ALGUMAS DESIGUALDADES GEOMÉTRICAS

RICARDO BIANCONI

Resumo. Vamos mostrar algumas desigualdades envolvendo triângulos. Uma consequência importante dessas desigualdades é o critério LLL (Lado-Lado-Lado) de congruência de triângulos.

1. Lembremos os Postulados

Veja a Lista 1 para uma discussão mais detalhada.

Postulados de Incidência

(I 1): Dados dois pontos distintos A e B, existe uma única reta m contendo esses dois pontos. Tal reta também é denotada $\overleftrightarrow{AB}$ (ou tembém $\overleftrightarrow{BA}$; a ordem dos pontos não importa aqui).

(I 2): Cada reta tem pelo menos dois pontos distintos.

(I 3): Existem pelo menos três pontos não colineares (ou seja, não estão na mesma reta).

Postulados de Ordem

(O 1): Se $A - B - C$, então A, B e C são três pontos distintos e colineares.

(O 2): Se $A - B - C$, então $C - B - A$.

(O 3): Dados dois pontos distintos B e D, existem pontos A, C e E, tais que $A - B - C$, $B - C - D$ e $C - D - E$.

(O 4): Dados três pontos distintos e colineares A, B e C, uma e somente uma relação ocorre dentre $A - B - C$, $A - C - B$ e $B - A - C$.

(O 5): Se $A - B - C$, $B - D - C$ e $B - C - E$, então valem $A - B - D$, $A - D - C$, $A - B - E$ e $B - C - E$.

(O 6–Pasch): Dados três pontos não colineares A, B e C, e uma reta r que não contenha nenhum desses pontos, se existir um ponto D em r, tal que $B - D - C$, então existe um ponto E em r, tal que ou $A - E - B$, ou $A - E - C$. (Outro modo de ler esse postulado: *se uma reta corta um lado de um triângulo e não contém nenhum dos vértices, então deve cortar um segundo lado desse triângulo.*)

Algumas consequências úteis.

Exemplo 1 (Separação do Plano)**.** Dada a reta r existem dois conjuntos convexos e disjuntos H_1 e H_2, tais que

(a) nenhum ponto de r está em H_1 e nem em H_2;
(b) cada ponto do plano está ou na reta, ou e, H_1, ou em H_2;
(c) para cada par de pontos $P_1 \in H_1$ e $P_2 \in H_2$, existe um ponto $Q \in \mathrm{int}(\overline{P_1P_2})$ que está na reta r.

Os conjuntos H_1 e H_2 são chamados de **semiplanos de origem** r.

Exercício 1 (Barras transversais)**.** Dado $P \in \mathrm{int}\,\angle AOB$, mostre que existe um ponto $Q \in \overline{AB} \cap \overrightarrow{OP}$.

Postulados de Congruência.

(CS 1): Dados um segmento $\overline{AB}$ e uma semirreta $\overrightarrow{CD}$, existe um único ponto $E \in \overrightarrow{CD}$, tal que $\overline{CE} \equiv \overline{AB}$.
(CS 2): Para todo segmento $\overline{AB}$, vale $\overline{AB} \equiv \overline{AB}$.
(CS 3): Se $\overline{AB} \equiv \overline{CD}$ e $\overline{AB} \equiv \overline{EF}$, então $\overline{CD} \equiv \overline{EF}$.
(CS 4): Se $A-B-C$, $D-E-F$, $\overline{AB} \equiv \overline{DE}$ e $\overline{BC} \equiv \overline{EF}$, então $\overline{AC} \equiv \overline{DF}$.
(CA 1): Dados um ângulo $\angle BAC$, uma semirreta $\overrightarrow{DE}$ e um dos semiplanos H de origem $\overleftrightarrow{DE}$, existe uma única semirreta $\overrightarrow{DF}$, com $F \in H$, tal que $\angle BAC \equiv \angle EDF$.
(CA 2): Para cada ângulo $\angle BAC$, vale $\angle BAC \equiv \angle BAC$.
(CA 3): Se $\angle BAC \equiv \angle EDF$ e $\angle BAC \equiv \angle HGI$, então vale $\angle EDF \equiv \angle HGI$.
(CA 4): Se $D \in \mathrm{int}(\angle BAC)$ e $E \in \mathrm{int}(\angle QPR)$ forem tais que $\angle BAD \equiv \angle QPE$ e $\angle DAC \equiv \angle EPR$, então $\angle BAC \equiv \angle QPR$.
(LAL): Dados os triângulos $\triangle ABC$ e $\triangle DEF$, se $\overline{AB} \equiv \overline{DE}$, $\overline{AC} \equiv \overline{DF}$ e $\angle BAC \equiv \angle EDF$, então $\triangle ABC \equiv \triangle DEF$.

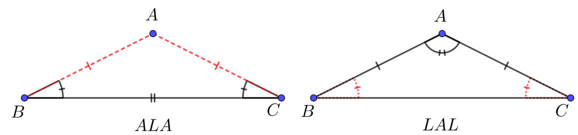
Algumas consequência úteis (veja a Lista 1)..

Proposição 1 (Ângulo-Lado-Ângulo: ALA)**.** Dados dois triângulos $\triangle ABC$ e $\triangle DEF$, se $\overline{AB} \equiv \overline{DE}$, $\angle ABC \equiv \angle DEF$ e $\angle BAC \equiv \angle EDF$, então $\triangle ABC \equiv \triangle DEF$.

Proposição 2 (Lado-Ângulo-Ângulo (LAA))**.** Dados dois triângulos $\triangle ABC$ e $\triangle DEF$, suponha que $\overline{AB} \equiv \overline{DE}$, $\angle BAC \equiv \angle EDF$ e $\angle ACB \equiv \angle DFE$. Mostre que $\triangle ABC \equiv \triangle DEF$. [Sugestão: seja $F' \in \overrightarrow{DF}$, tal que $\overline{DF'} \equiv \overline{AC}$. Use (LAL) e o Teorema do Ângulo Externo para mostra que $F' = F$, eliminando os casos $A - F' - F$ e $A - F - F'$.]

Proposição 3 (Triângulos Isósceles)**.** Dado o triângulo $\triangle ABC$, vale a equivalência $\overline{AB} \equiv \overline{AC}$ se, e somente se, $\angle BAC \equiv \angle ABC$. Tais triângulos são chamados de isósceles.

Demonstração. Temos que mostrar duas implicações.



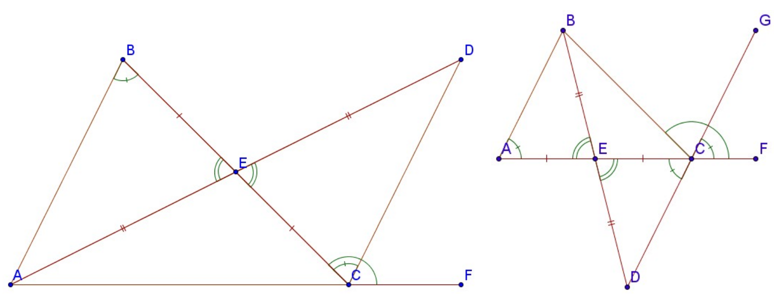
$\boxed{(1)\ \angle ABC \equiv \angle ACB \Rightarrow \overline{AB} \equiv \overline{AC}}$: Dado que $\angle ABC \equiv \angle ACB$, e $\overline{BC} \equiv \overline{BC}$, por ALA, $\triangle ABC \equiv \triangle ACB$ e, portanto, $\overline{AB} \equiv \overline{AC}$.

$\boxed{(2)\ \overline{AB} \equiv \overline{AC} \Rightarrow \angle ABC \equiv \angle ACB}$: Como $\overline{AB} \equiv \overline{AC}$ e $\angle BAC \equiv \angle CAB$ (na verdade, são exatamente iguais), por LAL, $\triangle ABC \equiv \triangle ACB$. Daí, $\angle ABC \equiv \angle ACB$. □

2. As Desigualdades

A primeira desigualdade, da qual as outras vão ser consequências é a seguinte.

Desigualdade 1 (Teorema do Ângulo Externo)**.** Dado o triângulo $\triangle ABC$, seja F tal que $A - C - F$. Mostre que $\angle ABC < \angle FCB$ e $\angle BAC < \angle FCB$.



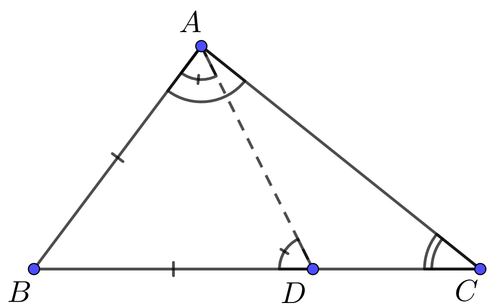
Demonstração. Seja E o ponto médio de $\overline{BC}$. Seja D, tal que $A - E - D$ e $\overline{AE} \equiv \overline{DE}$. Pelo exercício anterior e (LAL), $\triangle EAB \equiv \triangle EDC$. Como $D \in \operatorname{int}(\angle FCB)$ e $\angle ABC \equiv \angle BCD$, tamos que $\angle ABC < \angle FCB$.

Agora, tome E' o ponto médio de $\overline{BC}$, etc, e conclua que $\angle BAC < \angle FCB$. □

Uma consequência imediata dessa desigualdade é o seguinte.

Exercício 2. Mostre que a soma de dois ângulos internos de um triângulo é sempre menor que dois ângulos retos.

Desigualdade 2. Dado o triângulo $\triangle ABC$, se $\overline{BC} > \overline{AB}$, então $\angle BAC > \angle BCA$ ("o maior ângulo é oposto ao maior lado"). Reciprocamente, se $\angle BAC > \angle BCA$, então $\overline{BC} > \overline{AB}$ ("o maior lado é oposto ao maior ângulo").



Demonstração. Suponha que $\overline{BC} > \overline{AB}$. Seja D, tal que $B - D - C$ e $AB \equiv BD$. O triângulo $\triangle ABD$ é isósceles e $\angle BAD \equiv \angle BDA$. Como $B - D - C$, B está no interior do ângulo $\angle BAC$ e, portanto, $\angle BAD < \angle BAC$. Pelo Teorema do Ângulo Externo, aplicado ao triângulo $\triangle ACD$, temos que $\angle ACB = \angle ACD < \angle ADB \equiv \angle BAD < \angle BAC$.

Para a recíproca, mostramos indiretamente por contradição. Queremos mostrar que *se* $\angle BAC > \angle BCA$*, então* $\overline{BC} > \overline{AB}$. Assim, suporemos que não valha a desigualdade $\overline{BC} > \overline{AB}$ (ou seja, ou $\overline{BC} \equiv \overline{AB}$, ou $\overline{BC} < \overline{AB}$) e concluiremos que não valerá a desigualdade $\angle BAC > \angle BCA$ (ou seja, ou $\angle BAC \equiv \angle BCA$, ou $\angle BAC < \angle BCA$).

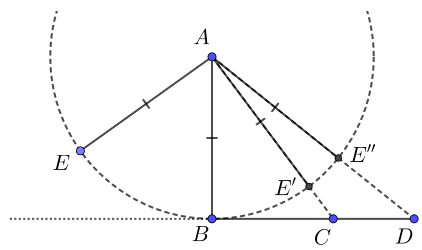
Se $\overline{AB} \equiv \overline{AC}$, então o triângulo $\triangle ABC$ é isósceles e, portanto, $\angle BAC \equiv \angle BCA$. Se $\overline{AB} > \overline{BC}$, a primeira parte da demonstração aplicada, com as devidas modificações nos nomes dos pontos, nos dá que $\angle BAC < \angle BCA$. $\square$

Um caso particular simples, mas útil é o seguinte. Ele decorre imediatamente do Teorema do ângulo Externo e da Desigualdade 2.

Exercício 3 (Triângulos retângulos)**.** Dados o triângulo $\triangle ABC$ com $\angle ABC$ reto, e ponto D, tal que $B - C - D$, então valem as desigualdades $\overline{AB} < \overline{AC} < \overline{AD}$.

Uma consequência imediata desse exercício é o seguinte.

Exercício 4. Dados o triângulo $\triangle ABC$ com $\angle ABC$ reto, e ponto $E \neq B$, tal que $\overline{AC} \equiv \overline{AE}$, então o ponto E está no mesmo semiplano de origem a reta $\overleftrightarrow{BC}$ que contém o ponto A.

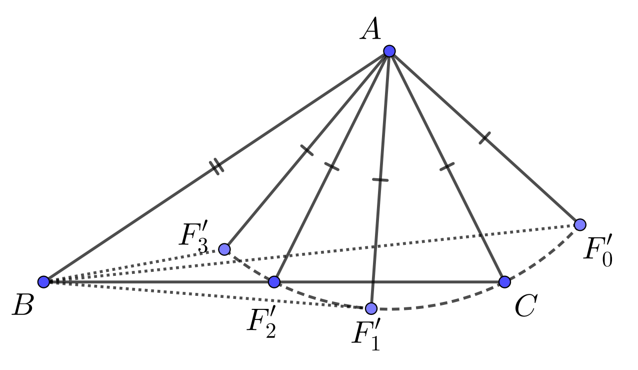


Desigualdade 3. Dados os triângulos $\triangle ABC$ e $\triangle DEF$, tais que $\overline{AB} \equiv \overline{DE}$, $\overline{AC} \equiv \overline{DF}$, vale a equivalência $\angle BAC > \angle EDF$ se, e somente se $\overline{BC} > \overline{EF}$.

Demonstração. Dividimos a demosntração em duas implicações.

$\boxed{(1)\ \angle BAC > \angle EDF \Rightarrow \overline{BC} > \overline{EF}}$. Seja F' o ponto do semiplano de origem a reta $\overleftrightarrow{AB}$ que contém o ponto C e tal que $\triangle ABF' \equiv \triangle DEF$.

Suponha que $\angle BAC > \angle EDF \equiv \angle BAF'$. Daí, o ponto F' deverá estar no interior do ângulo $\angle BAC$. Daí, o ponto F' pode estar no exterior de $\triangle ABC$, ou $B - F' - C$, ou no interior desse triângulo. (Na figura abaixo, são os pontos F_1', F_2' e F_3', respectivamente.)



O caso em que $B - F' - C$ é trivial, pois $\overline{EF} \equiv \overline{BF'} < \overline{BC}$.

Nos outros dois casos usamos a Desigualdade 2 ao triângulo $\triangle BCF'$. Observe que o triângulo $\triangle ACF'$ é isósceles, com $\angle ACF' \equiv \angle AF'C$.

No caso em que F' está no exterior deo $\triangle ABC$, temos que $\angle BCF' < \angle ACF' \equiv \angle AF'C < \angle BF'C$. A Desigualdade 2 no $\triangle ACF'$ nos dá $\overline{EF} \equiv \overline{BF'} < \overline{BC}$.

No caso em que $F' \in \mathrm{int}(\triangle ABC)$, o ângulo $\angle BF'C$ é maior que o suplementar do ângulo $\angle AF'C$ (que é agudo) e, portanto é obtuso. Daí $\angle BF'C$ é o maior ângulo do $\triangle BF'C$ e a Desigualdade 2 implica que $\overline{BC} > \overline{BF'} \equiv \overline{EF}$.

$\boxed{(2)\ \overline{BC} > \overline{EF} \Rightarrow \angle BAC > \angle EDF}$. Aqui podemos argumentar por contradição, assumindo que não vale a desigualdade $\angle BAC > \angle EDF$ (ou seja, ou $\angle BAC \equiv \angle EDF$, ou $\angle BAC < \angle EDF$) e mostrando que não vale a desigualdade $\overline{BC} > \overline{EF}$ (ou seja, ou $\overline{BC} \equiv \overline{EF}$, ou $\overline{BC} < \overline{EF}$).

Se $\angle BAC \equiv \angle EDF$, então por LAL $\triangle ABC \equiv \triangle DEF$ e, portanto $\overline{BC} \equiv \overline{EF}$.

Se $\angle BAC < \angle EDF$, o mesmo argumento da primeira parte da demonstração, com as devidas trocas de nomes, implica que $\overline{BC} < \overline{EF}$. □

Com essa desigualdade, somos capazes de mostrar o critério LLL (Lado-Lado-Lado) de congruência de triângulos.

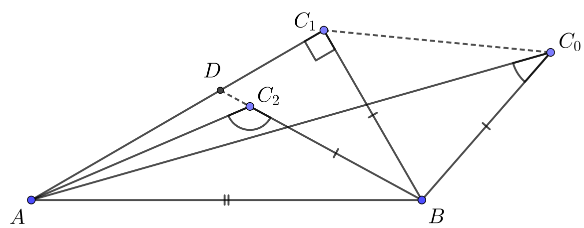
Proposição 4 (LLL)**.** Dados os triângulos $\triangle ABC$ e $\triangle DEF$, se $\overline{AB} \equiv \overline{DE}$, $\overline{AC} \equiv \overline{DF}$ e $\overline{BC} \equiv \overline{EF}$, então $\triangle ABC \equiv \triangle DEF$.

Demonstração. Pela Desigualdade 3, não são possíveis os casos em que $\angle BAC < \angle EDF$ e nem $\angle BAC > \angle EDF$. Sobra somente o caso $\angle BAC \equiv \angle EDF$ e, daí, por LAL, $\triangle ABC \equiv \triangle DEF$. □

A Desigualdade 3 compara tamanhos de ângulos com de seus lados opostos, quando mantemos constantes os tamanhos dos lados adjacentes. Vamos analisar agora o que acontece com um dos lados adjacentes se forem mantidos os tamanhos de um dos lados adjacentes e do lado oposto. Vamos dividir em duas situações.

Desigualdade 4. Dados os triângulos $\triangle ABC_0$, $\triangle ABC_1$ e $\triangle ABC_2$, tais que $\overline{BC_0} \equiv \overline{BC_1} \equiv \overline{BC_2}$, se $\angle AC_0B$ for agudo, $\angle AC_1B$ reto e $\angle AC_2B$ obtuso, então $\overline{AC_0} > \overline{AC_1} > \overline{AC_2}$.

Demonstração. Sem perda de generalidade, podemos supor que os pontos C_0, C_1 e C_2 estejam no mesmo semiplano de origem a reta $\overleftrightarrow{AB}$.



O Exercício 4 acima implica que os pontos C_0 e C_2 estão no interior do ângulo $\angle BAC_1$. Se o ponto C_j estiver no interior do triângulo $\triangle ABC_1$, então o ângulo $\angle AC_jB$ tem que ser obtuso (e, portanto, $j = 2$). De fato, se prolongarmos o segmento $\overline{BC}_j$ até encontrar o segmento $\overline{AC}_1$ em um ponto D, aplicamos o Teorema do Ângulo Externo aos triângulos $\triangle BC_1D$ e $\triangle ADC_j$, obtendo as desigualdades $\angle BC_1A < \angle BDA < \angle BC_jA$. Se o ponto C_k estiver no interior do ângulo $\angle BAC_1$ e no exterior do triângulo $\triangle ABC_1$, então o ângulo $\angle BC_kA$ deverá ser agudo, pois o triângulo $\triangle BC_1C_k$ é isósceles com ângulos agudos $\angle BC_1C_k \equiv \angle BC_kC_1 > \angle BC_kA$ e, portanto, $k = 0$.

O triângulo $\triangle AC_1C_0$ tem ângulo obtuso $\angle AC_1C_0$ (os outros dois são necessariamente agudos). Pela Desigualdade 2, vale a desigualdade $\overline{AC}_1 < \overline{AC}_0$.

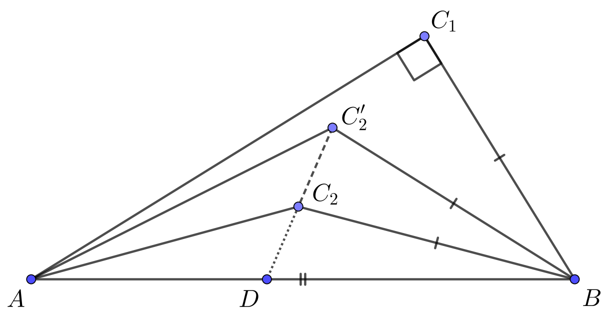
O triângulo $\triangle BC_1C_2$ é isósceles com ângulos $\angle BC_1C_2 \equiv \angle BC_2C_1$ agudos. Seu suplementar $\angle C_1C_2D$ (o ponto D é o mesmo que apareceu antes) deve ser obtuso. Mas D está no interior do ângulo $\angle AC_2C_1$, que também deverá ser obtuso. Assim, pela Desigualdade 2 aplicada ao triângulo $\triangle AC_1C_2$ implica que $\overline{AC}_2 < \overline{AC}_1$. $\square$

Agora vamos aproveitar isso para comparar tamanhos de lados de triângulos nos casos em que são fixos os tamanhos dos lados adjacente e oposto ao ângulo em questão. Vamos dividir em dois casos para facilitar a demonstração, onde comparamos dois ângulos obtusos e depois dois ângulos agudos.

Atenção para uma sutileza aqui: os enunciados pressupõem que um triângulo retângulo também é dado, que é usado apenas como construção auxiliar. Sua existência depende do *Postulado da Continuidade*, que ainda não foi apresentado.

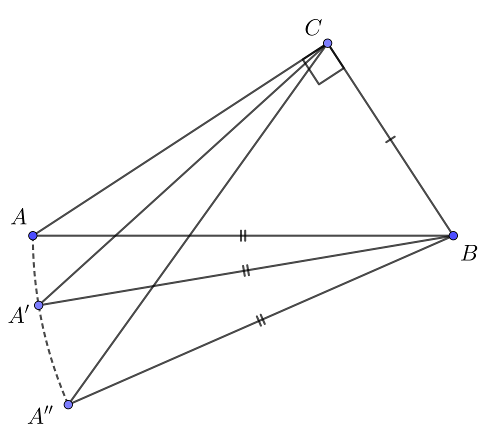
Desigualdade 5. Dados os triângulos $\triangle ABC_1$, $\triangle ABC_2$ e $\triangle ABC_2'$, tais que $\overline{BC}_1 \equiv \overline{BC}_2 \equiv \overline{BC}_2'$, com o ângulo $\angle AC_1B$ reto, se os ângulos $\angle AC_2'B$ e $\angle AC_2B$ forem obtusos e $\angle AC_2'B < \angle AC_2B$, então $\overline{AC}_2 < \overline{AC}_2' < \overline{AC}_1$.

Demonstração. Sem perda de generalidade, podemos supor que C_1, C_2 e C_2' estão no mesmo semiplano de origem a reta $\overleftrightarrow{AB}$. Já sabemos que os pontos C_2 e C_2' estão no interior de $\triangle ABC_1$.



Prolongamos os segmento $\overline{C_2C_2}'$ até encontrar $\overline{AB}$ em um ponto D. Aplicamos o Teorema do Ângulo Externo aos triângulos $\triangle AC_1C_2'$ e $\triangle BC_2C_2'$ e concluímos a partir da desigualdade $\angle AC_2'B < \angle AC_2B$ que o ponto C_2 está no interior do triângulo $\triangle ABC_2'$. Mas, daí, $\angle ABC_2 < \angle ABC_2'$ e, pelas Desigualdades 3 e 4, valem as desigualdades $\overline{AC}_2 < \overline{AC}_2' < \overline{AC}_1$. $\square$

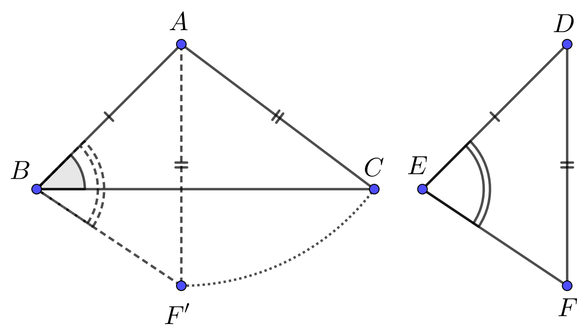
Desigualdade 6. Dados os triângulos $\triangle ABC$ (com $\angle ACB$ reto), $\triangle A'BC$ e $\triangle A''BC$, tais que $\overline{BA}_2' \equiv \overline{BA}''$, se os ângulos $\angle AC_2'B$ e $\angle AC_2B$ forem agudos e $\angle A''CB < \angle A'CB$, então $\overline{AC} < \overline{A'C} < \overline{A''C}$.



Demonstração. A hipótese $\angle A''CB < \angle A'CB < \angle ACB$ significa que o ponto A'' está no interior do ângulo $\angle BCA'$. Em particular, isso significa que os pontos A' e B estão em semiplanos opostos de origem a reta $\overleftrightarrow{CA''}$. Mas isso também implica que os pontos A'' e C estão em semiplanos opostos de origem a reta $\overleftrightarrow{BA'}$. Isso significa que $\angle CBA' < \angle CBA''$. Pelas Desigualdades 3 e 5, concluímos que $\overline{AC} < \overline{A'C} < \overline{A''C}$. $\square$

Por fim, juntamos essas três últimas desigualdades em um enunciado só.

Desigualdade 7. Dados os triângulos $\triangle ABC$ e $\triangle DEF$, tais que $\overline{AB} \equiv \overline{DE}$ e $\overline{AC} \equiv \overline{EF}$, são equivalentes:
(a) $\angle ABC < \angle DEF$;
(b) $\overline{EF} < \overline{BC}$.



Demonstração. Temos duas implicações a serem mostradas.

(a)⇒(b): a hipótese $\angle ABC < \angle DEF$ pode ser quebrada em várias situações: ambos os ângulos agudos ou obtusos, um ângulo reto e o outro agudo ou obtuso, e um agudo e o outro obtuso. As Desigualdades 4, 5 e 6 implicam que $\overline{EF} < \overline{BC}$.

(b)⇒(a): essa implicação pode ser mostrada indiretamente por contradição. Assumimos que não vale a desigualdade $\angle ABC < \angle DEF$ (ou seja, ou $\angle ABC \equiv \angle DEF$, ou $\angle ABC > \angle DEF$) e concluímos que não pode valer a desigualdade $\overline{EF} < \overline{BC}$, ou seja, ou $\overline{EF} \equiv \overline{BC}$ (que decorre de LAL), ou $\overline{BC} < \overline{EF}$ (que decorre da implicação (a)⇒(b), com as devidas modificaçõs nos nomes dos pontos). $\square$

. . . .