PROVA 3 DE MAT-230, 2020

Cada questão vale 2,5 pontos. Entregar até as 24h do dia 8/12/2020 no email: bianconi@ime.usp.br .

---

1. Sem usar nenhuma forma equivalente do Postulado das Paralelas Euclidiano, mostre que se $\triangle ABC$ for um triângulo acutângulo (seus ângulos internos são todos agudos), então quaisquer duas alturas são concorrentes. [Sugestão: use Pasch.]

2. (Geometria Euclidiana) Dada a corda $\overline{AB}$ da circunferência de centro O e raio medindo $\rho > 0$, mostre que se $A - D - B$, então $AD \cdot DB = \rho^2 - OD^2$. [Sugestão: Use o Teorema de Pitágoras em triângulos convenientes. Considere os dois casos: $O \in \overline{AB}$, e $O \notin \overline{AB}$.]

3. (Geometria Euclidiana) Dada a circunferência de centro O e raio medindo $\rho > 0$, sejam A, B e Q três pontos da circunferência, e P outro ponto (exterior à circunferência), tais que $A - O - B$ e $O - B - P$, mostre que são equivalentes:

(a) a reta $\overleftrightarrow{PQ}$ é tangente à circunferência;
(b) $AP \cdot BP = PQ^2$.

[Sugestão: (a) $\Rightarrow$ (b): semelhança de triângulos; (b) $\Rightarrow$ (a): prove por contradição.]

4. (Geometria Euclidiana) Dado o triângulo retângulo $\triangle ABC$, com o ângulo $\angle ACB$ reto, seja $D \in \overline{AB}$ o pé da perpendicular $\overline{CD} \perp \overline{AB}$. Mostre que $CD^2 = AD \cdot BD$. [Sugestão: semelhança de triângulos convenientes.]