Capítulo 3

Geometrias Métricas

3.1 Introdução

Vamos desenvolver um pouco da geometria métrica neutra, sem assumir nenhum postulado de paralelismo.

3.1.1 Réguas

Vimos que para cada linha reta ℓ, existe (pelo menos) uma função $f : \ell \to \mathbb{R}$ bijetora, chamada de régua de ℓ (ou seja, f é uma regra que associa a cada ponto P de ℓ um único número real $f(P)$ e, dado um número real $r \in \mathbb{R}$, existe um único ponto Q de ℓ associado a r, $f(Q) = r$.)

Vamos assumir que já tenhamos escolhido uma régua para cada reta, preservando congruência.

É como se as linhas fossem traçadas com uma régua graduada (talvez um pouco torta, dependendo da geometria). A ponta do lápis em cada instante estará em cima de um ponto de ℓ e o número que aparece na régua nesse lugar é o valor associado ao ponto.

Usamos essas réguas para definir uma **distância** $d(P, Q) = |f(P) - f(Q)|$, sendo f a régua escolhida para a linha r_{PQ}.

Exercício 22: Na geometria analítica, dada uma reta r de equação $ax +$

$by = c$, escolhemos dois pontos arbitrários $P = (x_0, y_0)$ e $Q = (x_1, y_1)$ tais que $\sqrt{(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2} = 1$; qualquer outro ponto $R = (x, y)$ desta reta é determinado obtendo um número real t tal que $(x, y) = (x_0, y_0) + t(x_1 - x_0, y_1 - y_0)$. Neste caso, definimos $f(R)$ como o valor t obtido. No caso de $R = P$, temos que $t = 0$ e se $R = Q$, $t = 1$. Mostre que f é uma régua para r.

Verifique que a distância entre os pontos $U = (u_1, v_1)$ e $V = (u_2, v_2)$ (definida a partir da régua) nesta geometria é

$$d(U, V) = d_E(U, V) = \sqrt{(u_2 - u_1)^2 + (v_2 - v_1)^2}.$$

Solução e/ou Sugestão: Primeiro vamos mostrar que para cada ponto (x_2, y_2) da reta $ax + by = c$ existe um único t tal que $(x_2, y_2) = (x_0, y_0) + t(x_1 - x_0, y_1 - y_0)$. Com isto, obtemos um sistema linear de duas equações a uma incógnita t

$$\begin{cases} (x_1 - x_0)\, t &= x_2 - x_0 \\ (y_1 - y_0)\, t &= y_2 - y_0 \end{cases}$$

e precisamos mostrar que tem uma única solução. Como $P \neq Q$, então ou $x_1 \neq x_0$, ou $y_1 \neq y_0$. No primeiro caso, podemos isolar t da primeira equação, obtendo $t = (x_2 - x_0)/(x_1 - x_0)$. Daí, substituímos na segunda equação para ver se é um sistema possível de resolver; usando a equação da reta $ax + by = c$, como $x_1 \neq x_0$, a reta não pode ser vertical. Por isso, o coeficiente $b \neq 0$ e podemos isolar y em função de x, obtendo $y = (c - ax)/b$; assim temos que $y_2 = (c - ax_2)/b$ e $y_0 = (c - ax_0)/b$. Portanto, substituindo t na segunda equação, temos

$$(y_1 - y_0)t = (y_1 - y_0)\frac{(x_2 - x_0)}{(x_1 - x_0)} = (x_2 - x_0)\frac{(y_2 - y_0)}{(x_1 - x_0)} = -\frac{a}{b}(x_1 - x_0) = y_2 - y_0,$$

ou seja, o sistema é possível e determinado e portanto tem uma única solução. No caso em que $x_0 = x_1$, devemos ter que $y_0 \neq y_1$, e argumentamos de modo análogo.

Agora, dado $r \in \mathbb{R}$, precisamos mostrar que o ponto R de coordenadas $(x_3, y_3) = (x_0, y_0) + r(x_1 - x_0, y_1 - y_0)$ está na reta $ax + by = c$, ou seja, $ax_3 + by_3 = c$. Substituindo x_3 por $x_0 + r(x_1 - x_0)$ e y_3 por $y_0 + r(y_1 - y_0)$, e usando o fato que P e Q estão nesta reta, temos

$$ax_3 + by_3 = a[x_0 + r(x_1 - x_0)] + b[y_0 + r(y_1 - y_0)] \ =$$

$$= (1-r)(ax_0+by_0)+r(ax_1+by_1) = (1-r)c+rc = c,$$

ou seja, $R=(x_3,y_3)$ também está na reta.

Para verificar a fórmula da distância, sejam $r=f(U)$ e $s=f(V)$ os valores da régua correspondentes. Então $U=(u_1,v_1)=(x_0,y_0)+r(x_1-x_0,y_1-y_0)$ e $V=(v_1,v_2)=(x_0,y_0)+s(x_1-x_0,y_1-y_0)$ e $d(U,V)=|r-s|$. Subtraindo as duas equações, obtemos $(u_1-v_1,u_2-v_2)=(r-s)(x_1-x_0,y_1-y_0)$. Elevando ao quadrado cada coordenada e somando as duas, temos $(u_1-v_1)^2+(u_2-v_2)^2=(r-s)^2[(x_1-x_0)^2+(y_1-y_0)^2]=(r-s)^2$, pois escolhemos P e Q de modo que $(x_1-x_0)^2+(y_1-y_0)^2=1$; tirando as raízes quadradas, temos

$$d(U,V)=|r-s|=\sqrt{(r-s)^2}=\sqrt{(u_1-v_1)^2+(u_2-v_2)^2}$$

que é o que queríamos mostrar. $\square$

Exercício 23: A **Geometria do Taxista** tem o plano e as linhas da geometria analítica mas com as réguas definidas por $f(P)=y$ se r é uma reta vertical (de equação $x=a$) e (a,y) são as coordenadas de P e $f(P)=(1+|m|)x$ se r for uma reta não vertical, de equação $y=mx+b$, e (x,y) forem as coordenadas de P. Verifique que nos dois casos f é realmente uma régua.

Verifique que $d(P,Q)=|x_1-x_0|+|y_1-y_0|$ nesta geometria, sendo $P=(x_0,y_0)$ e $Q=(x_1,y_1)$.

Exercício 24: Na geometria hiperbólica, dada uma linha da forma $r_a=\{(x,y)\in\mathbb{H} : x=a\}$, defino $f(P)=|\ln(y)|$, sendo que (a,y) é a coordenada de P, e para uma linha da forma $r_{p,r}=\{(x,y)\in\mathbb{H} : (x-p)^2+y^2=r^2\}$, defino

$$f(P)=\left|\ln\left(\frac{x-p+r}{y}\right)\right|,$$

sendo (x,y) as coordenadas de P. Mostre que em ambos os casos f é uma régua. No caso de $r_{p,r}$, dado o número real t, o ponto P tal que $f(P)=t$ tem coordenadas (x,y) com $x=p+r\,\mathrm{tgh}\,(t)$ e $y=r\,\mathrm{sech}\,(t)$, sendo que

$$\mathrm{tgh}\,(t)=\frac{e^t-e^{-t}}{e^t+e^{-t}}\ \text{ e }\ \mathrm{sech}\,t=\frac{2}{e^t+e^{-t}}$$

Verifique que a distância nesta geometria é dada por $d(P,Q) = |\ln(d/b)|$ se P tem coordenadas (a,b) e Q tem coordenadas (a,d) (estão na mesma linha vertical) e por

$$d(P,Q) = \left|\ln\left(\frac{d(a-p+r)}{b(c-p+r)}\right)\right|,$$

se P tem coordenadas (a,b) e Q tem coordenadas (c,d), com $a \neq c$ (estão na mesma linha $r_{p,r}$).

Exercício 25: No plano de Moulton, definimos $f : r \to \mathbb{R}$ por $f(P) = y$ se r é uma linha vertical (de equação $x = a$) e (a,y) são as coordenadas de P, f como na geometria analítica para $r_{m,b}$ com $m < 0$ e por

$$f(P) = \begin{cases} a\sqrt{1+4m^2} & \text{se } a < 0 \\ a\sqrt{1+m^2} & \text{se } a \geq 0, \end{cases}$$

sendo que P tem coordenadas (a,b) e está na linha quebrada $r^*_{m,b} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = 2mx + p \text{ se } x < 0 \text{ e } y = mx + p \text{ se } x \geq 0\}$ (com $m \geq 0$). Verifique que f é régua e, neste caso, a distância entre $P = (a,b)$ e $Q = (c,d)$ é

$$d(P,Q) = \begin{cases} d_E(P,(0,p)) + d_E((0,p),Q) & \text{se } ac < 0 \\ d_E(P,Q) & \text{caso contrário,} \end{cases}$$

sendo que d_E é a distância da geometria analítica (ou euclideana). Observe que a condição $ac < 0$ significa que os pontos P e Q estão em lados opostos do eixo Oy.

Exercício 26: No plano rasgado, definimos $f : r \to \mathbb{R}$ por $f(P) = y$ se r é uma linha vertical (de equação $x = a$) e (a,y) são as coordenadas de P e por

$$f(P) = \begin{cases} a\sqrt{1+m^2} & \text{se } a < 0 \\ (a-1)\sqrt{1+m^2} & \text{se } a \geq 1, \end{cases}$$

sendo que P tem coordenadas (a,b) e está na linha quebrada $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = mx + p \text{ e } x < 0 \text{ ou } x \geq 1\}$. Verifique que f é régua e, neste caso, a distância entre $P = (a,b)$ e $Q = (c,d)$ é

$$d(P,Q) = \begin{cases} d_E(P,(0,p)) + d_E((1,m+p),Q) & \text{se } a < 0 \text{ e } c \geq 1, \text{ ou } c < 0 \text{ e } a \geq 1 \\ d_E(P,Q) & \text{demais casos.,} \end{cases}$$

sendo que d_E é a distância da geometria analítica (ou euclideana). Observe que as condições $a < 0$ e $c \geq 1$, ou $c < 0$ e $a \geq 1$ significam que os pontos P e Q estão em lados opostos da faixa $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x < 1\}$, retirada de $\mathbb{R}^2$.

Exercício 27: Mostre que $P - Q - R$ (Q **está entre** P e R) se $f(P) < f(Q) < f(R)$ ou $f(R) < f(Q) < f(P)$.

O próximo resultado diz que podemos deslocar uma régua sobre uma reta.

Proposição 13 *Em uma geometria métrica, dada uma linha r e sua régua $f : r \to \mathbb{R}$, então:*

(a) *se A é ponto de r e $g, h : r \to \mathbb{R}$ são definidas por $g(P) = f(P) - f(A)$ e $h(P) = -f(P) + f(A)$, então g e h também são réguas de r compatíveis com a distância;*

(b) *se $k : r \to \mathbb{R}$ é uma régua compatível com a distância, então existe um ponto A de r tal que $k = g$ ou $k = h$ do item anterior;*

(c) *se $P - Q - R$ pela régua f então $P - Q - R$ por qualquer outra régua g de r compatível com a distância.*

Demonstração:

(a) Temos que mostrar que se P e Q estão em r, $d(P,Q) = |g(P) - g(Q)| = |h(P) - h(Q)|$. Sabemos que $d(P,Q) = |f(P) - f(Q)|$. Com isto, temos $|g(P) - g(Q)| = |[f(P) - f(A)] - [f(Q) - f(A)]| = |f(P) - f(Q)| = d(P,Q)$ e $|h(P) - h(Q)| = |[-f(P) + f(A)] - [-f(Q) + f(A)]| = |f(P) - f(Q)| = d(P,Q)$, como queríamos mostrar.

(b) Seja A em r tal que $k(A) = 0$. Então, para cada ponto P de r, $d(A,P) = |k(P) - k(A)| = |k(P)| = |f(P) - f(A)|$. Tirando os módulos, ou $k(P) = f(P) - f(A) = g(P)$ ou $k(P) = -[f(P) - f(A)] = h(P)$, como queríamos mostrar.

(c) Suponhamos que $f(P) < f(Q) < f(R)$. Então, dado um ponto A de r e subtraindo o número real $f(A)$ de cada termo, temos $f(P) - f(A) < f(Q) - f(A) < f(R) - f(A)$, ou seja $g(P) < g(Q) < g(R)$; se multiplicarmos por -1, invertemos as desigualdades, obtendo $-f(R) + f(A) < -f(Q) + f(A) < -f(P) + f(A)$, ou seja $h(R) < h(Q) < h(P)$. Em ambos os casos, permanece a relação $P - Q - R$, como queríamos mostrar. $\square$

Exercício 28: Dados A e B dois pontos distintos de uma linha r, mostre que existe uma régua f de r tal que $f(A) = 0$ e $f(B) > 0$.

Proposição 14 *Mostre que se P, Q e R são pontos distintos de uma linha r, então$P - Q - R$ se, e somente se, $d(P, R) = d(P, Q) + d(Q, R)$.*

Demonstração: Se $P - Q - R$, então $f(P) < f(Q) < f(R)$, donde decorrem as desigualdades $0 < f(Q) - f(P) < f(R) - f(P)$ e $0 < f(R) - f(Q)$, e $d(P, R) = |f(P) - f(R)| = f(R) - f(P) = f(R) - f(Q) + f(Q) - f(P) = |f(R) - f(Q)| + |f(Q) - f(P)| = d(P, Q) + d(Q, R)$; ou $f(R) < f(Q) < f(P)$, donde decorrem as desigualdades $0 < f(Q) - f(R) < f(P) - f(R)$ e $0 < f(P) - f(Q)$ e $d(P, R) = |f(P) - f(R)| = f(P) - f(R) = f(P) - f(Q) + f(Q) - f(R) = |f(P) - f(Q)| + |f(Q) - f(R)| = d(P, Q) + d(Q, R)$, como queríamos mostrar.

Para a recíproca, suponhamos que $d(P, R) = d(P, Q) + d(Q, R)$. Como os três pontos são distintos, as únicas ordens comp-atíveis com tal fórmula são $f(P) < f(Q) < f(R)$ ou $f(R) < f(Q) < f(P)$, pois, por exemplo, se $f(R) < f(P) < f(Q)$, então $d(P, R) = f(P) - f(R) < f(Q) - f(R) = d(Q, R) < d(Q, R) + d(P, Q)$.

(Verifique as outras possibilidades.) $\square$

Exercício 29: Verifique que se $P = (-3, 3)$, $Q = (1, 5)$ e $R = (4, 4)$ estão em $\mathbb{H}$, então $P - Q - R$ na geometria hiperbólica.

Exercício 30: Verifique que se $P = (-1, -3)$, $Q = (0, -1)$ e $R = (1, 0)$ então $P - Q - R$ no plano de Moulton. (Ache $m > 0$ e $b \in \mathbb{R}$ tais que estes pontos estejam na linha $r^*_{m,b}$.)

Exercício 31: Mostre que se A e B são pontos distintos em uma linha r, mostre que exite uma régua f de r tal que $\overrightarrow{AB} = \{P \in r : f(P) \geq 0\}$.

Exercício 32: Mostre que dados A e B distintos e um segmento $\overline{CD}$, então:

(a) (Soma de segmentos) exite um único ponto P em $\overrightarrow{AB}$ tal que $A - B - P$ e $\overline{BP} \equiv \overline{CD}$. (Podemos dizer que $\overline{AP}$ é a soma do segmento $\overline{AB}$ com $\overline{CD}$.)

(b) (Diferença de segmentos) exite um único ponto P em $\overrightarrow{BA}$ tal $\overline{BP} \equiv \overline{CD}$. (Podemos dizer que $\overline{AP}$ é a diferença entre os segmentos $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$.)

(c) Mostre que dados A e B distintos e um segmento $\overline{CD}$, exite uma régua f de r_{AB} tal que $f(A) = 0$, $f(B) > 0$ e $f(P) = f(B) + d(C, D)$, no caso da soma dos segmentos e $f(P) = f(B) - d(C, D)$, no caso da diferença dos segmentos.

3.1.2 Ângulos

Vamos estabelecer aqui os outros critérios de congruênciade triângulos para uso futuro.

Proposição 15 *Dados os triângulos $\triangle ABC$ e $\triangle DEF$, cada uma das condições abaixo relacionadas implicam na congruência desses dois triângulos:*

1. ***(Ângulo-Lado-Ângulo: ALA)*** $\overline{BC} \equiv \overline{EF}$, $\angle ABC \equiv \angle DEF$ *e* $\angle ACB \equiv \angle DFE$;
2. ***(Lado-Lado-Lado: LLL)*** $\overline{AB} \equiv \overline{DE}$, $\overline{BC} \equiv \overline{EF}$ *e* $\overline{CA} \equiv \overline{FD}$;
3. ***(Lado-Ângulo-Ângulo oposto: LAAo)*** $\overline{BC} \equiv \overline{EF}$, $\angle ABC \equiv \angle DEF$ *e* $\angle BAC \equiv \angle EDF$.

Demonstração: A ideia a ser explorada aqui é tentar sobrepor uma cópia do $\triangle ABC$ sobre o $\triangle DEF$.

Faremos apenas o primeiro caso, deixando os outros dois como exercício.

Vamos supor que não valha a congruência para chegarmos a uma contradição. Podemos supor que, por exemplo, $AB < DE$. Seja $G \in \overline{DE}$, tal que $\overline{AB} \equiv \overline{EG}$.

Por LAL, $\triangle ABC \equiv \triangle GEF$. Devido a isto, $\angle EFD \equiv \angle BCA \equiv \angle EFG$. No entanto, como o ponto G fica no interior do ângulo $\angle EFD$, este não pode ser congruente ao ângulo $\angle EFG$, a contradição buscada. $\square$

Exercício 33: Faça as demonstrações restantes.

Na verdade, esses enunciados que envolvem congruência de lados e também ângulos, implicando a congruência dos triângulos, são equivalentes ao postulado LAL. As demonstrações imitam aquela apresentada.

Exercício 34: Mostre que ALA implica LAL, assumindo os outros postulados de incidência, ordem e congruência de segmentos.

Exercício 35: Mostre que LAAo implica LAL, assumindo os outros postulados de incidência, ordem e congruência de segmentos.

Observação: Não se sabe ainda se LLL implica LAL, assumindo os outros postulados de incidência, ordem e congruência de segmentos. Mas, se pudermos construir triângulos congruentes a um triângulo dado, em qualquer parte do espaço, então a implicação vale.

Exercício 36: Mostre que LLL implica LAL, assumindo os outros postulados de incidência, ordem e congruência de segmentos e mais um postulado que diz:

> Dados o triângulo $\triangle ABC$, um plano π, um segmento $\overline{DE}$ em π, um dos lados H do plano π em relação à reta ℓ_{DE}, existe um único ponto F em π, tal que $\triangle DEF \equiv \triangle ABC$.

Exercício 37: Mostre que LAL é equivalente ao seguinte enunciado:

> (Reflexões por um plano) Dado um plano π, seja Φ_π a função que fixa cada ponto de π e se P não estiver em π, $Q = \Phi_\pi(P)$ é o ponto tal que a reta ℓ_{PQ} seja perpendicular a π, contendo o ponto R de π, e tal que $P-R-Q$ e $\overline{PR} \equiv \overline{RQ}$. Então Φ_π é uma isometria, ou seja, preserva distâncias e ângulos: $d(P,Q) = d(\Phi_\pi(P), \Phi_\pi(Q))$ e $\angle ABC \equiv \angle\Phi_\pi(A)\Phi_\pi(B)\Phi_\pi(C)$.

Assumiremos que existem transferidores, ou seja, uma função m que associa a cada ângulo $\angle AOB$ um número real $m(\angle AOB) \in]0, 180[$, respeitando congruências e soma de ângulos.

Sejam A, B, C, D e O pontos de um plano π, tais que $A - O - C$, $B - O - D$, e tal que $\overline{AC}$ não seja colinear com $\overline{BD}$. Dizemos que o ângulo $\angle AOB$ é suplementar do ângulo $\angle BOC$, e vice-versa.

Exercício 38: Mostre que se o ângulo $\angle AOB$ for suplementar do ângulo $\angle BOC$, então $m(\angle AOB) + m(\angle BOC) = 180$. NMostre também a recíproca.

Exercício 39: Sejam A, B, C, D e O pontos de um plano π, tais que $A - O - C$, $B - O - D$, e tal que $\overline{AC}$ não seja colinear com $\overline{BD}$. Mostre que $\angle AOB \equiv \angle COD$. Cuidado: isto não é óbvio. Considere os ângulos suplementares.

3.2 Desigualdades Geométricas

Vamos desenvolver algumas desigualdades envolvendo ângulos e medidas de segmentos. Para facilitar o entendimento, vamos estabelecer algumas notações relativas a comparações de tamanhos de segmentos e ângulos.

NOTAÇÕES: Se $d(A, B) < d(C, D)$, escreveremos $AB < CD$ (sem as barras); se $d(A, B) \leq d(C, D)$, escreveremos $AB \leq CD$; se $\overline{AB} \equiv \overline{CD}$, escreveremos $AB = CD$; se $d(A, B) = d(C, D) + d(E, F)$, escreveremos $AB = CD + EF$; se $m(\angle AOB) < m(\angle CPD)$, escreveremos $\angle AOB < \angle CPD$ e se $m(\angle AOB) \leq m(\angle CPD)$, escreveremos $\angle AOB \leq \angle CPD$.

Exercício 40: Dados $A - B - D$, e C fora de r_{AB}, mostre que $\angle BAC < \angle DBC$ e $\angle ACB < \angle DBC$.

Solução e/ou Sugestão: Seja M o ponto médio de $\overline{BC}$, e seja E tal que $A - M - E$ e $\overline{AM} \equiv \overline{ME}$. Então $\triangle AMC \equiv \triangle EMB$ (por quê?) e E está no interior de $\angle DBC$ (por quê?). Como $\angle ACB \equiv \angle EBC$, $\angle ACB < \angle DBC$.

Para a outra desigualdade, seja F tal que $C - B - F$. Então $\angle DBC \equiv \angle FBA$. Pelo mesmo argumento acima, mostramos que $\angle BAC < \angle DBC$ (faça isto!).

Exercício 41: Mostre que se dois lados de um triângulo não são congruentes, então os dois ângulos opostos a estes lados também não são congruentes. Mostre que o maior entre estes dois ângulos é oposto ao maior entre os dois lados em questão.

Solução e/ou Sugestão: Dado o triângulo $\triangle ABC$, suponha que $AB > AC$. Seja D o único ponto tal que $A-C-D$ e $\overline{AD} \equiv \overline{AB}$. Então o triângulo $\triangle ABD$ é isósceles e $\angle ADB \equiv \angle ABD$. Como C está no interior de $\angle ABD$, $\angle ABC < \angle ABD \equiv \angle ADB < \angle ACB$ (por quê?).

Exercício 42: Mostre a recíproca do exercício anterior, ou seja, se dois ângulos de um triângulo não são congruentes, então os lados opostos a estes ângulos também não são congruentes e o maior destes lados é oposto ao maior destes ângulos.

Exercício 43: (Desigualdade Trangular I) Dado o triângulo $\triangle ABC$, mostre que $d(A, C) < d(A, B) + d(B, C)$ (ou seja $AC < AB + BC$).

Solução e/ou Sugestão: Seja D tal que $C-B-D$ e $\overline{AB} \equiv \overline{BD}$. Então $\angle BAD \equiv \angle BDA$. Como B está no interior de $\angle CAD$, $\angle BDA \equiv \angle CAD > \angle BAD$ e, portanto, pelo exercício acima, $AC < AD = CB+BD = AB+BC$.

Exercício 44: (Desigualdade Trangular II) Dados os pontos A, B, e C, mostre que $d(A, C) \leq d(A, B) + d(B, C)$. (Considere os vários casos em que A, B e C são colineares, etc.)

Proposição 16 *Dados os triângulos $\triangle ABC$ e $\triangle DEF$ tais que $\overline{AB} \equiv \overline{DE}$, $\overline{BC} \equiv \overline{EF}$ e $\angle ABC > \angle DEF$, temos que $AC > DF$.*

Demonstração: Para isto, construímos o triângulo $\triangle HBC \equiv \triangle DEF$, com H do mesmo lado que A em relação a r_{BC} (por quê podemos construí-lo e por quê é único?). Como $\angle ABC > \angle DEF$, temos $\angle ABC > \angle HBC$. Pelas barras cruzadas, a semi reta $\overrightarrow{BH}$ cruza $\overline{AC}$ num ponto K. Podemos ter três casos, a saber, $B-H-K$, ou $H = K$, ou $B-K-H$. Construímos um triângulo auxiliar $\triangle ABM$ tal que M é o ponto em $\overline{AK}$ que está na bissetriz do ângulo $\angle ABH$ (pelas barras cruzadas). Por LAL e usando a hipótese

$\overline{AB} \equiv \overline{DE} \equiv \overline{BH}$, temos que $\triangle ABM \equiv \triangle HBM$ e, portanto $\overline{AM} \equiv \overline{HM}$. Pela desigualdade triangular, $HC \leq HM + MC$. Nos casos em que $K \neq H$, temos $HC < HM + MC$, ou seja, $DF = HC < AM + MC = AC$. No caso em que $H = K$, a desigualdade $DF = HC < AC$ decorre do fato que $A - H - C$. $\square$

Exercício 45: Dado um triângulo $\triangle ABC$, tal que $AC \leq AB$, se $B - D - C$, mostre que $AD < AB$. (Para isto, mostre que $\angle ABC < \angle ADB$, etc.)

Exercício 46: Dado o triângulo isósceles $\triangle ABC$ (tal que $\overline{AB} \equiv \overline{AC}$), mostre que $m(\angle ABC) < 90$.

Exercício 47: Mostre que qualquer triângulo tem pelo menos dois ângulos internos agudos (isto é, medem menos que 90).

3.3 Triângulos Retângulos

Um triângulo é chamado de **triângulo retângulo** se um de seus ângulos internos for reto (ou seja, se medir 90). Os lados adjacentes ao ângulo reto são os **catetos** e o lado oposto a **hipotenusa**. Veremos que o famoso teorema de Pitágoras só vale na geometria euclideana.

Exercício 48: Mostre que o **Teorema de Pitágoras** vale na geometria analítica, isto é, mostre que dado o triângulo retângulo $\triangle ABC$, com ângulo reto $\angle BAC$, mostre que $BC^2 = AB^2 + AC^2$. (Use o produto escalar de vetores.)

Exercício 49: Mostre que o Teorema de Pitágoras não vale na geometria hiperbólica. (Considere o triângulo $\triangle ABC$ em $\mathbb{H}$ tal que $A = (0, 5)$, $B = (0, 7)$ e $C = (3, 4)$; calcule $d(A, B)$, etc.)

Exercício 50: Mostre que a hipotenusa é maior do que os catetos. Use isto para mostrar que o ponto de uma linha r mais próximo de um ponto P fora de r é o pé da perpendicular a r que passa por P.

Observação: Definimos a **distância** do ponto P à linha r como $d(P,r) = d(P,Q)$, sendo que $P = Q$, se $P \in r$, ou Q é o pé da perpendicular a r passando por P. Dado um triângulo $\triangle ABC$ qualquer, seja $D \in r_{AB}$ o pé da perpendicular a r_{AB} passando por C. O segmento $\overline{CD}$ é uma **altura** de $\triangle ABC$.

Exercício 51: Mostre que $d(P,r) \leq d(P,R)$, se $R \in r$ e $d(P,r) = d(P,R)$ se, e somente se, $r_{PQ} \perp r$.

Exercício 52: Mostre que se $\overline{AB}$ é o maior lado de $\triangle ABC$ e $\overline{CD}$ é uma altura sobre o lado $\overline{AB}$, então $A - D - B$. (Compare ângulos opostos aos lados convenientes.)

Exercício 53: (LLA para triângulos retângulos) Dados os triângulos $\triangle ABC$ e $\triangle DEF$, tais que $\angle BAC$ e $\angle EDF$ sejam retos, $\overline{AB} \equiv \overline{DE}$ e $\overline{BC} \equiv \overline{EF}$, mostre que $\triangle ABC \equiv \triangle DEF$.

Solução e/ou Sugestão: Seja $G \in r_{DF}$ tal que $G - D - F$ e $GD = AC$. Por LAL, $\triangle ABC \equiv \triangle DEG$ (por quê?). Como $BC = EF$, $EF = BC = EG$ e, portanto, o triângulo $\triangle EFG$ é isósceles, com $\angle DFE \equiv \angle DGE$. Por LAAo, $\triangle DEF \equiv \triangle DEG \equiv \triangle ABC$ (por quê?).

Exercício 54: Nem sempre vale o critério LLA para triângulos não retângulos, isto é, dado o triângulo $\triangle ABC$ não retângulo e tal que $BC < AC$, existe um triângulo $\triangle DEF$, tal que $\angle BAC \equiv \angle EDF$, $\overline{AB} \equiv \overline{DE}$ e $\overline{BC} \equiv \overline{EF}$, mas $\triangle ABC \not\equiv \triangle DEF$. Em que casos vale este critério? Basta acrescentar a hipótese de que $BC > AB$?

Solução e/ou Sugestão: Para isto, seja $\overline{AG}$ uma altura, com $G \in r_{BC}$. Então, ou $A - G - C$, ou $A - C - G$, pois $G \neq A$ e $G \neq C$, por não ser triângulo retângulo, e $G - A - C$ implicaria que $BC > AC$ (por quê?). Seja $E \in r_{AC}$ tal que $E - G - C$ e $EG = CG$. Então $E \in \overrightarrow{AC}$, pois se $E \notin \overrightarrow{AC}$, novamente teríamos $BC > AC$ (por quê?). Também temos que $E \neq A$ (por quê?). Os triângulos $\triangle ABC$ e $\triangle ABE$ satisfazem as hipóteses $\angle BAC \equiv \angle BAE$, $\overline{AB} \equiv \overline{AB}$ e $\overline{BC} \equiv \overline{BE}$, mas não são congruentes (por quê?).

Exercício 55: Dados os triângulos $\triangle ABC$ e $\triangle DEF$, tais que $\angle BAC$ e $\angle EDF$ sejam retos, $\overline{BC} \equiv \overline{EF}$ e $\angle ABC \equiv \angle DEF$, mostre que $\triangle ABC \equiv \triangle DEF$.

Solução e/ou Sugestão: Use LAAo.

Exercício 56: Dados $A \neq B$, seja $M \in \overline{AB}$ o ponto médio e seja r contendo M e perpendicular a r_{AB} e seja P um ponto qualquer. Mostre que $AP = BP$ se, e somente se, $P \in r$. (Isto é, a mediatriz do segmento $\overline{AB}$ é o conjunto dos pontos do plano equidistantes de A e B.)

Solução e/ou Sugestão: Mostre que se $P \in r_{AB}$ então $P = M \in r$ e se $P \notin r_{AB}$, desça uma perpendicular a r_{AB} passando por P, seja $N \in r_{AB}$ o pé da perpendicular. Mostre que $\triangle PNA \equiv \triangle PNB$ e conclua que $N = M$ e, portanto $P \in r$.

Exercício 57: Seja $\overrightarrow{BD}$ a bissetriz de $\angle ABC$ e sejam $E \in \overrightarrow{BA}$ e $F \in \overrightarrow{BC}$ os pés das perpendiculares passando por D. Mostre que $DE = DF$.

Exercício 58: Mostre que $\triangle ABC$ é isósceles se, e somente se, quaisquer duas das seguintes figuras são colineares:

(a) uma mediana de $\triangle ABC$;

(b) uma altura de $\triangle ABC$;

(c) uma mediatriz de $\triangle ABC$;

(d) uma bissetriz de $\triangle ABC$.

Solução e/ou Sugestão: São seis casos a serem considerados, (a) e (b), ou (a) e (c), ou etc. Por exemplo, seja M o ponto médio de $\overline{BC}$ e suponha que a mediana $\overline{AM}$ também é uma altura. Por LAL, $\triangle AMB \equiv \triangle AMC$, etc.

3.4 Circunferências

Dado um ponto C e um número real $r > 0$, o conjunto $\mathbb{C} = \{P : d(P, C) = r\}$ é chamado de **circunferência**, sendo C chamado de seu **centro** e r o seu **raio**. Se $A, B \in \mathcal{C}$ são tais que $A - C - B$, então o segmento $\overline{AB}$ é chamado de **diâmetro** de $\mathbb{C}$ e $\overline{CA}$ de **segmento radial** ou, por um abuso de linguagem, também chamaremos de **raio** de $\mathbb{C}$; o **interior** de $\mathbb{C}$ é o conjunto $\mathsf{int}\,(\mathbb{C}) = \{P : d(P, C) < r\}$; o **exterior** de $\mathbb{C}$ é o conjunto $\mathsf{ext}\,(\mathbb{C}) = \{P : d(P, C) > r\}$. Vamos estudar algumas propriedades de circunferências usando apenas os postulados até agora listados (isto é, até o LAL).

NOTAÇÃO: Caso precisemos especificar o centro e o raio de $\mathbb{C}$, escreveremos $\mathbb{C}_{C,r}$.

Exercício 59: Mostre que o conjunto $\mathbb{A} = \{(x, y) \in \mathbb{H} : x^2 + (y - 5)^2 = 16\}$ é a circunferência de centro $(0, 3)$ e raio $\ln 3$ na geometria hiperbólica. Ou seja, a circunferência hiperbólica coincide com a euclideana, mas com seu centro deslocado para baixo. (Para isto, tome um ponto $(a, b) \in \mathbb{A}$ e mostre que $d((a, b), (0, 3)) = \ln 3$; divida em casos $a = 0$ e $a \neq 0$; neste último, ache $r_{p,r}$ tal que $(a, b) \in r_{p,r}$ e $(0, 3) \in r_{p,r}$, para calcular a distância; não esqueça de usar a equação $x^2 + (y - 5)^2 = 16$ para o ponto (a, b).)

Exercício 60: Esboce a circunferência de centro $(0, 0)$ e raio 1 na geometria do taxista. (Mostre que a equação que a define é $|x| + |y| = 1$.)

Exercício 61: Verifique que a circunferência de centro $(-1, 0)$ e raio 2 no plano de Moulton é descrita por $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x + 1)^2 + y^2 = 4$, se $x \leq 0$ ou $y \leq 0$ e $4x + 8 = \sqrt{(x + 2)^2 + 4y^2} + \sqrt{x^2 + y^2(2 - x)^2}$, se $x > 0$ e $y > 0\}$.

Exercício 62: Voltando às geometrias que satisfazem LAL, dados três pontos P, Q e R não colineares e tais que as mediatrizes de $\overline{PQ}$ e $\overline{QR}$ se encontram, mostre que existe uma única circunferência $\mathbb{C}$ contendo estes pontos.

Solução e/ou Sugestão: Seja C o ponto de encontro das mediatrizes e $r = d(C, P)$. Por congruênciade triângulos (quais?), $CP = CQ = CR$ e, portanto $P, Q, R \in \mathbb{C} = \mathbb{C}_{C,r}$. Para mostrar a unicidade de $\mathbb{C}$, suponha que

$P, Q, R \in \mathbb{C}_{D,s}$, para um ponto D e um número real $s > 0$. Sejam M o ponto médio de $\overline{PQ}$ e N o ponto médio de $\overline{QR}$. Então, por congruências de triângulos (quais?), $\overline{DM}$ é perpendicular a $\overline{PQ}$ e $\overline{DN}$ é perpendicular a $\overline{QR}$. Portanto $D = C$ e $s = r$ (por quê?).

Exercício 63: Mostre que se A e B são dois pontos da circunferência $\mathbb{C}_{C,r}$, mostre que C está na mediatriz de $\overline{AB}$.

Exercício 64: Mostre que uma circunferência $\mathbb{C}$ pode ser **circunscrita** num triângulo $\triangle ABC$ (isto é, seus vértices A, B e C estão em $\mathbb{C}$) se, e somente se, suas mediatrizes se encontram num ponto (e este ponto é chamado de **circuncentro** de $\triangle ABC$). Observe que na geometria hiperbólica existem triângulos em que isto não acontece.

Exercício 65: Mostre que $\mathsf{int}\,(\mathbb{C}_{C,r})$ é convexo. (Para isto, sejam $A, B \in \mathsf{int}\,(\mathbb{C}_{C,r})$, $A \neq B$, e seja $D \in \overline{AB}$; mostre que $D \in \mathsf{int}\,(\mathbb{C}_{C,r})$; considere dois casos: $C \in \overline{AB}$ e compare distâncias; $C \notin \overline{AB}$ e considere os triângulos $\triangle ABC$ e $\triangle ABD$ e compare os lados.)

Uma linha r é dita uma **tangente** à circunferência $\mathbb{C}$ se $r \cap \mathbb{C}$ contém um único ponto.

Exercício 66: Mostre que se $A \in \mathbb{C}$ e C é o centro de $\mathbb{C}$, então a linha r perpendicular a $\overline{CA}$ e passando por A é uma tangente a $\mathbb{C}$. (Para isto, mostre que se $B \in r$ e $B \neq A$, então $CB > CA$.)

Exercício 67: Uma linha r é dita uma **linha secante** de $\mathbb{C}$, se ela intersecta $\mathbb{C}$ em mais de um ponto. Mostre que neste caso r encontra $\mathbb{C}$ em exatamente dois pontos A e B. (Separe em dois casos: r contém o centro e r não contém o centro.)

Exercício 68: Mostre que se r é uma tangente à circunferência $\mathbb{C}$ passando pelo ponto $A \in \mathbb{C}$, então r é perpendicular a $\overline{AC}$, sendo C o centro de $\mathbb{C}$.

Exercício 69: Mostre que para qualquer triângulo $\triangle ABC$, existe uma única circunferência $\mathbb{C}$ **inscrita** em $\triangle ABC$ (isto é, $\mathbb{C}$ é tangente aos três lados de $\triangle ABC$). (Mostre que o centro desta circunferência, chamado de **incentro** de $\triangle ABC$, é o ponto de encontro das bissetrizes de $\triangle ABC$.)

Exercício 70: Seja $f : r \to \mathbb{R}$ uma régua e $P \notin r$ um ponto. Seja $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a função definida por $h(x) = d(P, Q)$, sendo que $Q \in r$ e $f(Q) = x$. Mostre que h é contínua.

Solução e/ou Sugestão: Precisamos mostrar que para cada $x \in \mathbb{R}$, dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que, para todo $t \in \mathbb{R}$ tal que $0 < |t| < \delta$, temos $|h(x + t) - h(x)| < \varepsilon$. (Lembre-se que isto é a definição de continuidade de uma função.)

Sejam $x \in \mathbb{R}$, $Q \in r$, tal que $f(Q) = x$, $\varepsilon > 0$, $R, S \in r$ tais que $R - Q - S$ e $d(R, Q) = d(S, Q) = \varepsilon$. Se $T \in \mathsf{int}\,(\overline{RS})$, então $d(T, Q) < \varepsilon$ (Q é o ponto médio de $\overline{RS}$). Pela desigualdade triangular aplicada aos pontos P, Q e T, temos $PQ+TQ \geq PT$ e $PT+TQ \geq PQ$. Destas duas desigualdades obtemos $PT - PQ \leq TQ$ e $PQ - PT \leq TQ$, donde segue que $|PQ - PT| \leq TQ$. Traduzindo isto em termos da função h, temos $|h(Q)-h(T)| < d(T, Q)$. Seja $t = f(T)-f(Q)$; então $f(T) = x+t$ e $d(T, Q) = |t|$; portanto $|h(Q)-h(T)| < |t|$. Se fizermos $\delta = \varepsilon$, obtemos que se $|t| < \delta = \varepsilon$ então $|h(Q) - h(T)| < \varepsilon$, como queríamos mostrar.

Exercício 71: Dados A, B e C não colineares e tais que $r_{AC} \perp r_{AB}$, e dado $r \in \mathbb{R}$ tal que $d(A, C) < r$, mostre que existe um ponto $D \in \overrightarrow{AB}$ tal que $d(C, D) = r$. (Para isto, seja $E \in \overrightarrow{AB}$ tal que $d(A, E) = r$; mostre que $d(C, E) > r$; use a função do exercício anterior para obter o resultado desejado; lembre-se do Teorema do Valor Intermediário, que diz que se $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ é contínua, e $f(a) < f(b)$, se $f(a) \leq r \leq f(b)$ então existe $c \in [a, b]$ tal que $f(c) = r$.)

Exercício 72: Mostre que se r contém algum ponto do interior da circunferência $\mathbb{C}$, então r é uma linha secante de $\mathbb{C}$. (Para isto, desça uma perpendicular do centro C de $\mathbb{C}$ a r; seja A o pé da perpendicular; use o exercício acima.)

Exercício 73: Mostre que dada a circunferência $\mathbb{C} = \mathbb{C}_{C,r}$ e $P \in \mathsf{ext}\,(\mathbb{C})$, então existem exatamente duas linhas passando por P e tangentes a $\mathbb{C}$.

Solução e/ou Sugestão: Seja A o ponto de interseção entre o segmento $\overline{PC}$ e a circunferência $\mathbb{C}$. Seja $s = d(P,C)$; observe que $s > r$. A linha r perpendicular a $\overline{PC}$ pelo ponto A contém o ponto A, que está no interior de $\mathbb{D} = \mathbb{C}_{C,s}$ e, portanto intersecta $\mathbb{D}$ em exatamente dois pontos R e S. Seja B o ponto de interseção de $\mathbb{C}$ e $\overline{CR}$ e D o ponto de interseção de $\mathbb{C}$ e $\overline{CS}$. Por LAL, $\triangle CBP \equiv \triangle CDP \equiv \triangle CAR$ (por quê?). Portanto $r_{PB} \perp \overline{CB}$ e $r_{PD} \perp \overline{CD}$, ou seja, r_{PB} e r_{PD} são tangentes a $\mathbb{C}$ e são duas linhas distintas.

Vamos mostrar agora que não existe outra linha tangente a $\mathbb{C}$, passando por P. Para isto, observe que se $X \in \mathbb{C}$, $X \neq A$ e $X \neq B$, então $X \in \mathsf{int}\,(\angle BPD)$ (por quê?). Portanto, se r contém P mas não intersecta $\mathsf{int}\,(\angle BPD)$, então também não intersecta $\mathbb{C}$. Se r intersecta $\mathsf{int}\,(\angle BPD)$, pelas barras cruzadas, r intersecta $\overline{BD}$, num ponto F tal que $B - F - D$. Mas $F \in \mathsf{int}\,(\mathbb{C})$ (por quê?) e, portanto r é uma linha secante de $\mathbb{C}$. Portanto, só r_{PB} e r_{PD} são tangentes a $\mathbb{C}$.

Exercício 74: Sejam $\triangle ABC$ e $\triangle DEF$ dois triângulos retângulos, com ângulos retos nos vértices A e D, respectivamente, tais que $BC = EF$, $AB > DE$. Mostre que $AC < DF$.

Solução e/ou Sugestão: Sejam $G \in \overrightarrow{DE}$ e $H \in \overrightarrow{DF}$ tais que $\triangle ABC \equiv \triangle DGH$. Como $AB > DE$, temos que $D - E - G$. Queremos mostrar que $D - H - F$ e, portanto $AC = DH < DF$. Para isto, vamos mostar que tanto $H = F$ quanto $D - F - H$ levam a uma contradição. Suponha que $H = F$; como $\angle DEH$ é agudo (por quê?), o ângulo suplementar $\angle GEH$ é obtuso e, portanto é o maior ângulo de $\triangle GEH$, o que implica que o lado oposto $\overline{GH}$ é o maior dos lados de $\triangle GEH$. Mas isto contradiz o fato que $GH = GF = BC = EF$. Se $D - F - H$, usando o triângulo $\triangle GFH$, pelo mesmo tipo de argumentação, obtemos uma contradição (como?).

Exercício 75: Dada a linha r, $A \in r$, $r > 0$ e H_1, um dos lados de r, seja h a função $h(x) = d(P,X)$, sendo que $X \in r$ é tal que $f(X) = x$, sendo $f : r \to \mathbb{R}$ uma régua de r tal que $f(A) = 0$ e $P \in \mathbb{C} = \mathbb{C}_{A,r}$ está em H_1 ou em r e também na linha perpendicular a r, passando por X. Mostre que o domínio de h é o intervalo fechado $[-r, r]$ e que h é contínua neste intervalo.

Solução e/ou Sugestão: Se $P \in \mathbb{C}$, $P \notin r$, e X é o pé da perpendicular a r passando por P, então X está no interior de $\mathbb{C}$ (por quê?) e, portanto,

$|f(X)| = |f(X) - f(A)| = d(X, A) < r$. Se $P \in \mathbb{C} \cap r$, então $|f(P)| = r$; finalmente, se $X \in r$ e $d(X, A) > r$, então a linha perpendicular a r e contendo X não intersecta a circunferência $\mathbb{C}$. Portanto o domínio de h é $[-r, r]$. Sejam $B, C \in r$ tais que $f(B) = -r$ e $f(C) = r$.

Para mostrar que h é contínua em cada $x \in [-r, r]$, dividiremos em dois casos, a saber, $-r \leq x \leq 0$ e $0 \leq x \leq r$.

Consideremos o caso em que $-r \leq x \leq 0$. Observe que se $-r \leq t < u \leq 0$, então $h(t) < h(u)$, pois se $T, U \in r$ são tais que $f(T) = t$, $f(U) = u$, sejam $P, Q \in \mathbb{C} \cap H_1$, tais que $\overline{PT} \perp r$ e $\overline{QU} \perp r$. Pelo exercício anterior, considerando os triângulos retângulos $\triangle ATP$ e $\triangle AUQ$, temos que $TP < UQ$ (por quê?). Portanto $h(t) = d(T, P) < d(U, Q) = h(u)$. Por outro lado, dado $s \in \mathbb{R}$, tal que $0 = h(-r) < s < h(0) = r$, existe $X \in r$ tal que $h(x) = s$, pois se $D \in H_1$ é tal que $\overline{DA} \perp r$ e $d(D, A) = s$, seja $X \in \overrightarrow{AB}$ tal que $d(X, D) = r$ (por quê tal ponto existe?). Então, considerando o triângulo retângulo $\triangle DAX$, temos que $AX < DX = AB$ (por quê?), ou seja, $B - X - A$. Seja $R \in \mathbb{C} \cap H_1$ tal que $\overline{RX} \perp r$. Por LAL, $\triangle DAX \equiv \triangle RXA$ e, portanto $h(x) = d(X, R) = s$, sendo $x = f(X)$. Ou seja, provamos que h é estritamente crescente em $[-r, 0]$ e que, para cada $s \in [0, r] = [h(-r), h(0)]$, existe algum $x \in [-r, 0]$, tal que $h(x) = s$. Vamos usar isto para mostrar que h é contínua em cada $x \in [-r, 0]$.

Primeiro, consideremos $x \in]-r, 0[$. Dado $\varepsilon > 0$, sejam $a, b \in]-r, 0[$, $a < h(x) < b$, $|h(x) - a| < \varepsilon$, $|h(x) - b| < \varepsilon$ e $t, u \in]-r, 0[$, tais que $h(t) = a$ e $h(u) = b$. Então, como provamos que h é crescente em $[-r, 0]$, temos que $t < x < u$. Seja $\delta = \min\{|x - a|, |x - b|\}$. Então se $|x - w| < \delta$, temos que $a < w < b$, e portanto, $|h(x) - h(w)| < \max\{|h(x) - a|, |h(x) - b|\} < \varepsilon$ (por quê?).

Ficam para os leitores tratarem dos casos em que $x = -r$, $x = 0$ e $x \in [0, r]$.

Proposição 17 *Sejam dados $0 < r, s < d(A, B) < r + s$. Então as circunferências $\mathbb{A} = \mathbb{C}_{A,r}$ e $\mathbb{B} = \mathbb{C}_{B,s}$ se encontram em dois pontos.*

Demonstração: Escolhemos um lado H_1 de r e definimos funções $h_{\mathbb{A}} : [-r, r] \to \mathbb{R}$ e $h_{\mathbb{B}} : [b - s, b + s] \to \mathbb{R}$ (com domínio deslocado de $b = f(B)$, sendo f uma régua de r tal que $f(A) = 0$ e $f(B) > 0$), $h_{\mathbb{A}}(x) = d(X, P)$, sendo $x = f(X)$, $P \in \mathbb{A} \cap (H_1 \cup r)$ e $\overline{PX} \perp r$ e $h_{\mathbb{B}}(y) = d(Y, Q)$, sendo $y =$

$f(Y)$, $Q \in \mathbb{B} \cap (H_1 \cup r)$ e $\overline{QY} \perp r$, como no exercício anterior. Como $0 < r, s < d(A, B) = b < r + s$, temos $b - s < r$, ou seja, a função $h(x) = h_{\mathbb{A}}(x) - h_{\mathbb{B}}(x)$ está definida no intervalo $[b - s, r]$. Neste intervalo, $h_{\mathbb{A}}$ é decrescente e $h_{\mathbb{B}}$ é crescente (por quê?). Temos que $h(b-s) = h_{\mathbb{A}}(b-s) - h_{\mathbb{B}}(b-s) = h_{\mathbb{A}}(b-s) > 0$ e que $h(r) = h_{\mathbb{A}}(r) - h_{\mathbb{B}}(r) = -h_{\mathbb{B}}(r) < 0$. Como h é contínua (pois é diferença de duas funções contínuas) e muda de sinal, existe $x \in [b - s, r]$, tal que $h(x) = 0$. Se $x = f(X)$, $X \in r$, então os pontos $P \in \mathbb{A} \cap H_1$ e $Q \in \mathbb{B} \cap H_1$, tais que $\overline{PX} \perp r$ e $\overline{QX} \perp r$ são tais que $d(P, X) = d(Q, X)$. Portanto $P = Q$. O outro ponto de encontro de $\mathbb{A}$ e $\mathbb{B}$ é o ponto $R \in r_{PX}$ tal que $P - X - R$ e $PX = XR$ (por quê?). □

Observação: O resultado anterior descreve uma propriedade importante do instrumento de desenho que traça circunferências, que é o **compasso**. De certo modo, podemos dizer que uma circunferência é uma *curva contínua*. Sua utilidade será explorada a seguir.

3.5 Construções com Régua e Compasso I

Um ponto importante em geometria, principalmente em aplicações práticas, são construções com réguas não graduadas e compassos. Alguns dos problemas mais famosos de tais tipos de construções são construções de polígonos regulares (isto é, todos os lados são congruentes e todos os ângulos são congruentes). Muitas das construções são válidas apenas na geometria analítica ou na geometria hiperbólica e outras são impossíveis. Por exemplo, na geometria analítica, o matemático francês E. Galois descobriu um critério geral de construtibilidade, estudado em cursos sobre a *Teoria de Galois* (por exemplo, Álgebra III do bacharelado). Vamos apenas descrever algumas construções possíveis comuns a todas as geometrias em que valem os postulados enunciados até agora (até LAL).

ATENÇÃO: Nesta seção, descrever as construções usando apenas uma régua não graduada e um compasso. Por exemplo, para construir uma linha, contruir dois pontos dela. Descrever as construções e mostrar que são corretas.

Exercício 76: (Construção de Triângulos) Dados $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a > 0$, $b > 0$, $c > b$ e $a < c < a + b$, mostre que existe um triângulo $\triangle ABC$, tais que seus lados medem a, b e c. (Para isto, seja r uma linha, $A, B \in r$ dois pontos tais que $d(A, B) = c$ e seja H_1 um dos lados de r. Sejam $\mathbb{A} = \mathbb{C}_{A,b}$ e $\mathbb{B} = \mathbb{C}_{B,a}$ as circunferências de centros A e B e raios b e a, respectivamente; etc.)

Exercício 77: (Construção de Perpendiculares I) Dada uma linha r e um ponto $P \in r$, construir com compasso e régua uma linha $r_{AP} \perp r$. (Para achar um ponto A tal que $r_{AP} \perp r$, seja $r \in \mathbb{R}$, $r > 0$, sejam $B, C \in r$, tais que $B - P - C$ e $B, C \in \mathbb{C}_{P,r}$; seja $A \in \mathbb{C}_{B,2r} \cap \mathbb{C}_{C,2r}$; por quê tal A existe e $r_{AP} \perp r$?)

Exercício 78: (Construção de Perpendiculares II) Dada uma linha r e um ponto $P \notin r$, construir com compasso e régua uma linha $r_{AP} \perp r$. (Escolha um ponto $C \in r$ e trace a circunferência de centro P, contendo C, etc.)

Exercício 79: Dado o segmento $\overline{AB}$, construir com régua não graduada e compasso o ponto médio de $\overline{AB}$.

Exercício 80: Dado o triângulo $\triangle ABC$, achar o ponto D tal que $\square ABCD$ seja um quadrilátero convexo com $CD = AB$ e $AD = BC$.

Exercício 81: Dado o ângulo $\angle AOB$, achar sua bissetriz.

Observação: Nos *Elementos* de Euclides, os instrumentos de desenho são uma régua não graduada e um compasso que colapsa (se o tiramos do papel, perdemos sua abertura). Portanto só podemos construir uma circunferência se conhecermos seu centro e um ponto dela. Com isto, não é imediato construir um ponto B na semi-reta $\overrightarrow{AP}$ tal que $\overline{AB}$ seja congruente a um segmento $\overline{CD}$ dado. Por isso, as três primeiras Proposições dos *Elementos*, descrevem como obter tal segmento. A primeira descreve como obter um triângulo equilátero $\triangle ABC$, conhecendo seu lado $\overline{AB}$; a segunda descreve como obter um segmento $\overline{AB}$, dado o ponto A e congruente ao segmento $\overline{CD}$ também dado; por fim, a terceira descreve como construir $\overline{AB} \equiv \overline{CD}$, com $B \in \overrightarrow{AP}$, sendo dados $\overline{CD}$ e $\overrightarrow{AP}$. Vamos descrever tais construções no exercício seguinte.

Exercício 82: São dados o segmento $\overline{CD}$ e a semi-reta $\overrightarrow{AP}$. Construir um ponto E tal que $\triangle ACE$ seja equilátero (usando o exercício acima). Com centro em C, traçar a circunferência $\mathbb{A} = \mathbb{C}_{C,r}$, sendo $r = d(C, D)$. Seja G o ponto de encontro entre $\overrightarrow{EC}$ e $\mathbb{A}$ (por tal ponto quê existe e é único?). Seja $\mathbb{B} = \mathbb{C}_{E,s}$, sendo que $s = d(E, G)$. Seja $F \in \overrightarrow{EA} \cap \mathbb{B}$ (por tal ponto quê existe e é único?). Mostre que $\overline{AF} \equiv \overline{CD}$. Seja $\mathbb{D} = \mathbb{C}_{A,t}$, sendo $t = d(A, F)$ e seja $B \in \overrightarrow{AP} \cap \mathbb{D}$. Observe que $\overline{AB} \equiv \overline{CD}$.

3.6 Perpendiculares no espaço

Seja π um plano e r uma reta, tal que seja perpendicular a todas as retas $s > I > \pi$, que tenham um ponto em comum com a reta r. Dizemos neste caso que a reta r é perpendicular ao plano π.

O bom de uma definição é que podemos dizer qualquer coisa. Mas para ser útil, tem que existir o objeto definido.

Exercício 83: Mostre que, dadas duas retas r e s distintas e concorrentes em um ponto P (no espaço), existe um único plano π, tal que $r.I.\pi$ e $s.I.\pi$.

Comecemos com um resultado auxiliar.

Proposição 18 *Seja P um ponto comum às retas r_1 e r_2, distintas e contidas em um plano π. Suponha que s seja uma reta perpendicular a r_1 e a r_2 (necessariamente pelo ponto P). Então a reta s é perpendicular ao plano π.*

Demonstração: Precisamos mostrar que a reta s é perpendicular a todas as retas $r.I.\pi$ que contêm o ponto P.

Sejam $A, B.I.r_1$, $C, D.I.r_2$ e $E, F.I.s$, pontos tais que $A-P-B$, $C-P-D$, $E-P-F$ $\overline{AP} \equiv \overline{PB} \equiv \overline{CP} \equiv \overline{PD} \equiv \overline{EP} \equiv \overline{PF}$. Por LAL, $\triangle APC \equiv \triangle BPD$ e $\triangle APD \equiv \triangle BPC$. Por LLL, $\triangle ACE \equiv \triangle ACF \equiv \triangle BDE \equiv \triangle BDF$, e $\triangle ADE \equiv \triangle ADF \equiv \triangle BCE \equiv \triangle BCF$.

Dado que já sabemos que $s \perp r_1, r_2$, seja $r.I.\pi$ uma outra reta, tal que $s \perp r$.

Consideremos o caso em que existem pontos $G \in \overline{AC}$ e $H \in \overline{BD}$, tais que $G, H.I.r$. Tais pontos existem pelo Teorema das Barras Transversais.

Por ALA, temos que $\triangle APG \equiv \triangle BPH$. Por LAL, $\triangle AGE \equiv \triangle BHE$. Por fim, pelo critério LLL, $\triangle EPG \equiv \triangle EPH$. Isto quer dizer que $s \perp r$. $\square$

Agora provemos a existência de retas perpendiculares a planos.

Proposição 19 *Dado um plano π e um ponto $P.I.\pi$, existe uma reta r perpendicular ao plano π, tal que $P.I.r$.*

Demonstração: Sejam $r_j.I.\pi$, tal que $P.I.r_j$, para $j = 1, 2$ e $r_1 \perp r_2$.

Seja $\pi' \neq \pi$ um plano, tal que $r_1.I.\pi'$ (exercício: por que existe?). Seja $r_3.I.\pi'$, tal que $P.I.r_3$ e r_3 seja perpendicular a r_1 (observe-se que r_3 não precisa ser perpendicular ao plano π.

Seja π'' o único plano, tal que $r_2.I.\pi''$ e $r_3.I.\pi''$. Observe que, como $r_1 \perp r_2$ e $r_1 \perp r_3$, a reta r_1 é perpendicular ao plano π''.

Seja s a reta de π'', perpendicular à reta r_2, pelo ponto P.

Afirmamos que s é perpendicular ao plano π. Mas isso decorre do fato que $s \perp r_2$ e $s \perp r_1$ (esta última alegação decorre do fato acima observado de que $r_1 \perp \pi''$). $\square$

Agora consideremos o caso em que P esteja fora de π.

Proposição 20 *Dado um plano π e um ponto P fora de π, existe uma reta r perpendicular ao plano π, tal que $P.I.r$.*

Demonstração: Seja $Q.I.\pi$ um ponto qualquer e s a reta perpendicular a π e contendo o ponto P (dada pela proposição anterior). Se já ocorrer que $P.I.s$, já obtivemos o que esperávamos. Caso contrário, seja π' o único plano contendo r e π. Seja r_1 a reta comum aos dois planos. Seja s a reta em π', perpendicular a r_1 e contendo o ponto P.

Afirmamos que $s \perp \pi$, o que será deixado como exercício (tome uma reta r_2 em π, perpendicular a r_1 pelo ponto de encontro de r_1 e s e construa triângulos convenientes). $\square$

Exercício 84: Sejam π_1 e π_2 dois planos distintos, contendo a reta r em comum. Suponha que exista reta $r_1.I.\pi_1$, tal que $r_1 \perp \pi_2$. Mostre que se $s.I, \pi_1$ e $s \perp r$, então $s \perp \pi_2$.

3.7 Ângulos Diedrais

Sejam π_1 e π_2 dois planos distintos, contendo a reta r em comum. Seja H_1 um dos lados do plano π_1 em relação à reta r e H_2 um dos lados de π_2 em relação a r. Chamamos o conjunto composto dos pontos de r, H_1 e H_2 de **ângulo diedral**. Queremos associar a essa figura uma medida de ângulo. Comecemos primeiramente com um resultado preliminar.

Proposição 21 *Sejam $A, B \in H_1$, $C, D \in H_2$ e $P, Q \in r$, tais que $\overrightarrow{PA}$, $\overrightarrow{PC}$, $\overrightarrow{QB}$ e $\overrightarrow{QD}$ sejam perpendiculares à reta r. Então $\angle APC \equiv \angle BQD$.*

Demonstração: Acompanhe a demonstração olhando para a figura 3.1.

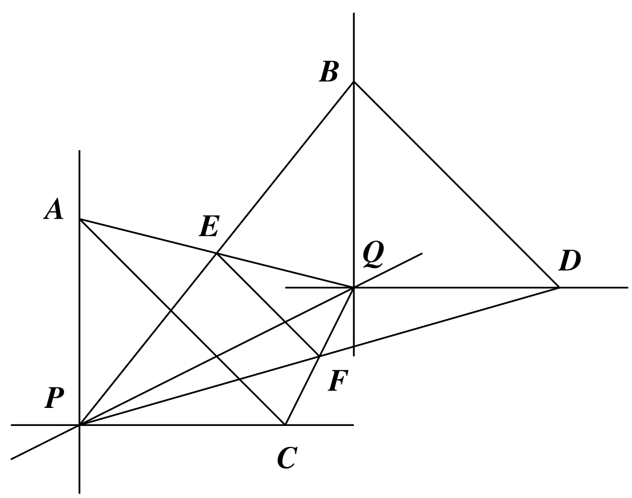

Figura 3.1: Invariância na medida de ângulos diedrais.

Podemos supor que os pontos escolhidos satisfaçam as congruências $\overline{PA} \equiv \overline{PC} \equiv \overline{QB} \equiv \overline{QD}$.

Vamos comparar os diversos triângulos.

Por LAL, $\triangle PAQ \equiv \triangle QBP \equiv \triangle PCQ \equiv \triangle QDP$.

Os segmentos $\overline{PB}$ e $\overline{QA}$ encontram-se em seu ponto médio E e os segmentos $\overline{PD}$ e $\overline{QC}$ encontram-se em seu ponto médio F.

Por LLL, $\triangle PEF \equiv \triangle QEF$, que são isósceles. Assim, $\angle EPF \equiv \angle EQF$.

Por LAL, $\triangle BPD \equiv \triangle AQC$.

Por fim, por LLL, $\triangle APC \equiv \triangle BQD$, o que implica que $\angle APC \equiv \angle BQD$. $\square$

Exercício 85: sejam π_1 e π_2 dois planos distintos, contendo uma reta r em comum. Quantos ângulos diedrais podem ser formados com esses dados?

3.8 Esferas

Uma esfera no espaço, de centro O e raio $r > 0$, é o conjunto $\mathcal{S} = \{P : d(P, O) = r\}$. O conjunto $\mathsf{int}\,(\mathcal{S}) = \{P : d(O, P) < r\}$ é o interior da esfera.

Exercício 86: Mostre que o interior de uma esfera é um conjunto convexo.

Uma reta r (e, respectivamente, um plano π) é **tangente** à esfera $\mathcal{S} = \{P : d(O, P) = r\}$ se existir um único ponto P de $\mathcal{S}$ em r (respectivamente, em π). Essa definição de tangente só é boa devido ao fato que a esfera e seu interior formam um conjunto convexo, tal que o interior do segmento ligando dois pontos da esfera está contido no interior desta. Para conjuntos que não satisfaçam tal condição, essa definição terá que ser mudada!

Exercício 87: Seja P um ponto da esfera $\mathcal{S} = \{P : d(O, P) = r\}$, com $r > 0$. Mostre que o plano π que contém P e é perpendicular à reta ℓ_{OP} é um plano tangente à esfera.

Exercício 88: Seja P um ponto da esfera $\mathcal{S} = \{P : d(O, P) = r\}$, com $r > 0$. Mostre que a reta r que contém P e é perpendicular à reta ℓ_{OP} é uma reta tangente à esfera.

Proposição 22 *Sejam $r > 0$, O um ponto, $\mathcal{S} = \{X : d(X, O) = r\}$ uma esfera, e seja π um plano que contenha pelo menos dois pontos distintos em comum com a esfera $\mathcal{S}$. Então o conjunto dos pontos do plano que também estão nessa esfera é uma circunferência, cujo centro é o ponto P de π, tal que a reta $\ell_{OP} \perp \pi$.*

Demonstração: Seja $P.I.\pi$, tal que a reta $\ell_{OP} \perp \pi$. Seja Q um dos pontos de $\mathcal{S}$ que esteja em π. Como, por hipótese, existem pelo menos dois pontos distintos em π, que estão na esfera, os pontos P e Q são distintos. Considere a circunferência $\mathbb{C}$ em π de centro P e rai $\overline{PQ}$. Para cada ponto R em $\mathbb{C}$, LAL implica que $\triangle OPQ \equiv \triangle OPR$, ou seja, todos os pontos de $\mathbb{C}$ estão em $\mathcal{S}$. Comparando-se lados de triângulos, se Y for um ponto de π no interio0r de $\mathbb{C}$, então $OY < OQ$, e se Y estiver no exterior de $\mathbb{C}$ em π, $OY > OQ$. Assim, nenhum outro ponto do plano π pode estar em $\mathcal{S}$. $\square$

Proposição 23 *Sejam O_1 e O_2 dois pontos distintos, $r_1, r_2 > 0$ dois números reais, tais que $d(O_1, O_2) < r_1 + r_2$. Então as esferas $\mathcal{S}_1 = \{P : d(O_1, P) = r_1\}$ e $\mathcal{S}_2 = \{P : d(O_1, P) = r_2\}$ intersectam-se em uma circunferência, cujo centro está no segmento $\overline{O_1O_2}$.*

Demonstração: Em qualquer plano π que contenha os pontos O_1 e O_2, existem dois pontos P e Q, tais que $d(P, O_1) = r_1$, $d(P, O_2) = r_2$, $d(Q, O_1) = r_1$ e $d(Q, O_2) = r_2$. O ponto de encontro dos segmentos $\overline{O_1O_2}$ e $\overline{PQ}$ será sempre um mesmo ponto R. Seja π_1 o plano perpendicular ao segmento $\overline{O_1O_2}$ e contendo o ponto R.

Daí, a circunferência $\mathbb{C}$, cujos pontos estejam em $\mathcal{S}_1$ (e, portanto, também em $\mathcal{S}_2$) é o conjunto dos pontos comuns a ambas as esferas. $\square$

Exercício 89: Justifique a última afirmação da demonstração acima.

Exercício 90: O que se pode dizer sobre o raio dessa circunferência?

Exercício 91: Mostre que se a reta r contiver um ponto do interior da esfera $\mathcal{S} = \{P : d(O, P) = r\}$, então essa reta contém exatamente dois pontos em comum com a esfera.

Exercício 92: Mostre que se o plano π contiver um ponto no interior da esfera $\mathcal{S} = \{P : d(O, P) = r\}$, então o plano π intersecta a esfera em uma circunferência. Qual é o seu centro?

Exercício 93: Seja $\mathcal{S} = \{P : d(O, P) = r\}$ uma esfera e Q um ponto em seu exterior. Mostre que existe (pelo menos) uma reta tangente à esfera e contendo o ponto Q. Mostre que existe pelo menos um plano tangente à esfera e contendo o ponto Q.

Exercício 94: Seja $\mathcal{S} = \{P : d(O, P) = r\}$ uma esfera e Q um ponto em seu exterior. Seja $\mathcal{C}$ o conjunto dos pontos $P \in \mathcal{S}$, tais que a reta ℓ_{PQ} seja tangente à esfera. Mostre que $\mathcal{C}$ é uma circunferência, cujo centro está no segmento $\overline{OQ}$.