PROVA 4 DE MAT-230, 2020

Cada questão vale 2,5 pontos.

Entregar no email: bianconi@ime.usp.br até as 24h do dia 15/12/2020.

---

1. Seja $\triangle ABC$ um triângulo isósceles, com $\overline{AB} \equiv \overline{AC}$. *Sem assumir nenhuma forma equivalente do Postulado das Paralelas Euclidiano*, **mostre que** as três medianas são concorrentes em um mesmo ponto G. [Sugestão: Pasch, mais congruências de triângulos convenientes.]

2. Seja $ABCD$ um quadrilátero de Lambert, ou seja, é um quadrilátero convexo satisfazendo $\overline{AB} \perp \overline{BC} \perp \overline{CD} \perp DA$. Suponha que valha a *Hipótese do Ângulo Agudo*, ou seja, $\alpha = m(\angle BAD) < 90$ (ou seja, não vale nenhuma forma equivalente do Postulado das Paralelas Euclidiano!). **Mostre que** $\overline{AB} \equiv \overline{AD}$ se, e somente se, $\overline{BC} \equiv \overline{CD}$.

3. (Geometria Euclidiana) Dada a circunferência $\mathcal{C}$ de centro O e raio $\rho > 0$, e dado um ponto P no exterior da circunferência (ou seja, $OP > \rho$), e duas retas r e s contendo o ponto P e secantes à circunferência (ou seja, existem pontos A, B, C, $D \in \mathcal{C}$, dois a dois distintos, com $A, B \in r$, $C, D \in s$, tais que $A - B - P$ e $C - D - P$), **mostre que**

$$AP \cdot BP = CP \cdot DP = PQ^2,$$

onde $Q \in \mathcal{C}$ é o ponto de tangência da reta $\overleftrightarrow{PQ}$ à circunferência $\mathcal{C}$. [Sugestão: semelhança de triângulos.]

4. (Geometria Euclidiana) **Mostre que** o quadrilátero convexo $ABCD$ pode ser inscrito em uma circunferência se, e somente se, $m(\angle BAD) + m(\angle BCD) = m(\angle ABC) + m(\angle ADC) = 180$.