Capítulo 4

Geometria Euclideana

4.1 Introdução

Chamamos de Geometria Euclideana a geometria descrita pelos postulados já enunciados, e mais o chamado *quinto postulado de Euclides*, cujo enunciado (modernizado) é o seguinte:

(O Quinto Postulado de Euclides) Dados $A, B \in \ell_1$, $C, D \in \ell_2$ e $B, C \in \ell_3$, tais que A e D estão do mesmo lado de ℓ_3 e $m(\angle ABC) + m(\angle DCB) < 180$, então ℓ_1 e ℓ_2 se encontram num ponto P no mesmo lado que A em relação a ℓ_3.

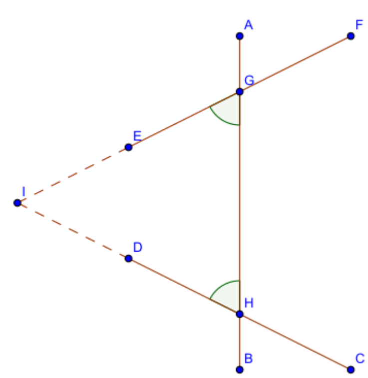

Figura 4.1: O Quinto Postulado de Euclides.

Esse postulado contrasta com os outros no sentido que seu enunciado é um tanto mais complexo que os demais. Por uma questão mais *estética* do que *lógica*, muitos geômetras consideravam que tal enunciado deveria ser derivado de outros mais simples e *de conhecimento imediato*. Mas, durante dois milênios, não se considerou a possibilidade da necessidade desse enunciado (ou de outro equivalente) como novo postulado, havendo diversas tentativas de derivá-lo a partir dos outros postulados de Euclides. Hoje sabemos que essas tentativas estariam fadadas ao fracasso. Entretanto, muitas proposições importantes foram descobertas como frutos desse esforço.

Neste capítulo vamos desenvolver a geometria euclideana, apontando um aspecto um tanto surpreendente: qualquer enunciado que somente valha nessa geometria é, de fato, equivalente ao quinto postulado. Nos próximos capítulos, mostraremos que a negação do quinto postulado, tomada como novo postulado, dá origem à chamada *geometria hiperbólica*. Por um argumento lógico simples, posemos mostrar que todo enunciado válido apenas na geometria hiperbólica é equivalente a esse novo postulado.

4.2 Preliminares

No próximo capítulo estudaremos a teoria das paralelas, em que dois tipos de quadriláteros convexos ocupam um lugar importante. Introduziremos aqui apenas os resultados necessários a este capítulo.

Sejam A, B, C e D quatro pontos distintos, tais que os interiores dos segmentos $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ e $\overline{DA}$ sejam disjuntos. Neste caso, dizemos que um quadrilátero $ABCD$ em um plano π é o conjunto dos pontos $\{P \in \pi : P \in \overline{AB}$, ou $P \in \overline{BC}$, ou $P \in \overline{CD}$, ou $P \in \overline{DA}\}$. Cada um dos segmentos $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ e $\overline{DA}$ é chamado de lado do quadrilátero. Diremos que esse quadrilátero é convexo se para todos os pontos P e Q em lados distintos de $ABCD$, o interior do segmento $\overline{PQ}$ não contém nenhum ponto de $ABCD$.

Um quadrilátero $ABCD$ é chamado de quadrilátero de Saccheri se $\overline{AB} \equiv \overline{CD}$ e oa ângulos $\angle ABC$ e $\angle BCD$ são retos.

Exercício 95: Seja $ABCD$ um quadrilátero de Saccheri. Mostre que se E for o ponto médio de $\overline{AB}$ e F for o ponto médio de $\overline{BC}$, então o segmento $\overline{EF}$ é perpendicular aos lados $\overline{AD}$ e $\overline{BC}$.

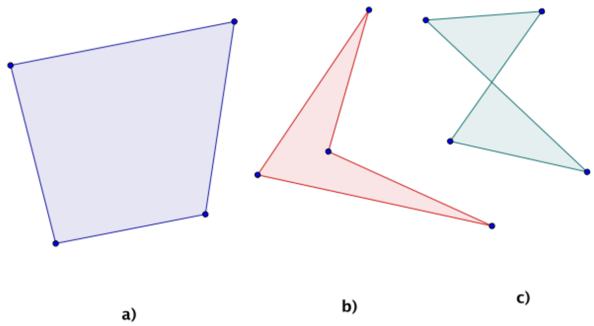

Figura 4.2: a) quadrilátero convexo; b) quadrilátero côncavo; c) não é quadrilátero.

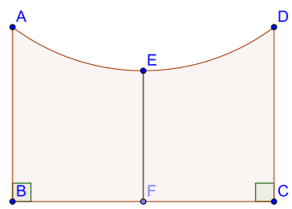

Figura 4.3: Quadrilátero de Saccheri. O lado $\overline{AD}$ foi desenhado curvo, para evitar a ilusão de que sejam retângulos.

Com a notação do exercício, o quadrilátero $EFCCD$ é chamado de quadrilátero de Lambert.

4.3 Quadriláteros e Paralelismo

Vamos provar várias formas equivalentes do chamado postulado das paralelas. É possível mostrar que toda proposição que pode ser provada com este postulado, mas não sem ele, na verdade é equivalente a este postulado. Por exemplo, toda a teoria de semelhança de triângulos depende deste postulado e, portanto, todas as proposições desta teoria serão equivalentes ao postulado.

Exercício 96: Mostre que são equivalentes

(a) (O Postulado de Euclides) Dados $A, B \in \ell_1$, $C, D \in \ell_2$ e $B, C \in \ell_3$, tais que A e D estão do mesmo lado de ℓ_3 e $m(\angle ABC) + m(\angle DCB) < 180$, então ℓ_1 e ℓ_2 se encontram num ponto P no mesmo lado que A em relação a ℓ_3.

(b) (Euclides, *Elementos*, Livro I, Prop. 29) Se A e D são pontos do mesmo lado de r_{BC} e r_{AB} é paralela a r_{CD}, então $m(\angle ABC) + m(\angle DCB) = 180$.

(c) (Euclides, *Elementos*, Livro I, Prop. 30) Para todas as linhas ℓ_1, ℓ_2 e ℓ_3, se ℓ_1 é paralela a ℓ_2 e ℓ_2 é paralela a ℓ_3, então ℓ_1 é paralela a, ou coincide com, ℓ_3.

(d) (Euclides, *Elementos*, Livro I, Prop. 31: O Postulado de Playfair) Dada uma linha ℓ e um ponto $P \notin \ell$, existe uma única $\ell' \ni P$ paralela a ℓ.

(e) Existem uma linha ℓ e um ponto $P \notin \ell$, tal que existe uma única $\ell' \ni P$ paralela a ℓ.

(f) (Euclides, *Elementos*, Livro I, Prop. 32) Para todo $\triangle ABC$ vale $m(\angle A) + m(\angle B) + m(\angle C) = 180$.

(g) Existe um $\triangle ABC$ tal que vale $m(\angle A) + m(\angle B) + m(\angle C) = 180$.

(h) Todo quadrilátero de Saccheri é um **retângulo** (isto é, todos seus ângulos internos são retos).

(i) Existe um retângulo.

(j) Todo quadrilátero de Lambert é um retângulo.

(k) Para todo quadrilátero convexo $\square ABCD$, vale $m(\angle A) + m(\angle B) + m(\angle C) + m(\angle D) = 360$.

(l) Existe um quadrilátero convexo $\square ABCD$, tal que $m(\angle A) + m(\angle B) + m(\angle C) + m(\angle D) = 360$.

(m) (Teorema de Tales) Se $C \notin \overline{AB}$ mas C está na circunferência de diâmetro $\overline{AB}$, então $\angle ACB$ é reto.

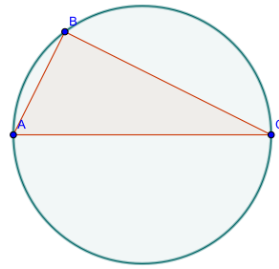

Figura 4.4: Triângulo retângulo inscrito em uma circunferência.

(n) Se $\angle ACB$ é reto, então C está na circunferência de diâmetro $\overline{AB}$.

(o) Existem A, $B \neq A$ e $C \notin \overline{AB}$ tais que $\angle ACB$ é reto e C está na circunferência de diâmetro $\overline{AB}$.

(p) Se $C \notin \overline{AB}$ mas A, B e C estão numa circunferência de centro O e O e C estão do mesmo lado em relação a r_{AB}, então $m(\angle AOB) = 2\,m(\angle ACB)$.

Solução e/ou Sugestão: As equivalências entre (f), (g), (h), (i), (j), (k), (l) e (m) e (n) já foram provadas anteriormente (onde?) e as implicações (d) $\Rightarrow$ (e), (k) $\Rightarrow$ (l), (m) $\Leftrightarrow$ (n) $\Rightarrow$ (o) são fáceis (verifique).

(a) $\Rightarrow$ (b): se A e D são pontos do mesmo lado de r_{BC} e r_{AB} é paralela a r_{CD}, por (a), $m(\angle ABC) + m(\angle DCB) \geq 180$. Mas se $m(\angle ABC) + m(\angle DCB) > 180$ seus suplementares satisfazem a hipótese de (a) e, portanto r_{AB} não pode ser paralela a r_{CD}. Portanto $m(\angle ABC) + m(\angle DCB) = 180$.

(b) $\Rightarrow$ (c): suponhamos que ℓ_1, ℓ_2 e ℓ_3 sejam três linhas distintas, tais que ℓ_1 é paralela a ℓ_2 e ℓ_2 é paralela a ℓ_3. Sejam $B \in \ell_1$, $C \in \ell_2$ e $E \in \ell_3$ distintos e colineares (por que existem tais pontos?). Então ou $B-C-E$, ou $B-E-C$, ou $C-B-E$. Trataremos apenas o caso em que $B-C-E$, sendo os outros análogos. Sejam $A \in \ell_1$, $D \in \ell_2$ e $F \in \ell_3$ do mesmo lado em relação a r_{BC}. Por (b), $m(\angle ABC) + m(\angle DCB) = 180$ e $m(\angle DCE) + m(\angle FEC) = 180$, e como $m(\angle DCB) + m(\angle DCE) = 180$, $m(\angle ABC) + m(\angle FEC) = 180$, ou seja, ℓ_1 é paralela a ℓ_3 (por quê?).

(c) $\Rightarrow$ (d): sabemos que, dada uma linha ℓ e um ponto $P \notin \ell$, existe pelo menos uma $\ell' \ni P$ paralela a ℓ, por exemplo, se $Q \in \ell$ é tal que $\overline{PQ} \perp \ell$, podemos tomar $\ell' \perp \overline{PQ}$ e $P \in \ell'$. Neste caso, se $\ell'' \ni P$ não é perpendicular

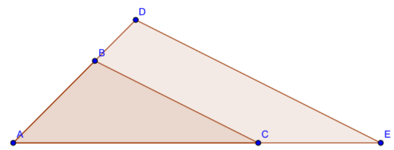

Figura 4.5: Semelhança de triângulos.

a $\overline{PQ}$, então, por (c), ℓ'' não pode ser paralela a ℓ (por quê?). Portanto ℓ' é a única paralela a ℓ e contendo P.

(d) $\Rightarrow$ (a): Sejam A e D pontos do mesmo lado de r_{BC}, e suponha que $m(\angle ABC)+m(\angle DCB)<180$. Por (d), r_{AB} e r_{CD} não podem ser paralelas (por quê?) e portanto se encontram no mesmo lado de r_{BC} em que ocorrem estes angulos alternos internos (por quê?).

(e) $\Rightarrow$ (i): sejam ℓ e $P \notin \ell$, tal que existe uma única $\ell' \ni P$ paralela a ℓ e seja $Q \in \ell$ tal que $\overline{PQ} \perp \ell$. Seja $R \in \ell$, $R \neq Q$ e seja S tal que $\boxed{\mathrm{S}}QPSR$. Então r_{PS} é paralela a ℓ e por (e), $\boxed{\mathrm{S}}QPSR$ é um retângulo (por quê?).

(h) $\Rightarrow$ (d): parecido com o caso (e) $\Rightarrow$ (i). (Faça.)

(o) $\Rightarrow$ (g): Se O é o ponto médio de $\overline{AB}$, compare os ângulos de $\triangle OAC$, $\triangle OBC$ e $\triangle ABC$.

(f) $\Rightarrow$ (p) $\Rightarrow$ (g): compare os ângulos de $\triangle ACB$ e $\triangle AOB$.

4.4 Triângulos e Paralelismo

Exercício 97: (Semelhança de triângulos) Dois triângulos $\triangle ABC$ e $\triangle DEF$, tais que $\angle A \equiv \angle D$, $\angle B \equiv \angle E$ e $\angle C \equiv \angle F$ são ditos **semelhantes**, em símbolos, $\triangle ABC \sim \triangle DEF$.

Mostre que $\triangle ABC \sim \triangle DEF$ se, e somente se, $AB/DE = AC/DF = BC/EF$.

Solução e/ou Sugestão: Temos que $\triangle ABC \equiv \triangle DEF$ se, e somente se, $AB/DE = AC/DF = BC/EF = 1$.

Se $\triangle ABC \not\equiv \triangle DEF$ e $\triangle ABC \sim \triangle DEF$, construindo cópia congruente de $\triangle DEF$, podemos supor que $A = D$, $E \in \overrightarrow{AB}$ e $F \in \overrightarrow{AC}$, são tais que $\triangle ABC \sim \triangle ADE$, mas $\triangle ABC \not\equiv \triangle ADE$. Então $\square BCFE$ é convexo e a soma de seus ângulos é 360 (por quê?). Ou seja, (a) implica o exercício 189 (l), que é equivalente ao exercício 189 (k).

Suponha que $\triangle ABC \sim \triangle DEF$ e que $AB/DE = r \in \mathbb{Q}$, $r \neq 1$. Vamos mostrar que $AB/DE = AC/DF = BC/EF = r$. Escreva $r = m/n$, e sejam $A_0 = A$, $C_0 = A$, $A_{k+1} \in \overrightarrow{AB}$, tal que $A_{k-1} - A_k - A_{k+1}$ e $d(A_k, A_{k+1}) = (1/n)d(A, B)$, $C_{k+1} \in \overrightarrow{AC}$, tal que $\angle AA_kC_k \equiv \angle ABC$ (por que existem tais pontos?). Então $\triangle A_iA_{i+1}C_{i+1} \sim \triangle ABC$ (por quê?). Por indução em n, mostre que $A_kA/A_1A = C_kA/C_1A = k$.

Suponha que $\triangle ABC \sim \triangle DEF$ e que $AB/DE = r \notin \mathbb{Q}$. Aproxime r por $r_n \in \mathbb{Q}$ e use a parte acima.

Exercício 98: Mostre que os seguintes enunciados também são equivalentes ao postulado das paralelas:

(a) Existem dois triângulos $\triangle ABC$ e $\triangle DEF$ semelhantes e não congruentes.

(b) Para todo par de triângulos $\triangle ABC$ e $\triangle DEF$, $\angle A \equiv \angle D$, $\angle B \equiv \angle E$ se, e somente se, $AB/DE = AC/DF = BC/EF$.

(c) Para todo par de triângulos $\triangle ABC$ e $\triangle DEF$, se $\angle A \equiv \angle D$, $\angle B \equiv \angle E$, então $\angle C \equiv \angle F$.

(d) (Homotetia) Dados $\triangle ABC$, um ponto O e $r > 0$, sejam $D \in \overrightarrow{OA}$, $E \in \overrightarrow{OB}$ e $F \in \overrightarrow{OC}$ tais que $OD = r\,OA$, $OE = r\,OB$ e $OF = r\,OC$. Então $AB/DE = AC/DF = BC/EF$.

Solução e/ou Sugestão: Suponha (a) e sejam $\triangle ABC$ e $\triangle DEF$ triângulos semelhantes e não congruentes. Construindo cópia congruente de $\triangle DEF$, podemos supor que $A = D$, $E \in \overrightarrow{AB}$ e $F \in \overrightarrow{AC}$, são tais que $\triangle ABC \sim \triangle ADE$, mas $\triangle ABC \not\equiv \triangle ADE$. Então $\square BCFE$ é convexo e a soma de seus ângulos é 360 (por quê?). Ou seja, (a) implica o exercício 189 (l).

(c) $\Rightarrow$ (a): dado $\triangle ABC$, seja D um ponto tal que $A - D - B$, e seja

$E \in \overline{AC}$, tal que $\angle ADE \equiv \angle ABC$ (por que existe tal ponto?). Por (c), $\triangle ABC \sim \triangle ADE$, mas $\triangle ABC \not\equiv \triangle ADE$.

Pelo exercício anterior, (b) $\Leftrightarrow$ (c) $\Leftrightarrow$ (d) são simples (faça).

Exercício 99: Mostre que os seguintes enunciados também são equivalentes ao postulado das paralelas:

(a) Se $\ell_1 \perp \ell_2$, $\ell_2 \perp \ell_3$ e $\ell_3 \perp \ell_4$, então $\ell_1 \cap \ell_4$ contém pelo menos um ponto.

(b) Se $\angle AOB$ é agudo e $O \notin \ell \perp \overrightarrow{OA}$, então ℓ intersecta $\overrightarrow{OB}$.

(c) Se ℓ_1 e ℓ_2 são concorrentes e distintas e se $\ell_3 \perp \ell_1$ e $\ell_4 \perp \ell_2$, então ℓ_3 e ℓ_4 são concorrentes.

(d) Existe um ângulo $\angle AOB$ agudo, tal que, para todo $P \in \mathsf{int}\,(\angle AOB)$, existe linha $\ell \ni P$ que intersecta ambos os lados do ângulo, mas não o vértice.

(e) Para todo $\triangle ABC$, as suas mediatrizes são concorrentes (o ponto comum às três mediatrizes é o circuncentro).

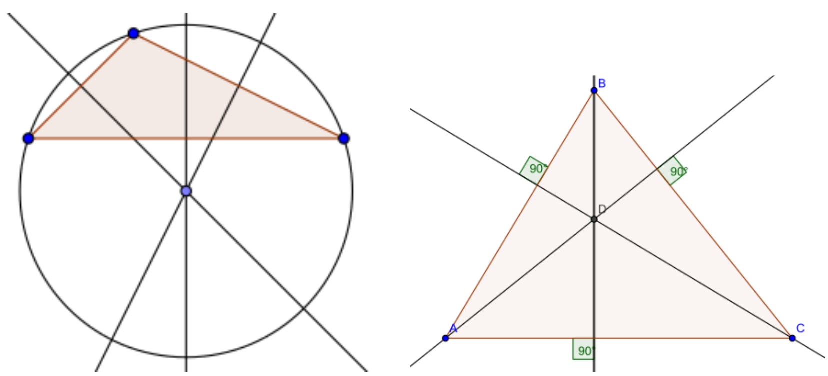

Figura 4.6: O circuncentro e ortocentro de um triângulo.

(f) Todo triangulo pode ser inscrito numa circunferência.

(g) Para todo $\triangle ABC$, as suas alturas são concorrentes (no ponto chamado de **ortocentro** de $\triangle ABC$.

Solução e/ou Sugestão: Primeiro provaremos que o Teorema de Tales (exercício 189 (m)) implica (a). Sejam $\ell_1 \perp \ell_2$, $\ell_2 \perp \ell_3$, $\ell_3 \perp \ell_4$, $A \in \ell_2 \cap \ell_3$, $M \in \ell_1 \cap \ell_2$, $N \in \ell_3 \cap \ell_4$, $B \in \overrightarrow{AM}$, $A - M - B$ e $AM = MB$, $C \in \overrightarrow{AN}$, $A - N - C$ e $AN = NC$. Então $\triangle ABC$ é retângulo em $\angle A$. Pelo Teorema de Tales, A está na circunferência de diâmetro $\overline{BC}$. Se $O \in \overline{BC}$ é o ponto médio, este também é o centro da tal circunferência. Considerando os triângulos $\triangle OAB$ e $\triangle OAC$, que são isósceles, ℓ_1 e ℓ_4 encontram-se em O (por quê?).

(a) $\Rightarrow$ (b): Suponha que não vale (b), ou seja, existe um ângulo $\angle AOB$ agudo e $O \notin \ell \perp \overrightarrow{OA}$, tal que ℓ não intersecta $\overrightarrow{OB}$. Podemos supor que $A \in \ell$. Sejam $C - O - A$, $CO = OA$, e D do mesmo lado que B em relação a r_{OA}. Seja $\ell' \perp r_{OA}$ e $C \in \ell'$. Então ℓ' não encontra $\overrightarrow{OD}$ (por quê?). Se $G \in \ell$ e $H \in \ell'$ são tais que $\boxed{\text{S}}\, AGHC$, então vale a hipótese do ângulo agudo (por quê?). Usando o exercício 186, podemos então encolher um ângulo $\angle A'O'B'$, tal que $m(\angle A'O'B') \leq 45$ e tal que existe $\ell'' \perp \overrightarrow{O'A'}$ que não encontra $\overrightarrow{O'B'}$. Usando o exercício 185, podemos concluir que não vale (a).

(b) $\Rightarrow$ (a): Suponha que não vale (a). Sejam $\ell_1 \perp \ell_2$, $\ell_2 \perp \ell_3$ e $\ell_3 \perp \ell_4$, mas $\ell_1 \cap \ell_4 = \varnothing$. Podemos supor que se $A \in \ell_1 \cap \ell_2$, $B \in \ell_2 \cap \ell_3$ e $C \in \ell_3 \cap \ell_4$, então $\overline{AB} \equiv \overline{BC}$ (por quê?). Portanto, se $D \in \mathsf{int}\,(\angle ABC)$ e $m(\angle ABD) = 45$, então $\ell_3 \cap \overrightarrow{BD} = \varnothing$ (por quê?), e portanto não vale (b).

(b) $\Rightarrow$ (c): podemos supor que $A \in \ell_1 \cap \ell_2$ e que A não esteja nem em ℓ_3 e nem em ℓ_4. Sejam $B \in \ell_1 \cap \ell_3$ e $C \in \ell_2 \cap \ell_4$. Se $m(\angle BAC) = 90$ então (a) implica (c). Se $m(\angle BAC) > 90$ tanto ℓ_3 como ℓ_4 encontram a bissetriz de $\angle BAC$, por (b). Conclua que $\ell_3 \cap \ell_4 \neq \varnothing$. Se $m(\angle BAC) < 90$, por (b), ℓ_3 encontra $\overrightarrow{AC}$, formando um ângulo agudo. Portanto deve encontrar ℓ_4. (Faça os detalhes.)

(d) $\Rightarrow$ (b): Se não valesse (b), como acima exposto, valeria a hipótese do ângulo agudo, portanto, dado $\angle AOB$ agudo, existe ℓ tal que $\alpha = m(\angle AOB)/2$ é o ângulo de paralelismo de ℓ e O. Isto implica que se $\ell' \ni O$ e $\ell' \cap \overrightarrow{OA} \neq \varnothing$, então $\ell' \cap \overrightarrow{OB} = \varnothing$ (por quê?).

(b) $\Rightarrow$ (d), (c) $\Leftrightarrow$ (e) $\Leftrightarrow$ (f) e (c) $\Leftrightarrow$ (g) são simples (faça).

4.5 Triângulos Retângulos e Paralelismo

Exercício 100: Mostre que os seguintes enunciados também são equivalentes ao postulado das paralelas:

(a) (Teorema de Pitágoras) Dado $\triangle ABC$, com $\angle A$ reto, temos $AB^2 + AC^2 = BC^2$.

(b) (Lei dos Cossenos) (Dado o ângulo $\angle AOB$, se for reto, definimos $\cos(\angle AOB) = 0$, se for agudo, fazemos a construção $\triangle POR$, com $d(O, R) = 1$ e $\overline{PR} \perp \overline{OR}$ e definimos $\cos(\angle AOB) = d(O, P)$; se $\angle AOB$ for obtuso, definimos $\cos(\angle AOB) = -\cos(\angle BOC)$, sendo $\angle BOC$ o suplementar de $\angle AOB$.) A Lei dos Cossenos diz: dado $\triangle ABC$, temos $AB^2 - 2\, AB\, AC \cos(\angle BAC) + AC^2 = BC^2$.

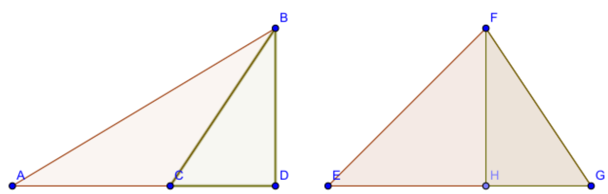

Figura 4.7: Lei dos cossenos.

(c) Dado $\triangle ABC$, com $\angle A$ reto, seja $D \in \overline{BC}$, tal que $\overline{AD} \perp \overline{BC}$, então $AD^2 = BD \cdot DC$.

(d) (Euclides, Prop. I-48) Dado $\triangle ABC$, se $AB^2 + AC^2 = BC^2$, então $\angle A$ é reto.

Solução e/ou Sugestão:

(b) $\Rightarrow$ (a) $\Leftrightarrow$ (c) é simples. (Faça.)

(a) implica um caso da recíproca do Teorema de Tales (exercício 189 (o)). Sejam $B - D - C$, $\overline{BD} \equiv \overline{BC}$, seja A fora de $\overline{BC}$ e tal que $\overline{AD} \perp \overline{BC}$ e $\angle BAC$ seja reto (por que existe tal ponto?). Então $\triangle ABC$ é isósceles (prove que $\overline{AB} \equiv \overline{AC}$) e retângulo em $\angle A$. Por (a), $2\, AB^2 = AB^2 + AC^2 = BC^2 = 4\, BD^2$. No $\triangle ADB$, que é retângulo em $\angle D$, por (a), $AB^2 = AD^2 + BD^2$, donde segue que $\overline{AD} \equiv \overline{BD}$, ou seja, A está na circunferência de diâmetro $\overline{BC}$.

(a) $\Rightarrow$ (b): Das equivalências do exercício 190, concluímos que se $\triangle ABC$ tem $\angle A$ reto, então $\cos(\angle B) = AB/BC$. Vamos mostrar que isto implica (b). Para isto, dado $\triangle ABC$, qualquer, com $\angle A$ agudo; seja $D \in r_{AC}$ tal que $\overline{BD} \perp r_{AC}$. Usando (a) nos triângulos convenientes, obtemos (b).

(a) $\Rightarrow$ (d): Seja D tal que $\angle CAD$ é reto e $\overline{AD} \equiv \overline{AB}$. Por (a), $AB^2 + AD^2 = BD^2$, ou seja $\overline{BD} \equiv \overline{BC}$. Por LLL, $\triangle ABC \equiv \triangle ADC$ e, portanto $\angle BAC$ é reto.

(d) $\Rightarrow$ (a): Dado $\triangle ABC$, com $\angle A$ reto. Seja $d = \sqrt{AB^2 + AC^2}$. Então $d < AB + AC$ e, portanto existe um triângulo $\triangle DEF$ tal que $DE = AB$, $DF = AC$ e $d = d(E, F)$. Por (d), $\angle D$ é reto. Por LAL, $\triangle ABC \equiv \triangle DEF$. Portanto $AB^2 + AC^2 = BC^2$.

Para terminar as equivalências, mostre que o exercício 191(?) (b) implica (d).

4.6 Construções com régua e compasso II

A partir de agora assumimos o postulado das paralelas.

Com isto, valem todas as proposições equivalentes a este postulado, citados na seção anterior.

Dado um segmento $\overline{OE}$ como referência de unidade de medida, dizemos que um ponto A é construtível (com régua e compasso) se o segmento $\overline{OA}$ for obtido de $\overline{OE}$ com um número finito de operações de intersecção de linhas e/ou circunferências determinadas por pontos construtíveis. (Uma circunferência é determinada por seu centro e por um ponto dela.) Um ângulo $\angle AOB$ é construtível se O é construtível e existem pontos construtíveis C e D tais que $\angle AOB = \angle COD$.

Na geometria analítica, dizemos que o ponto $A = (a, b)$ é construtível se for construtível a partir de $\overline{OE}$, sendo que $O = (0, 0)$ e $E = (1, 0)$.

Agora vamos estudar algumas construções com régua e compasso que valem na geometria euclideana (e só nela), como expostos nos *Elementos* de Euclides, nos Livros III e IV. Para isto, começamos com algumas propriedades de circunferências (dos Livros II e III).

Observação: Todas as construções no resto desta seção são com régua não graduada e compasso. Lembramos que um **polígono regular** é um polígono convexo com todos os lados congruentes e todos os ângulos congruentes.

Exercício 101: Dado o segmento $\overline{AB}$, determine (com régua e compasso) $C \in \overline{AB}$, tal que $AC^2 = AB \cdot CB$. (Para isto, construa um segmento $\overline{AD} \perp \overline{AB}$, tal que $AB = 2\,AD$, e E, tal que $D - A - E$, e $\overline{DE} \equiv \overline{BD}$; seja $A - C - B$, tal que $\overline{AC} \equiv \overline{AE}$; mostre que este é o ponto procurado.)

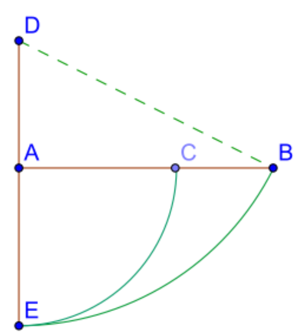

Figura 4.8: Construção do ponto C, tal que $AC^2 = AB \cdot CB$.

Exercício 102: Dados $A, B \in \mathbb{C}_{C,r}$ e $A - D - B$, mostre que $AD \cdot DB = r^2 - CD^2$. (Use o Teorema de Pitágoras nos triângulos convenientes.)

Exercício 103: Dados $A, B, Q \in \mathbb{C}_{C,r}$ e P no exterior de $\mathbb{C}_{C,r}$, tais que $A - B - P$, mostre que são equivalentes:

(a) $AP \cdot BP = PQ^2$;

(b) r_{PQ} é tangente a $\mathbb{C}_{C,r}$.

Exercício 104: Mostre que se $\Box ABCD$ é convexo e $A, B, C, D \in \mathbb{C}_{P,r}$, então $m(\angle A) + m(\angle C) = m(\angle B) + m(\angle D) = 180$. (Para isto, mostre que $\angle DAC \equiv \angle DBC$, $\angle CAB \equiv \angle CDB$, etc.)

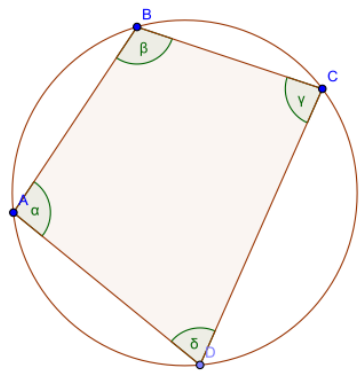

Figura 4.9: Quadrilátero inscrito: $\alpha + \gamma = \beta + \delta$.

Exercício 105: Dados $A, B, Q \in \mathbb{C}_{C,r}$ e P no exterior de $\mathbb{C}_{C,r}$, tais que $A - B - P$ e r_{PQ} é tangente a $\mathbb{C}_{C,r}$, mostre que $\angle PQB \equiv \angle BAQ$. (Para isto, considere primeiro o caso em que $\overline{AQ}$ é um diâmetro e depois use o exercício anterior, no caso genérico.)

Exercício 106: Construir um triângulo isósceles cujos ângulos da base medem o dobro do terceiro ângulo. Para isto, dado o segmento $\overline{AB}$, ache C tal que $A - C - B$ e $AC^2 = AB \cdot CB$; seja $D \in \mathbb{C}_{A,d(A,B)}$, tal que $d(A, C) = d(B, D)$; mostre que o triângulo procurado é $\triangle ABD$. (Para esta última afirmação, seja $\mathbb{C}_{O,s}$ a circunferência circunscrita ao $\triangle ABQ$; mostre que $\angle PQB \equiv \angle BAQ$, $\angle APQ \equiv \angle AQP$, $\angle PBQ \equiv \angle BPQ$ e, portanto $\angle AQB \equiv \angle BAQ$, etc.)

Exercício 107: Dada uma circunferência $\mathbb{C}_{P,r}$, mostre que um pentágono regular inscrito em $\mathbb{C}_{P,r}$ (todos os vértices na circunferência) é construtível. (Construa primeiro um triângulo isósceles com ângulos da base medindo 72, $\triangle RST$, inscrito em $\mathbb{C}_{P,r}$; mostre que a base deste triângulo é o lado do pentágono procurado.)

Exercício 108: Dada uma circunferência $\mathbb{C}_{P,r}$, mostre que um pentágono regular circunscrito a $\mathbb{C}_{P,r}$ (todos os lados são tangentes a $\mathbb{C}_{P,r}$).

Exercício 109: Mostre que um hexágono regular de lado construtível dado é construtível.

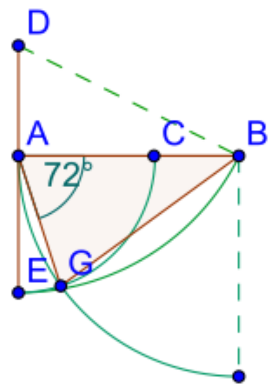

Figura 4.10: Construção de triângulo isósceles, culo ângulo da base mede 72°.

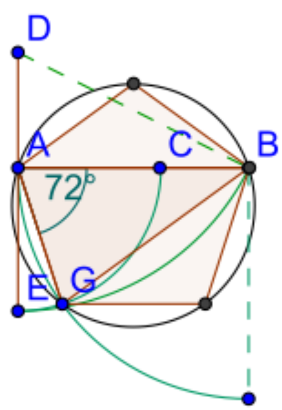

Figura 4.11: Construção de pentágono regular inscrito em uma circunferência.

Exercício 110: Mostre que um polígono regular de 15 lados inscrito em $\mathbb{C}_{P,r}$ é construtível. (Inscrever $\triangle ABC$ equilátero e um pentágono regular com um dos vértices A em comum, etc.)

Exercício 111: Mostre que se um polígono regular de n lados é construtível, então um polígono regular de $2n$ lados é construtível.

Exercício 112: Extraindo uma raiz quadrada! Dado um segmento $\overline{OU}$ como referência de unidade de medida, e um segmento $\overline{AB}$, tal que $\overline{AB} = \lambda\,\overline{OU}$, para construir um segmento $\overline{PQ}$, tal que $\overline{PQ} = \sqrt{\lambda}\,\overline{OU}$, inscreva em uma circunferência um triângulo retângulo de hipotenusa $\overline{AC}$ medindo $\lambda + 1$ e tal que tenha altura sobre o ponto C.

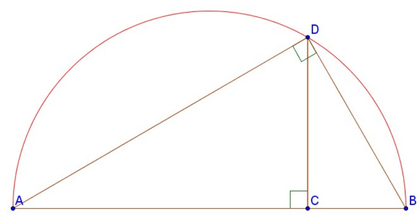

Figura 4.12: Extraindo a raiz quadrada: $CD^2 = AC \cdot BC$.

Exercício 113: O círculo de Carlyle. Como resolver uma equação de segundo grau, com régua e compasso. Queremos resover a equação $x^2 - s\,x + p = 0$, conhecendo segmentos que meçam $|s|$ e $|p|$. Para facilitar a descrição, vamos fazê-la em $\mathbb{R}^2$ (na geometria analítica). Sejam A o ponto $(0,1)$ e $B = (s,p)$. A intersecção do círculo de diâmetro$\overline{AB}$ (chamado de círculo de Carlyle da equação) com o eixo x pode conter no máximo dois pontos $H_1 = (x_1, 0)$ e $H_2 = (x_2, 0)$, com $x_1 \leq x_2$. Mostre que os números x_1 e x_2 são as raízes da equação. Intterprete a condição do discriminante $\Delta = s^2 - 4p \geq 0$ para a existência de raízes (reais) em termo da distância do centro do círculo de Carlyle ao eixo x.

Exercício 114: (K. F. Gauss, Séc. XIX) Mostre que um polígono regular de 17 lados é construtível.

Para tal construção devemos obter um ângulo θ medindo $(360/17)°$. Aos 19 anos de idade, o jovem Carl F. Gauss obteve a seguinte fórmula:

$$16\cos\left(\frac{360°}{17}\right) = -1 + \sqrt{17} + \sqrt{34 - 2\sqrt{17}} +$$

$$2\sqrt{17 + 3\sqrt{17} - \sqrt{34 - 2\sqrt{17}} - 2\sqrt{34 + 2\sqrt{17}}}.$$

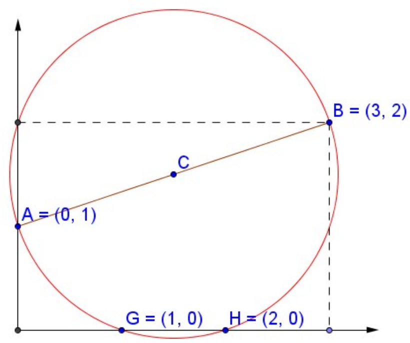

Figura 4.13: Resolvendo a equação $x^2 - 3x + 2 = 0$ com o método do círculo de Carlyle.

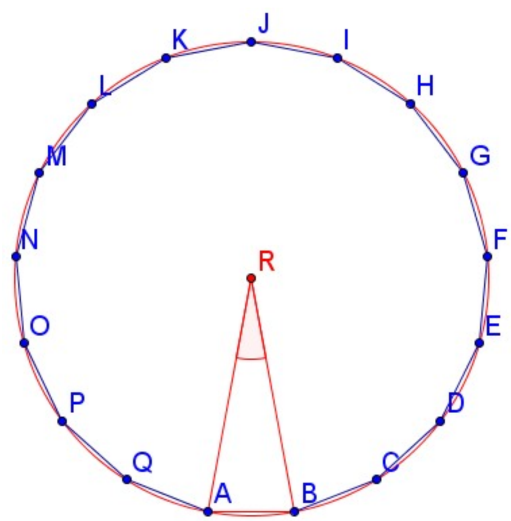

Figura 4.14: O polígono regular de 17 lados.