EXERCÍCIOS DE MAT-240-I

RICARDO BIANCONI

Resumo. Esta lista serve como auxílio para a P1.

Para a P1: Exercícios 41 a 58, páginas 12 a 14 da apostila e mais os exercícios abaixo.

1. Área

Exercício 1. *Calcule a área do quadrilátero (convexo) $ABCD$, onde $A = (0,0)$, $B = (3,0)$, $C = (2,3)$ e $D = (1,1)$. [Sugestão: divida em triângulos.]*

Exercício 2. *Calcule a área do quadrilátero (não convexo) $ABCD$, onde $A = (0,0)$, $B = (5,0)$, $C = (3,1)$ e $D = (4,3)$.*

Exercício 3. *Calcule a área de um pentágono regular de lado $\ell > 0$. Observe que* $\cos 36 = \frac{1+\sqrt{5}}{4}$.

Exercício 4 (Variante do Teorema de Pitágoras)**.** *Sejam $\triangle ABC$ um triângulo retângulo, com ângulo reto em C e $\triangle DEF$ um triângulo qualquer. Sejam $\triangle ABC_1$, $\triangle AB_1C$ e $\triangle A_1BC$ três triângulos, todos semelhantes ao $\triangle DEF$, construídos sobre os lados do $\triangle ABC$. Mostre que a soma das áreas de $\triangle A_1BC$ e $\triangle AB_1C$ é igual à área de $\triangle ABC_1$.*

Solução: A área de um triângulo é proporcional ao quadrado de um de seus lados, ou melhor, como $\triangle ABC \sim \triangle DEF$, então

$$\frac{A(\triangle ABC)}{A(\triangle DEF)} = \frac{AB^2}{DE^2}, \text{ ou } \frac{\triangle ABC}{AB^2} = \frac{\triangle DEF}{DE^2} = k,$$

para um valor $k > 0$.

Assim, como vale o Teorema de Pitágoras, $AB^2 = AC^2+BC^2$. Como $A(\triangle ABC_1) = k\,AB^2$, $A(\triangle AB_1C) = k\,AC^2$ e $A(\triangle A_1BC) = k\,BC^2$, e $k\,AB^2 = k\,AC^2 + k\,BC^2$, temos que

$$A(\triangle ABC_1) = A(\triangle AB_1C) + A(\triangle A_1BC).$$

2. Geometria Espacial

Exercício 5. *Mostre que dados três planos distintos π_1, π_2 e π_3, mostre que se $\pi_1 \parallel \pi_3$ e $\pi_2 \parallel \pi_3$, então $\pi_1 \parallel \pi_2$.*

Exercício 6. *Sejam π_1 e π_2 dois planos distintos, tais que existe uma reta r perpendicular a ambos. Mostre que $\pi_1 \parallel \pi_2$.*

Solução. Argumentamos por contradição. Suponhamos que exista um ponto A incidente com π_1 e π_2, e sejam B incidente com r e π_1, e C incidente com r e π_2. Os pontos A, B e C não são colineares (o caso em que $A = B = C$ é descartado, devido à unicidade do plano contendo A e perpendicular a r). Seja π_3 o plano incidente com A, B e C. Os pontos da reta r estão em π_3. Como $r \perp \pi_1$, $\overleftrightarrow{AB} \perp r$ e, como $r \perp \pi_2$, então $\overleftrightarrow{AC} \perp r$. Mas isso é impossível, pois não existe reta perpendicular a dus retas concorrentes. [Como entra aqui o postulado das paralelas?]

Exercício 7. *Dadas três retas distintas r, s e t, duas a duas paralelas entre si, mostre que dado um ponto A, existe um (único) plano π, com A incidente em π e $r, s, t \perp \pi$.*

Solução. Se A estiver em uma das retas, desça perpendiculares de A às outras duas retas. Essas perpendiculares determinam o plano π.

Se A não estiver em nenhuma das retas seja π o plano contendo A e $r \perp \pi$. Os planos π_1 contendo r e S, e π_2 contendo r e t são ambos perpendiculares a π, pois ambos contêm a reta $r \perp \pi$. Portanto, $s, t \perp \pi$.

Exercício 8. *Dadas três retas distintas r, s e t, mostre que se $r \parallel s$ e $s \parallel t$, então $r \parallel t$. Observe que é preciso mostrar que r e t são coplanares e não concorrentes.*

Solução. Se as três retas forem coplanares, então o Postulado das Paralelas aplica-se imediatamente: se r e t não fossem paralelas, elas seriam concorrentes em um ponto P e, daí, passariam duas retas distintas por P que seriam paralelas a s, uma contradição.

Consideremos o caso em que as três retas não sejam coplanares e sejam π_1 o plano contendo r e s e π_2 o plano contendo s e t; as retas não são coplanares e, daí, $\pi_1 \neq \pi_2$ e $\pi_1 \cap \pi_2 = s$; daí r e t não são concorrentes. Precisamos mostrar que r e t são coplanares.