Capítulo 1

Introdução

1.1 O objeto deste livro

Podemos dizer que a Geometria, como ciência abstrata, surgiu na Antiguidade a partir das intuições acerca do espaço, principalmente do estudo da Astronomia. Nomes como os de Tales de Mileto, Pitágoras, Ptolomeu, Eudoxo, Euclides, Arquimedes, Apolônio, etc, ainda presentes nos livros de geometria atestam a antiguidade do assunto.

Destaca-se, principalmente, na Antiguidade Clássica, o nome de Euclides, que codificou quase todo o conhecimento geométrico da época nos treze livros de seus *Elementos*[1]. O Primeiro Livro dos *Elementos* expõe os fundamentos da geometria, chamada de euclideana, nos seus famosos cinco postulados.

De um ponto de vista atual, mais rigoroso, suas definições das diversas figuras geométricas (ponto, segmento de reta, plano, etc) têm um caráter intuitivo, formalmente desnecessário para seu estudo, e existem lacunas naqueles postulados, que são preenchidas por suposições implícitas nas demonstrações de suas proposições. Apesar disso, é uma obra de admirável elegância e profundidade, que merece sempre ser estudada.

O foco central deste livro é o estudo crítico dessa obra, principalmente com a discussão do famoso quinto postulado[2], analisando as contribuições de

[1]Existe uma boa tradução recente para o português, feita por Irineu Bicudo, publicada pela Editora da UNESP, em 2009.

[2]O postulado das paralelas, que, em Euclides, assume uma forma complexa. Pelo

diversos geômetras que, inadvertidamente, acabaram por descobrir o que hoje chamamos de *Geometria Hiperbólica*, em que não vale o quinto postulado.

Os demais postulados, explicitando-se aqueles implícitos na obra de Euclides, formam o que chamamos de *Geometria Neutra* ou *Geometria Absoluta*, cujas proposições formam o conjunto de conseqüências comuns à Geometria Euclideana e à Geometria Hiperbólica.

O estudo do papel do postulado das paralelas desempenhado nessas duas geometrias atingiu um ápice no trabalho do padre jesuíta italiano Gerolamo Saccheri (1667-1733), que, na tentativa de demonstrar o quinto postulado, descobriu diversos dos resultados iniciais da geometria hiperbólica. Este autor será estudado com detalhes no capítulo sobre a Teoria das Paralelas.

1.2 A Geometria como uma Ciência Dedutiva

Este não é um livro de Lógica Matemática. No entanto, fazem-se necessários alguns comentários acerca do discurso dedutivo, que é o discurso matemático. Vamos discutir algumas regras desse discurso, de modo informal (sem formalismo, mas com rigor).

A linguagem científica procura descrever cada ramo da ciência de modo a produzir asserções (ou frases declarativas - declaram propriedades ou conceitos). Um texto científico – em particular, o matemático – pode ser considerado como um discurso sujeito a algumas regras. As regras que descreveremos a seguir descrevem o que se chama hoje de *Lógica Clássica*.

1.2.1 A Lógica Clássica

Hoje em dia não se pode falar de uma lógica, no singular, para indicar um sistema de princípios e métodos de dedução. Por isso, chamamos a lógica estudada neste texto de *Lógica Clássica* para diferenciá-la das diversas lógicas presentes atualmente. Ela baseia-se em dois princípios fundamentais, já apresentados ao falarmos de Aristóteles:

---

fato de ser complexo, por uma questão estética ou filosófica, diversos autores, desde a Antiguidade, tentaram sem sucesso deduzi-lo dos outros postulados.

> **Princípio da Não Contradição:** Uma sentença não pode ser ao mesmo tempo verdadeira e falsa.

Nem a todas as sentenças podemos atribuir um valor de verdade que faça sentido, pelo menos em matemática. Por exemplo, uma pergunta, uma interjeição, uma ordem. Apenas[3] àquelas sentenças que declaram alguma propriedade acerca de algum objeto faz sentido essa atribuição de valor. Tais sentenças serão chamadas de *proposições*. Para estas, o segundo princípio, que realmente caracteriza fortemente a lógica clássica, limita as possibilidades de velores de verdade.

> **Princípio do Terceiro Excluído:** Uma proposição pode ser somente verdadeira ou falsa. Não há outras possibilidades.

Com isto, separamos o conjunto de proposições em dois conjuntos disjuntos: as verdadeiras e as falsas.

A negação: Essa distribuição de proposições em verdadeiras ou falsas deve satisfazer alguns critérios. O primeiro refere-se à negação. Se uma proposição for verdadeira, sua negação será falsa e se aquela for falsa, sua negação será verdadeira. No entanto, vela mais do que isto: se a negação de uma proposição for verdadeira, então ela será falsa e se sua negação for falsa, então ela será verdadeira. Esta última afirmação distingue a lógica clássica da intuicionista (mais construtiva) e é a base das demonstrações por redução ao absurdo.

Deduções: uma dedução (ou também, demonstração) informal é um discurso realizado na língua portuguesa, eventualmente envolvendo alguns símbolos matemáticos, em que, partindo de certas proposições chamadas de *premissas* ou *hipóteses*, chegando, ao final a uma proposição que será a conclusão da argumentação, satisfazendo a condição de que ela seja verdadeira, se todas as premissas também o forem.

Argumentos Válidos: serão considerados válidos os argumentos (deduções) que tenham uma conclusão considerada verdadeira, mas também aquelas cuja conclusão seja falsa, quando alguma das premissas for falsa.

[3] Existem lógicas, consideradas não clássicas, que estudam tais sentenças. Não serão tratadas aqui.

A implicação: uma implicação é uma proposição da forma *se* A*, então* B, sendo que A é uma premissa ou hipótese (que pode ser uma proposição bem complexa) e B é uma proposição, a sua conclusão ou tese. A ideia é que uma implicação contenha em si a informação de que das premissas possamos concluir a tese. Assim, se a hipótese for verdadeira, a tese terá que necessariamente ser verdadeira. Demonstrar uma implicação diretamente significa afirmar as premissas e chegar à conclusão. Podemos demonstrá-la também de duas maneiras indiretas:

1. **Contrapositiva:** nega-se a tese, isto é, assumimos que a tese é falsa, e concluímos que a premissa também será falsa, ou seja, concluímos a negação da premissa;

2. **Redução ao Absurdo:** neste caso negamos que a implicação seja verdadeira (isto ocorre se afirmamos a premissa e, ao mesmo tempo, negamos a tese) e concluímos uma contradição (ou seja, no discurso demonstrativo haverá duas proposições contraditórias – uma a negação da outra) – como estamos assumindo que a argumentação é válida, devemos concluir que a hipótese da negação da implicação será falsa e, portanto, que a implicação será verdadeira.

Muitos textos confundem estas duas formas indiretas de demonstração. Elas só divergem em lógicas não clássicas, como veremos mais adiante.

Exercício 1: A implicação pode ser escrita de diversas maneiras distintas em português. Nas frases abaixo, indique o que é premissa e o que é conclusão da implicação:

1. se A, então B;

2. A implica B;

3. B, sempre que A (sempre que A ocorre, então B também deve ocorrer);

4. B, se A;

5. A, somente se B (se B não ocorre, então A não pode ocorrer);

6. A e, portanto, B;

7. A é condição suficiente para B (supondo a implicação verdadeira, basta que A seja verdadeira para que possamos concluir que B é verdadeira);

8. B é condição necessária para A (supondo a implicação verdadeira, se B for verdadeira, A tem que necessariamente ser verdadeira).

Variáveis: para indicar um elemento indeterminado (de alguma classe) usamos uma letra ou símbolo, que chamamos de veriável (como uma variável ou incógnita de uma equação). Assim, frases do tipo *seja*[4] *P uma proposição* contém a letra P indicando uma proposição qualquer – essa letra pode ser substituída por uma proposição específica.

Generalização de variáveis: em uma demonstração de uma proposição do tipo "*toda P, sentença,* $\Phi(P)$[5]"em geral lançamos como uma premissa a frase "*seja P uma sentença*"e continuamos a argumentação até chegarmos à afirmação $\Phi(P)$. Depois argumentamos que *como P é genérico, a sentença $\Phi(p)$ vale para todo P.* Isto significa que não apareceu no texto da argumentação nenhuma premissa e nem proposição que particularizasse a classe de variação da variável P e, portanto, permitimo-nos concluir que a afirmação $\Phi(P)$ valha para todo P. Este é o chamado princípio ou regra da generalização.

1.2.2 Recursão e Indução Finita

Um tipo recorrente de definição neste texto serão as definições em que são feitas construções por recursão, o que significa que partimos de uma classe de elementos iniciais e agregamos símbolos, ou fazemos alguma conta, sobre o resultado anterior. Toma a seguinte forma:

> **Passo Inicial:** uma definição qualquer.
> **Passo recursivo:** assumimos ter construído o objeto e fazemos a aplicação de uma função ou algoritmo[6] ao tal objeto.

Assumimos neste caso que temos a descrição completa de uma dada classe de objetos. Em tais construções, atribuímos um número natural (em $\mathbb{N}$) a

[4] Este é um modo meio pedante de fazer a afirmação *P é uma proposição.*

[5] Veja que usamos aqui a letra grega Φ como uma variável para indicar uma sentença envolvendo a letra P como parâmetro.

[6] Algoritmo é qualquer procedimento que acreditemos ser *mecanizável.*

cada objeto, sendo o zero atribuído aos elementos iniciais e, na hipótese de ter sido atribuído um número[7] n a um objeto da classe, atribuiremos o número $n+1$ ao objeto obtido pelo passo recursivo. (Por exemplo, n seria o número de símbolos acrescentados ao objeto.)

> **Princípio da Indução Finita:** se uma dada propriedade $\Phi(n)$ de números naturais vale em $n = 0$ e se também, para cada n a validade de $\Phi(n)$ implicar a de $\Phi(n+1)$, então é válido concluir que, para todo $n \in \mathbb{N}$, a propriedade $\Phi(n)$ vale.

Uma dedução por indução corre nos seguintes moldes:

- demonstração de $\Phi(0)$;
- assumir, como premissa, que valha $\Phi(n)$ (n uma variável para número natural);
- após alguma argumentação, concluir que vale $\Phi(n+1)$;
- *como n é genérico*, para todo n, vale que $\Phi(n)$ implica $\Phi(n+1)$;
- concluir, pelo princípio da indução, que para todo n vale $\Phi(n)$.

Essas são basicamente as regras do nosso discurso científico, com o qual desenvolveremos a geometria.

[7] Usando uma variável n para indicar um elemento de $\mathbb{N}$.