Noções de Geometria Inversiva

Ricardo Bianconi

Novembro de 2012

Resumo

Apresentamos aqui algumas noções de inversão por uma circunferência e algumas aplicações: o Teorema de Mohr-Mascheroni (pontos do plano contrutíveis com régua e compasso podem ser construídos usando-se apenas compasso) e uma introdução ao semiplano de Poincaré, um modelo da geometria hiperbólica plana.

1 Introdução

A inversão por uma circunferência aparece de modo disfarçado desde os geômetras gregos antigos, mas pela primeira vez estudada sistematicamente em trabalho[1] de Ludwig Immanuel Magnus. Nesse artigo, ele desenvolve algumas ideias da geometria projetiva (o estudo de polares por Plücker), usando a geometria analítica, chegando às fórmulas das coordenadas da inversão em uma circunferência centrada na origem. Lá ele observa que a transformação preserva ângulos e que leva retas que não passem pelo centro da inversão a circunferências.

Passemos a um estudo introdutório dessas transformações.

[1]Nouvelle Méthode pour découvrir des théorèmes de géométrie, *Journal für reine und angewandte Mathematische*, vol. 1832 (1832), no. VIII, pp. 51-63.

2 Inversão por uma circunferência

A inversão por uma circunferência de centro O e raio $\rho > 0$ é definida como a transformação do plano (menos o ponto O) que leva um ponto P em um ponto P' na semirreta $\overrightarrow{OP}$, satisfazendo a relação $OP\,OP' = \rho^2$. Observe-se que, devido à simetria dessa relação, se P' for a inversão de P, então P será a inversão de P'

No caso em que $\rho = 1$, obtemos $OP\,OP' = 1$, ou seja, o comprimento de cada segmento considerado é o inverso do outro.

Um outro ponto de vista: as razões $(OP/\rho)\,(OP'/\rho) = 1$.

Vejamos uma construção geométrica da inversão.

Em um triângulo $\triangle AOP$ com ângulo reto no vértice A, descemos a perpendicular $\overline{AP'} \perp \overline{OP}$, com $O - P' - P$. Daí, temos a relação $AP'^2 = OP'\,P'P$, decorrente do Teorema de Pitágoras. Escrevendo $P'P = OP - OP'$, obtemos $AP'^2 = OP\,OP' - OP'^2$, ou também, $OP\,OP' = AP'^2 + OP'^2$. Como o triângulo $\triangle AP'O$ também é retângulo (com ângulo reto no vértice P'), temos, pelo Teorema de Pitágoras, $AP'^2 + OP'^2 = AO^2$. Com isso, obtemos a relação $OP\,OP' = OA^2$, ou seja, P e P' são inversos um do outro, pela circunferência de centro O e raio OA. Observe que o segmento $\overline{AP}$, por ser perpendicular a um dos raiso daquela circunferência, é tangenta à mesma.

Consideremos duas contruções de pontos, dada uma circunferência de centro O e raio $\rho > 0$ indicadas na figura 1.

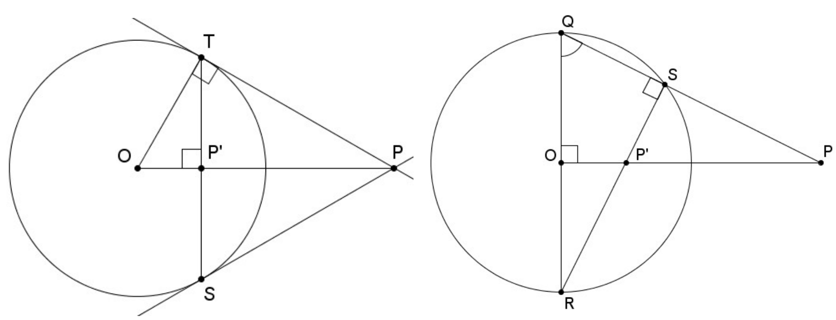


Figura 1: Construções de inversão.

A primeira delas foi justificada acima. A segunda decorre da semelhança dos triângulos pertinentes (exercício).

2.1 Inversão de retas

Dado que a inversão de um ponto está na reta que liga o ponto e o centro da inversão, fica claro que se a reta passa pelo centro da inversão, então a imagem dr r pela inversão é ela mesma (como conjunto).

Se a reta r não passar pelo centro O da inversão, seja A o ponto de r que é o pé da perpendicular $r_{OA} \perp r$. Seja A' a inversão de A e seja $\mathscr{C}_1$ a circunferência de diâmetro $\overline{OA'}$.

Afirmamos que $\mathscr{C}_1$ é a imagem da inversão de r. Acompanhe a argumentação pela figura 2.

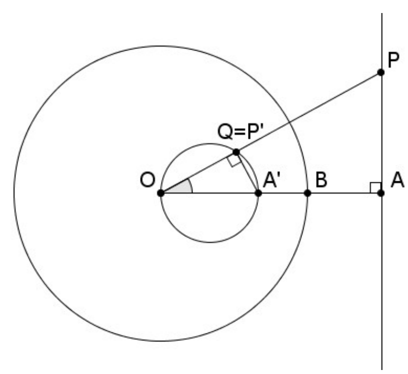


Figura 2: Inversão de reta que não contém o centro da inversão.

De fato, seja P um ponto de r distinto de A. Como vale a ordem $O - A' - A$, ou $O - A - A'$, a semirreta $\overrightarrow{OP}$ encontra $\mathscr{C}_1$ em um ponto Q. Os triângulos $\triangle OAP$ e $\triangle AQA'$ são retângulos e têm o ângulo $\angle AOP = \angle A'OQ$ em comum e, por conseguinte, são semelhantes. Fazendo-se a razão entre as hipotenusas e entre os catetos adjacentes ao ângulo comum, temos que $OP/OA' = OA/OQ$, ou seja $OP\,OQ = OA\,OA'$, o que caracteriza o fato de que Q é a inversão do ponto P.

2.2 Inversão de circunferências

Mostraremos, a seguir que inversão de uma circunferência que não contenha o centro da inversão será uma circunferência. Trataremos desse problema passo a passo.

2.2.1 Circunferências perpendiculares à de inversão.

Consideremos a circunferência da inversão de centro O e raio $\overline{OT}$, e a circunferência a ser invertida de centro C e raio $\overline{CT}$, sendo que $\overline{OT} \perp \overline{CT}$ (veja a figura 3). Dessa forma, o segmento $\overline{OT}$ é tangente à segunda circunferência.

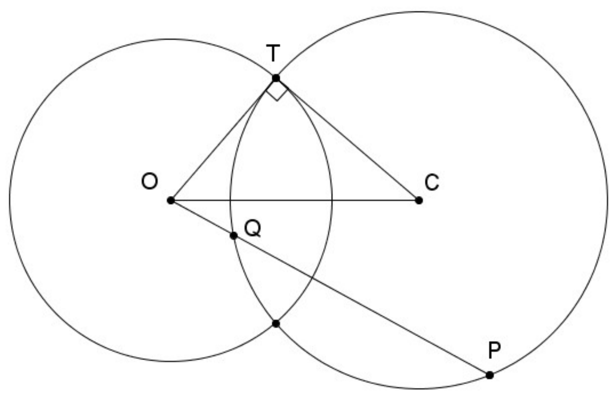


Figura 3: Inversão de uma circunferência perpendicular à da inversão.

Sejam P e Q dois pontos da segunda circunferência alinhados de modo que valha a relação de ordem $O - Q - P$, como na figura 3. A potência do ponto O em relação à segunda circunferência é o produto $OP\,OQ$, que é igual a OT^2. Ora, isso caracteriza o fato de P e Q serem um o inverso do outro pela primeira circunferência.

2.2.2 Circunferências não contendo o centro da inversão

Agora trataremos dos casos em que a circunferência a ser invertida não contenha o ponto O, que é o centro da inversão.

Observação: Uma primeira obsrvação é que a composição de duas inversões por circunferência concêntricas será uma homotetia. Para isso, considere as circunferências $\mathscr{C}_1$ e $\mathscr{C}_2$ de mesmo centro O e respectivos raios ρ_1 e ρ_2. Seja $P \neq O$ um ponto do plano, e sejam $P' = \mathrm{inv}_{\mathscr{C}_1}(P)$ e $P'' = \mathrm{inv}_{\mathscr{C}_2}(P')$. Então, pela definição de inversão, temos que $OP\,OP' = \rho_1^2$ e que $OP'\,OP'' = \rho_2^2$. Dividindo os membros correspondentes da segunda equação pelos da primeira, obtemos $OP''/OP = (\rho_2/\rho_1)^2$, ou seja, $OP'' = \lambda\,OP$, uma homotetia com fator $\lambda = (\rho_2/\rho_1)^2$.

Acompanhe o seguinte raciocínio pela figura 4.

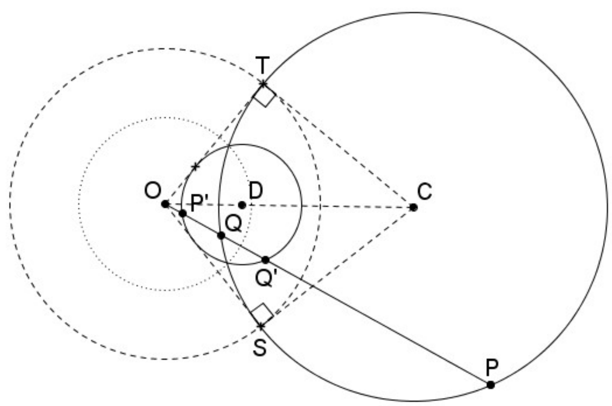


Figura 4: Inversão de circunferência, tal qie o centro da inversão é exterior a ela.

O centro O da circunferência de inversão $\mathscr{C}$ (de raio ρ) está no exterior da circunferência $\mathscr{C}_3$ de centro C e raio CT, sendo que escolhemos o ponto T como um de seus pontos de tangência com a reta r_{OT}. Seja $\mathscr{C}_1$ a circunferência de centro O e raio $\rho_1 = OT$. A inversão $\mathrm{inv}_{\mathscr{C}_1}$ de $\mathscr{C}_3$ é a própria $\mathscr{C}_3$, pois esta é perpendicular à circunferência $\mathscr{C}_1$. Como conjunto, a inversão $\mathrm{inv}_{\mathscr{C}}$ de $\mathscr{C}_3$ é igual à composição de inversões $\mathrm{inv}_{\mathscr{C}} \circ \mathrm{inv}_{\mathscr{C}_1}$ aplicada a ela. Como essa composição de inversões é uma homotetia (de fator $(\rho/\rho_1)^2$), a imagem de $_3$ pela inversão $\mathrm{inv}_{\mathscr{C}}$ é sua imagem pela homotetia de centro O e fator $\lambda = (\rho/\rho_1)^2$, que é outra circunferência.

Perceba que se P for um ponto de $\mathscr{C}_3$ e Q for o outro ponto de $\mathscr{C}_3$ na semirreta $\overrightarrow{OP}$, denotando $P' = \mathrm{inv}_{\mathscr{C}}(P)$ e $Q' = \mathrm{inv}_{\mathscr{C}}(Q)$, então $OP' = \lambda\,OQ$

e $OQ' = \lambda\, OP$. A potência do ponto O em relação à circunferência $\mathscr{C}_3$ é o produto $OP\, OQ = OT^2 = \rho_1^2$. Substituindo-se $OP' = \lambda OQ$, obtemos a relação $OP\, OP' = \rho^2$, que define a inversão.

Agora acompanhe o raciocínio seguinte pela figura 5.

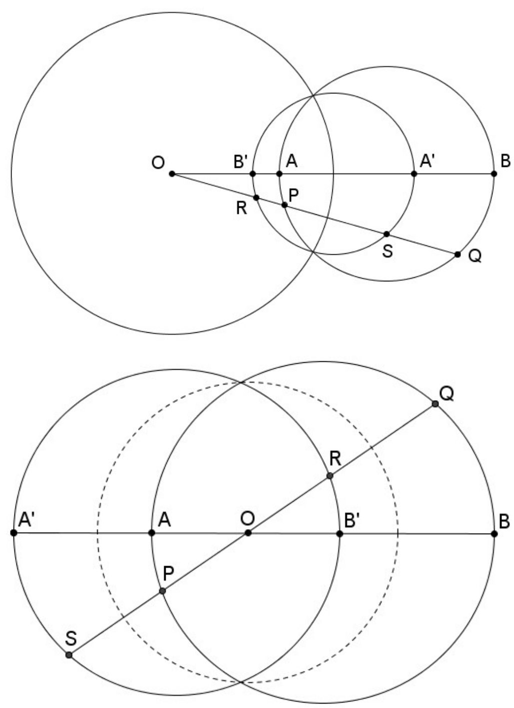


Figura 5:

Seja $\mathscr{C}$ a circunferência de centro O e raio ρ (a circunferência da inversão) e $\mathscr{C}_1$ a circunferência a ser invertida por $\mathscr{C}$ de diâmetro $\overline{AB}$, sendo que vale a relação de ordem de pontos $O - A - B$ (no caso em que O fica no exterior de $\mathscr{C}_1$), ou $A - O - B$ (no caso em que O ficar no interior de $\mathscr{C}_1$). Sejam $A' = \mathrm{inv}_{\mathscr{C}}(A)$ e $B' = \mathrm{inv}_{\mathscr{C}}(B)$. Pela definição de inversão, temos as relações $OA\, OA' = OB\, OB' = \rho^2$. Daí, segue que $OB'/OA = OA'/OB = \rho^2$. No caso em que $O - A - B$, temos que $O - B' - A'$ e, no caso em que $A - O - B$, temos $A' - O - B'$. Nos dois casos, o par de pontos A e B está relacionado com o par de pontos A' e B' por uma homotetia de centro O e fator ρ^2, no primeiro caso, e fator $-\rho^2$ no segundo. Em qualquer dos dois casos, seja $\mathscr{C}_1'$

a circunferência de diâmetro $\overline{A'B'}$.

Mostremos que $\mathscr{C}_1'$ é a imagem de $\mathscr{C}_1$ pela inversão $\mathrm{inv}_{\mathscr{C}}$. Façamos uma reta contendo o ponto O (o centro da inversão) intersectar a circunferência $\mathscr{C}_1$ nos pontos P e Q. Como a circunferência $\mathscr{C}_1'$ é a imagem de $\mathscr{C}_1$ pela homotetia de centro O e fator ρ^2, essa mesma reta intersectará $\mathscr{C}_1'$ em dois pontos R e S. Digamos que $OR = \rho^2\, OP$ e $OS = \rho^2\, OQ$ (contemplando-se os efeitos devidos ao sinal do fator da homotetia). A potência do ponto O em relação às circunferências $\mathscr{C}_1$ e $\mathscr{C}_1'$ manifestam-se nas igualdades $OP\,OQ = OA\,OB$ e $OR\,OS = OA'\,OB'$. Daí, obtemos a igualdade $OP\,\rho^2 OS = OA\,\rho^2 OA'$, ou seja, $OP\,OS = OA\,OA'$. Como S está na semirreta $\overrightarrow{OP}$ (justifique isto!), essa igualdade diz que $S = \mathrm{inv}_{\mathscr{C}}(P)$. Como P é um ponto genérico de $\mathscr{C}_1$, concluímos que a circunferência $\mathscr{C}_1'$ é a imagem de $\mathscr{C}_1$ pela inversão $\mathrm{inv}_{\mathscr{C}}$.

2.3 Inversões preservam ângulos entre curvas

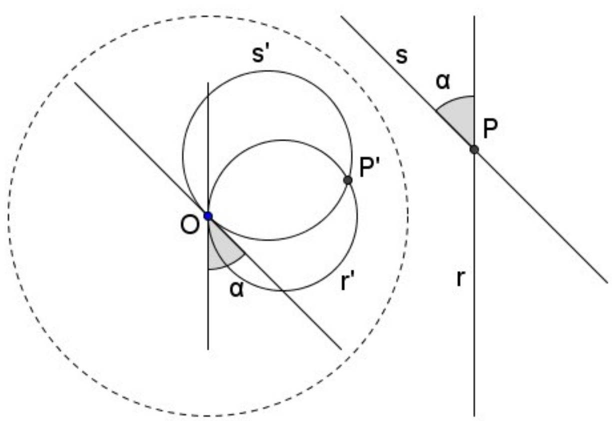


Figura 6: Inversão preserva ângulos.

3 Construções com compasso

Para as construções de pontos usando-se apenas compasso, comecemos com uma das mais simples: dados os pontos distintos A e B, obter o ponto C, tal que estejam na ordem $A - B - C$ e $\overline{AB} \equiv \overline{BC}$. Na figura 7 indicamos a construção: obtemos o ponto P em uma dos semiplanos determinados pela reta r_{AB}, de modo que $\triangle ABP$ seja equilátero (compasso com ponta seca em A e abertura $\overline{AB}$ e compasso com ponta seca em B e mesma abertura); no semiplano determinado pela reta r_{BP} e oposto ao que contém o ponto A, obtemos o ponto Q de modo que $\triangle BPQ$ seja equilátero; por fim, obtemos da mesma maneira o ponto C em semiplano determinado pela reta r_{BQ} e oposto ao que contém o ponto Q. Como o vértice B enxerga um ângulo de 60° em cada um dos três triângulos adjacentes, o ponto C tem que estar alinhado com os ponto A e B. Pela construção, fica claro que $\overline{AB} \equiv \overline{BC}$.

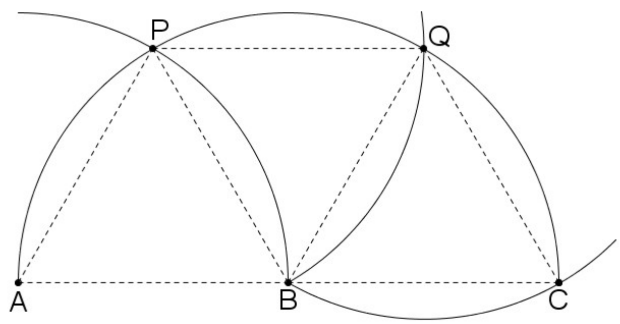


Figura 7:

4 O semiplano de Poincaré

O semiplano de Poincaré é o conjunto $\mathbb{H} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y > o\}$. As retas no sentido de $\mathbb{H}$ serão de dois tipos:

1. $\ell_a = \{(x, y) \in \mathbb{H} : x = a\}$, para qualquer que seja $a \in \mathbb{R}$;
2. $\ell_{x_0,\rho} = \{(x, y) \in \mathbb{H} : (x - x_0)^2 + y^2 = \rho^2\}$, para quaisquer $x_0, \rho \in \mathbb{R}$, tais que $\rho > 0$.

As medidas de ângulos são as mesmas de $\mathbb{R}^2$. Dois segmentos serão considerados congruentes se pudermos sobrepor um dels sobre o outro por meio

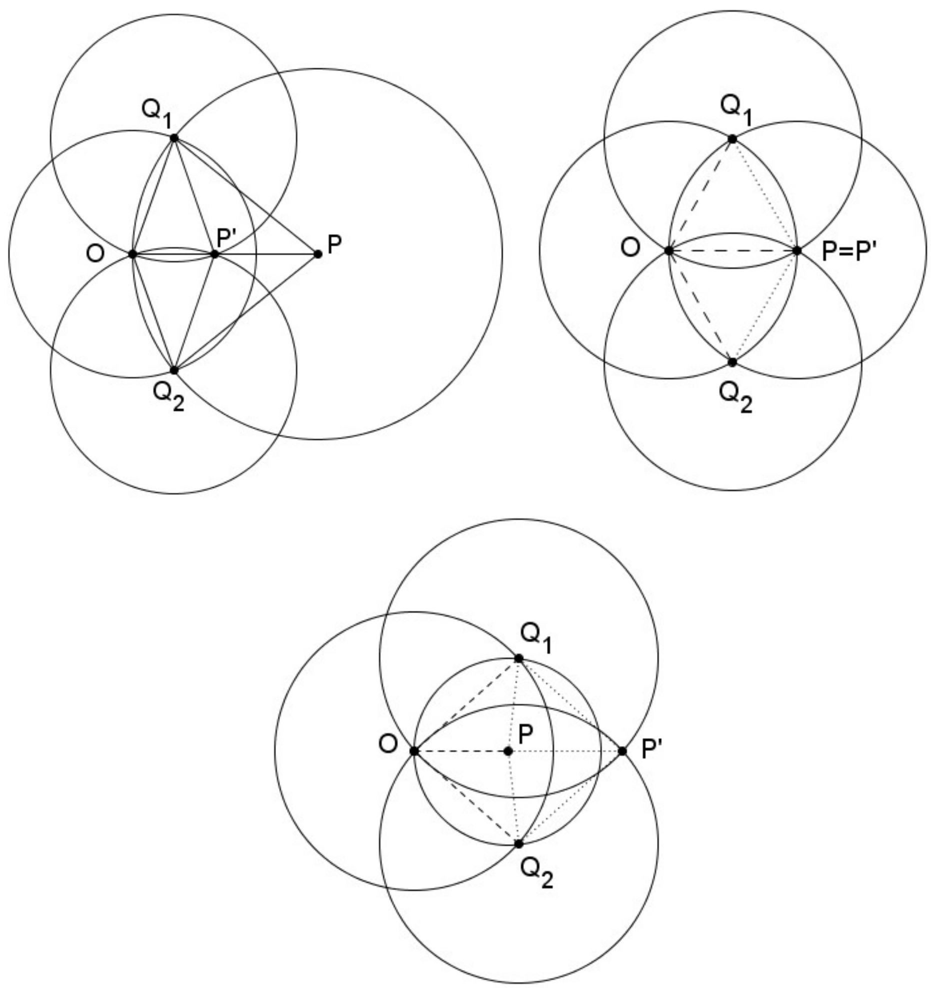


Figura 8: Construção da inversão P' de P usando compasso: caso em que a circunferência de centro P e raio PO intersecta circunferência de inversão em dois pontos.

de *reflexões*, que no caso serão as reflexões usuais de $\mathbb{R}^2$ pelas $\mathbb{H}$-retas ℓ_a e inversões pelas $\mathbb{H}$-retas $\ell_{x_0,\rho}$.

Vamos introduzir *coordenadas* $f_r : r \to \mathbb{R}$, para cada reta r de $\mathbb{H}$, de modo a preservar a ordem (induzida de $\mathbb{R}$) e congruência.

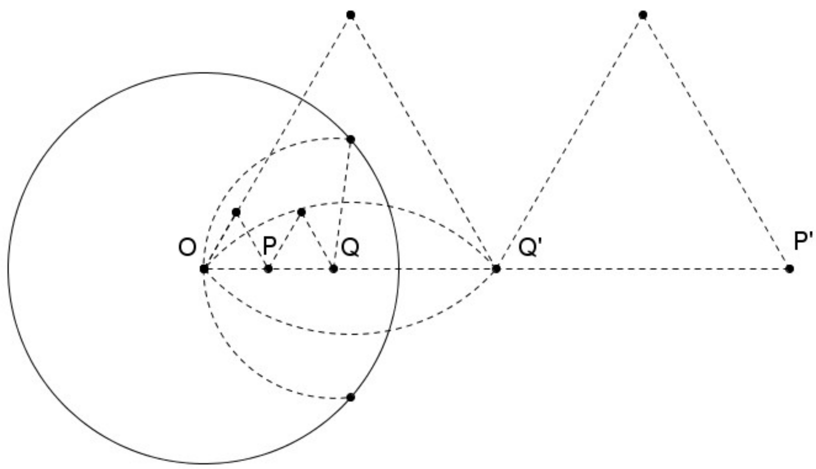


Figura 9: Construção da inversão P' de P usando compasso: caso em que a circunferência de centro P e raio PO não intersecta circunferência de inversão.

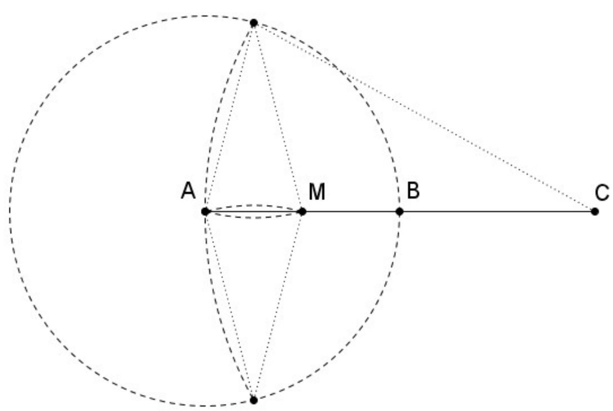


Figura 10: Construção do ponto médio do segmento usando compasso.

Comecemos com coordenadas sobre as retas ℓ_a. Uma tal função f_r deverá satisfazer as seguintes condições:

1. dado que os pontos de ℓ_a têm todos a coordenada x fixa $x = a$, então f_r será apena função da coordenada y;

2. podemos escolher algum $y_0 > 0$ como *ponto de referência*, fazendo $f_r(y_0) = 0$;

3. invertendo o ponto (a, y) (com $y > y_0$) por ℓ_{a,y_0}, obtemos o ponto $(a, y_0^2/y)$ e, podemos impor $f_r(y_0^2/y) = -f_r(y)$, com $f_r(y) > 0$;

4. o ponto médio dos pontos (a, y) e (a, y') é o ponto (a, y''), tal que a inversão pela $\mathbb{H}$-reta $\ell_{a,y''}$ (que passa por (a, y'')) mapeia (a, y) em (a, y') e (a, y') em (a, y); a condição é que $y'' = \sqrt{yy'}$;

5. sejam $y_1, y_2 > y_0$ e sejam $A = (a, y_0)$, $B = (a, y_1)$ e $C = (a, y_2)$; invertendo o ponto (refletindo) $C = (a, y_2)$ por ℓ_{a,y_0}, obtemos $C' = (a, y_0^2/y_2)$ e invertendo (refletindo) C' por $\ell_{a,\sqrt{y_0 y_1}}$ obtemos o ponto $D = (a, y_1 y_2/y_0)$; no caso particular em que $y_0 = 1$, obteríamos $f_r(y_1 y_2) = f_r(y_1) + f_r(y_2)$ (impondo-se a condição de que o segmento $\overline{AD}$ é a soma dos segmentos de extremidades $\overline{AB}$ e $\overline{AC}$);

6. se $y_0 = 1$ uma função f_r que satisfaz as condições acima é $f_r(y) = \ln y$;

7. deslocando-se a *origem* para o ponto (a, y_0), teremos a função $f_r(y) = \ln(y/y_0)$.

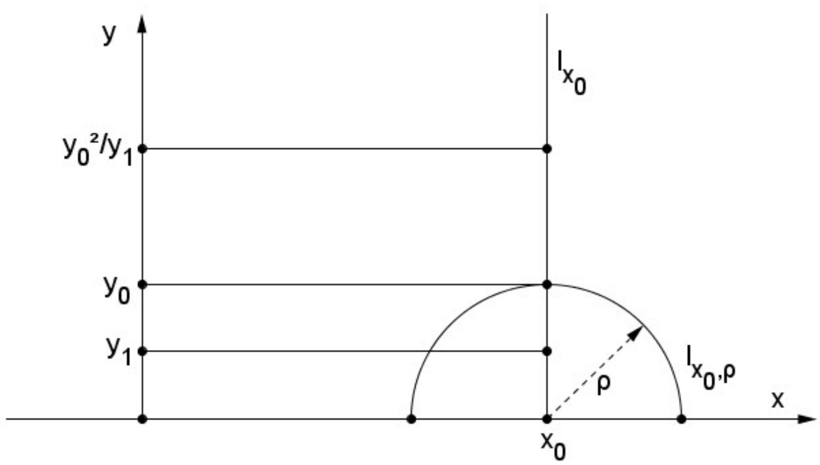


Figura 11:

Para o caso das $\mathbb{H}$-retas $\ell_{x_0,\rho}$, transferimos a função de ℓ_a da forma indicada na figura 12:

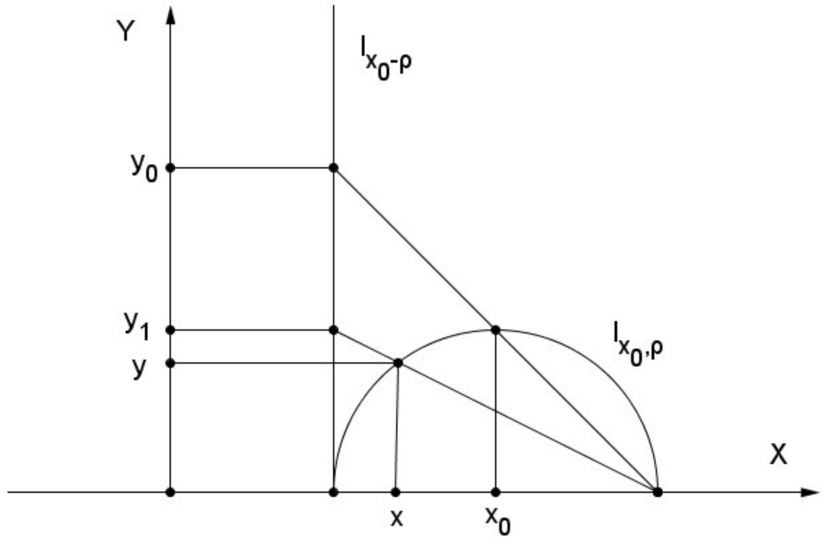


Figura 12:

1. seja $a = x_0 - \rho$; a inversão em $\ell_{x_0+\rho,2\rho}$ leva a $|H$-reta $\ell_{x_0,\rho}$ sobre a $\mathbb{H}$-reta vertical $\ell_{x_0-\rho}$; ligando-se o ponto $(x_0+\rho, 0)$ (o centro da inversão) com um ponto (x, y) de $\ell_{x_0,\rho}$ e prolongando-se o segmento até encontrar $\ell_{x_0-\rho}$ obtemos a inversão daquele ponto;

2. fixando-se o ponto $(x_0, \rho) \in \ell_{x_0,\rho}$ como a origem, sua imagem pela inversão terá coordenadas $(x_0 - \rho, y_0)$, com $y_0 = 2\rho$ (perceba uma simples semelhança de triângulos);

3. o ponto (x, y) será mapeado em (a, y'), com $y' = 2\rho y/(x_0 - x + \rho)$;

4. aqui, $f_r(x, y) = f_{\ell_a}(y')$ (com a origem em $y_0 = 2\rho$), que toma a forma

$$f_r(x,y) = \ln\left(\frac{2\rho y}{2\rho(x_0 - x + \rho)}\right) = \ln\left(\frac{\rho - (x - x - 0)}{y}\right).$$

Para achar o ponto médio do segmento $\overline{AB}$ contido na $\mathbb{H}$-reta $\ell_{x_0,\rho}$, podemos proceder da seguinte maneira (veja a figura 13).

Se $A = (x_A, y_A)$ e $B = (x_B, y_B)$, com $y_A = y_B$, então o ponto médio será $M = (x_0, \rho)$ (exercício: justifique). Se $y_A \neq y_B$, então a $\mathbb{R}^2$-reta r_{AB} encontra

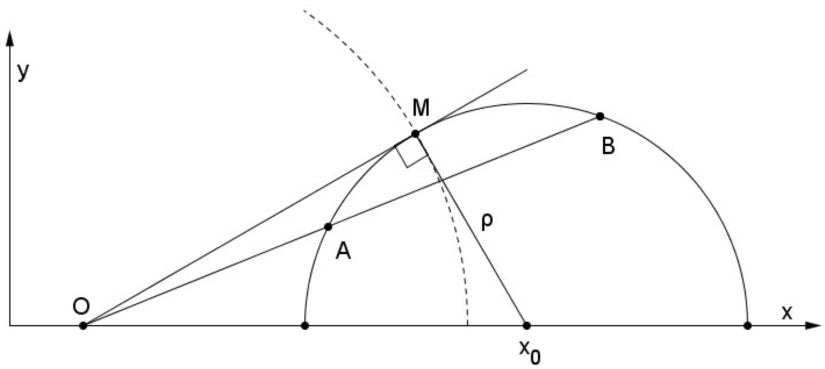
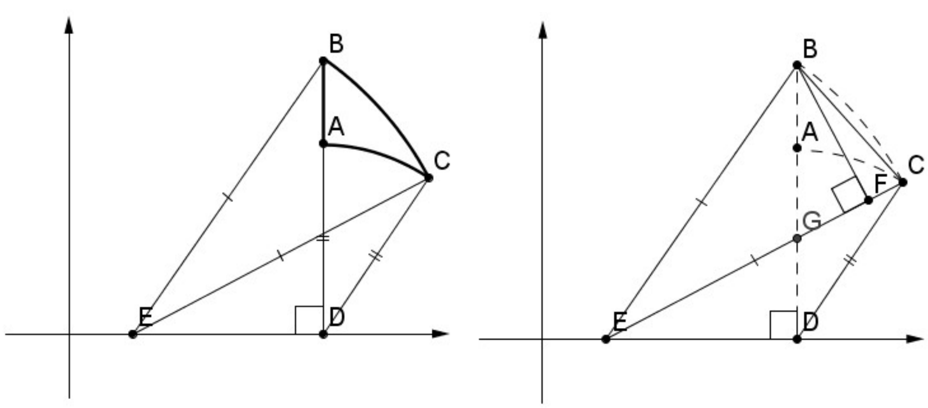
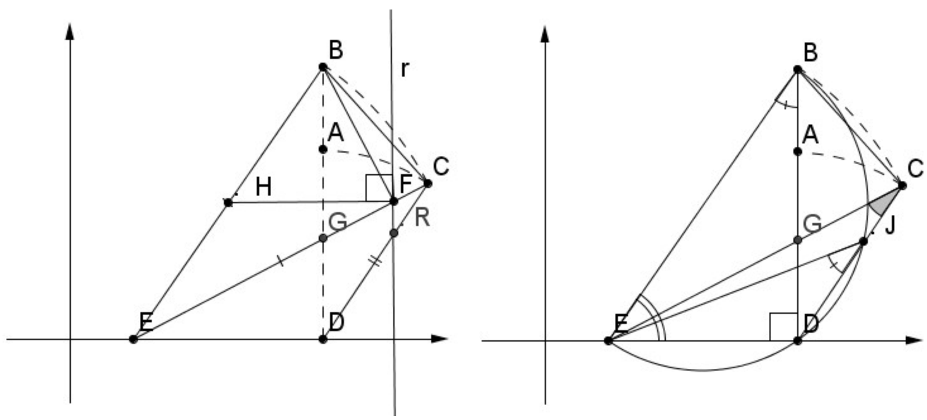


Figura 13:

o eixo x em um ponto O (necessariamente no exterior da circunferência $(x - x_0)^2 + y^2 = \rho^2$. Seja $M \in \ell_{x_0,\rho}$ o ponto tal que a $\mathbb{R}^2$-reta r_{OM} seja tangente a $\ell_{x_0,\rho}$. A $\mathbb{H}$-reta $\ell_{x_0,\rho}$ é perpendicular à circunferênciade centro O e raio $\overline{OM}$, ou seja, como conjunto, a inversão de $\ell_{x_0,\rho}$ por esta circunferência é a própria $\ell_{x_0,\rho}$. Como os pontos A e B estão alinhados com o ponto O, cada um deles é a inversão do outro e, portanto, a $\mathbb{H}$-reflexão de A pela $\mathbb{H}$-reta $\ell_{O,\overline{OM}}$ é B, o que caracteriza o ponto M como sendo o ponto médio do $\mathbb{H}$-segmento $\overline{AB}$.

Como exercício, resolva o mesmo problema analiticamente, e usando a função f_r apropriada, sendo que $A = (1, 2)$ e $B = (3, 4)$.




B
r
A
C
H
F
G
R
E
D
B
A
C
G
J
E
D