MAT-240. SEGUNDA PROVA. 28/05/2020

Cada questão vale 2,5 pontos.

---

1. Mostre que um **prisma oblíquo** (possui algumas faces laterais paralelogramos não retangulares) de base triangular não pode ser inscrito em uma esfera (ou seja, não existe esfera contendo todos os seus vértices). [*Sugestão: o Exercício 96, na página 21 da apostila, essencialmente diz que todo tetraedro, regular ou não, pode ser inscrito em uma esfera.*]

....

Solução. O problema pede para mostrar que não existe um ponto equidistante de todos os vértices.Se tal ponto existisse, em particular ele deveria estar nos planos perpendiculares às arestas e incidentes com seus pontos médios (os planos mediatrizes!). Os planos mediatrizes contendo os pontos médios de duas arestas paralelas de uma face lateral que seja um paralelogramo não retângulo são dois planos distintos e paralelos entre si. Daí, não pode haver um ponto comum a ambos os planos e, portanto, nenhum ponto equidistante de todos os vértices.

---

2. Calcule o volume de uma pirâmide de base quadrada e faces laterais triângulos equiláteros, cujas arestas meçam ℓ.

....

Solução. Basta determinar a altura da pirâmide sobre a base quadrada. Tomemos dois vértices opostos do quadrado da base. Com o vértice da pirâmide, esses três pontos formam um triângulo (isósceles) de lados medidndo ℓ, ℓ e $\ell\sqrt{2}$. Daí fica fácil calcular a altura $h = \ell\sqrt{2}/2$ e o volume da pirâmide

$$V = \frac{\ell^3\sqrt{2}}{6}.$$

3. Mostre que **não existe** uma pirâmide de base um hexágono regular e faces laterais triângulos equiláteros. [*O que aconteceria no vértice oposto à base se existisse tal pirâmide*?]

....

Solução. Essa é uma aplicação imediata da condição de ângulos das faces de um ângulo sólido: a soma das medidas dos ângulos das faces de um ângulo sólido é estritamente menor que 2π (ou $360°$). Assim, não pode haver um ângulo sólido com seis faces com ângulos medindo $\pi/3$ (ou $60°$) cada.

4. A **deficiência de um ângulo sólido** é 2π menos a soma dos ângulos das faces que o compõe. Qual é a **soma das deficiências** de um prisma cujas bases sejam um polígono convexo (não necessariamente regular) de $n \geq 3$ lados e as faces laterais sejam retangulares. [*Chame de* $\alpha_i = m(A_{i-1}\hat{A}_i A_{i+1})$, $i = 1, \dots, n$, *onde* $A_1, \dots, A_n$ *são os vértices do polígono da base, com a convenção de que* $A_{-1} = A_n$ *e* $A_{n+1} = A_1$. *Quanto vale* $\sum_{i=1}^n \alpha_i$?]

. . . .

Solução. Seja $A'_1 \dots A'_n$ o polígono da outra base (paralela à base $A_1 \dots A_n$, com arestas laterais $\overline{A_j A'_j}$). Daí, $\alpha_i = m(A'_{i-1}\hat{A}'_i A'_{i+1})$, $i = 1, \dots, n$, com a convenção de que $A'_{-1} = A'_n$ e $A'_{n+1} = A'_1$. A deficiência nos vértices A_i e A'_i são $2\pi - (\pi/2 + \pi/2 + \alpha_i) = \pi - \alpha_i$. A soma das deficiências em todos os vértices será $2[n\pi - \sum_{i=1}^n \alpha_i]$. Como os polígonos $A_1 \dots A_n$ e $A'_1 \dots A'_n$ são convexos, $\sum_{i=1}^n \alpha_i = (n-2)\pi$. Assim, a soma das deficiências é $2n\pi - 2(n-2)\pi = 4\pi$ (ou $720°$).
