MAT-310. G III - RESOLUÇÃO DA 1$^{\text{A}}$ PROVA DE 30/03/2020

(1) Para determinar o lugar geométrico dos pontos do plano cuja diferença das distâncias a duas retas concorrentes desse plano seja igual a um valor dado m, **só falta mostrar** que se o ponto não estiver nas semirretas apresentadas na apostila de sugestões, então ele não pode estar no lugar geométrico pedido. Mostre isso, e apenas isso!

. . . .

Solução: Acompanhe a figura: seja A um ponto de r, tal que $\text{dist}(A, s) = m$, e seja $s' \parallel s$ contendo A. Sejam P e Q dois pontos tais que $\text{dist}(P, r) < \text{dist}(P, s')$ e $\text{dist}(Q, r) > \text{dist}(Q, s')$, como indicados na figura.

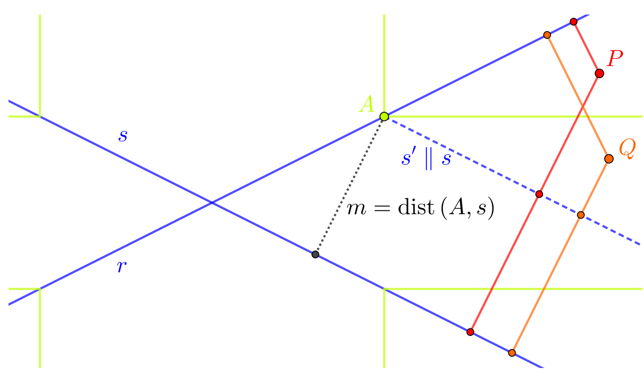

FIGURA 1. Questão 1.

Daí, temos que $\text{dist}(P, s) = \text{dist}(P, s') + \text{dist}(s', s) = \text{dist}(P, s') + m$ e, como $\text{dist}(P, r) < \text{dist}(P, s')$, vale a desigualdade $\text{dist}(P, s) - \text{dist}(P, r) = \text{dist}(P, s') - \text{dist}(P, r) + m > m$ e, do mesmo modo, obtemos que $\text{dist}(Q, s) - \text{dist}(Q, r) < m$. Portanto, tais pontos estão fora do lugar geométrico.

---

(2) Dadas duas cordas $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ de uma circunferência $\mathbb{S}$, encontre um ponto $X \in \mathbb{S}$, tal que as cordas $\overline{AX}$ e $\overline{BX}$ determinem sobre $\overline{CD}$ um segmento $\overline{EF}$ de comprimento dado m.

. . . .

Solução: Alguns de vocês fizeram uma certa confusão aqui. Vamos analisar o problema. Acompanhe a figura.

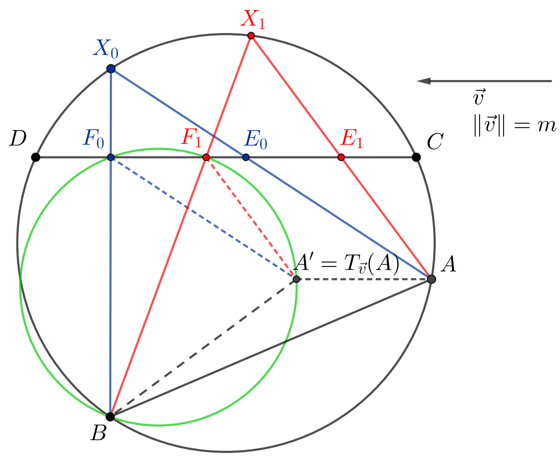

FIGURA 2. Questão 2.

Suponha que tenhamos localizado o ponto X na circunferência e os pontos $E \in \overline{CD} \cap \overline{AX}$ e $F = \overline{CD} \cap \overline{BX}$, de modo que $EF = m$. Seja $\vec{v}$ o vetor de módulo $\|\vec{v}\| = m$, direção paralela à de $\overleftrightarrow{CD}$ e sentido de C para D, e tomemos $A' = T_{\vec{v}}(A)$. Observe que $F = T_{\vec{v}}(E)$. O quadrilátero $AA'FE$ é um paralelogramo e $\angle BXA \equiv \angle BFA'$, ou seja, o ponto F será aquele ponto de $\overline{CD}$, tal que $\angle BFA' \equiv \angle BXA \equiv \angle BDA$.

Assim, para localizarmos o ponto $F \in \overline{CD}$ e, portanto o ponto X na circunferência, construímos um triângulo $\triangle BA'Q \equiv \triangle BAD$ e a circunferência que o circunscrever intersectará $\overline{CD}$ no ponto F desejado.

Observe que o problema pode ter duas, somente uma ou nenhuma solução.

---

(3) Sejam $A = (0, 0)$, $B = (1, 0)$, $C = (0, 2)$ e $M = (3, 3)$. Determine as coordenadas dos vértices do triângulo $\triangle A'B'C'$, onde $A' = R_M(A)$, $B' = R_M(B)$ e $C' = R_M(C)$ (reflexões pelo ponto M).

. . . .

Solução: Observe que $R_M(x, y) = (3, 3) + (3 - x, 3 - y) = (6 - x, 6 - y)$:

Assim, obtemos $A' = (6, 6)$; $B' = (5, 6)$, $C' = (6, 4)$.

---

(4) Seja $\triangle ABC$ um triângulo equilátero, cujos vértices estejam nomeados no sentido anti-horário. Mostre que a composição de rotações resulta na rotação indicada (ângulos em graus): $R_{A,120} \circ R_{B,120} =$

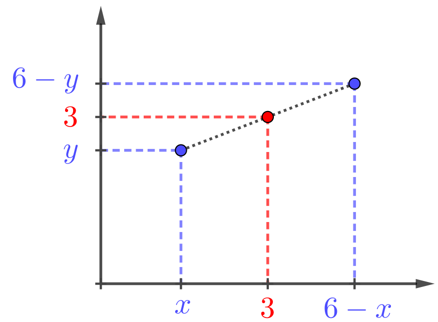

FIGURA 3. Questão 3.

$R_{C,-120}$. [Sugestão: Faça um desenho. Você precisa mostrar apenas que C é ponto fixo da composição.]

. . . .

Solução: Seja $C' = R_{B,120}(C)$. Observe que $\overrightarrow{BA}$ é a semirreta bissetriz do ângulo orientado $\angle CBC'$ e $\overrightarrow{AB}$ é a semirreta bissetriz do ângulo orientado $\angle C'AC$. Daí, $C = R_{A,120}(C')$, ou seja, C é o ponto fixo de $R_{A,120} \circ R_{B,120}$.

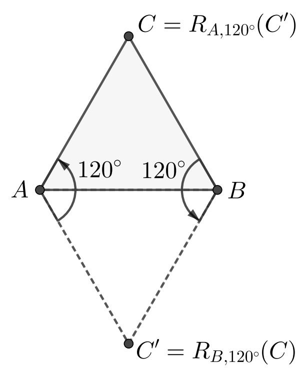

FIGURA 4. Questão 4.