln\sqrt{1+x^2} + k$