MAT-310. G III. SEGUNDA PROVA. 01/06/2020

Cada questão vale 2,5 pontos.

1. Determine os vértices A, B e C do triângulo $\triangle ABC$, conhecendo-se os pontos médios das arestas $L = (3,4) \in \overline{BC}$, $M = (0,1) \in \overline{AC}$ e $N = (2,0) \in \overline{AB}$. [*Sugestão: Composição de rotações de* $180°$. *Ache o ponto fixo. Observe que se* $P' = R_{O,\pi}(P)$, *então* M *é o ponto médio de* $\overline{PP'}$.]

....

Solução. A composição de três rotações de ângulo π (ou 180^{circ}) é uma rotação de π. Observe que $A = R_{M,\pi} \circ R_{L,\pi} \circ R_{N,\pi}(A)$, ou seja, A é o ponto fixo dessa composição. A dica diz como achar tal ponto fixo. Tomemos um ponto P, que escolho (arbitrariamente) $P = N = (2,0)$. Daí, $N_1 = R_{N,\pi}(N) = N = (2,0)$, $N_2 = R_{L,\pi}(N_1) = (4,8)$ e $N_3 = P' = R_{M,\pi}(N_2) = (-4,-6)$. O ponto A será o ponto médio de $\overline{PP'}$, que é $A = (-1,-3)$. Os outros vértices são $B = R_{N,\pi}(A) = (5,3)$, e $C = R_{L,\pi}(B) = (1,5)$.

2. Dados três pontos distintos O, P e Q, construir um triângulo equilátero cujo centro seja O e P e Q pertencem a retas suporte de duas arestas. [*Sugestão: com qual ângulo o centro* O *enxerga um par de vértices*?]

....

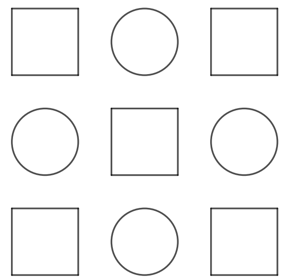
Solução. Se $\triangle ABC$ for o triângulo procurado, com os vértices nomeados em sentido anti-horário, então $m(A\hat{O}B) = m(B\hat{O}C) = m(C\hat{O}A) = 2\pi/3$ (ou $120°$). Se $P \in \overleftrightarrow{AB}$ e $Q \in \overleftrightarrow{BC}$, então $P' = R_{O,2\pi/3}(P) \in \overleftrightarrow{BC}$ (pois $B = R_{O,2\pi/3}(A)$ e $C = R_{O,2\pi/3}(B)$ e, portanto $R_{O,2\pi/3}(\overleftrightarrow{AB}) = \overleftrightarrow{BC}$), ou seja, $\overleftrightarrow{BC} = \overleftrightarrow{QP'}$. Do mesmo modo temos que $Q' = R_{O,-2\pi/3}(Q) \in \overleftrightarrow{AB}$. Daí, o ponto B fica determinado pela interseção $\overleftrightarrow{PQ'} \cap \overleftrightarrow{P'Q}$. Uma vez tendo o vértice B, obtemos os outros dois vértices fazendo, por exemplo, as rotações $A = R_{O,-2\pi/3}(B)$ e $C = R_{O,2\pi/3}(B)$. Outra solução, seria tomar os pontos $P'' = R_{O,2\pi/3}(P')$, $Q'' = R_{O,2\pi/3}(Q)$ e obter $A \in \overleftrightarrow{PQ'} \cap \overleftrightarrow{P''Q''}$ e $C \in \overleftrightarrow{P'Q} \cap \overleftrightarrow{P''Q''}$.

Esse problema admite duas soluções: o triângulo $\triangle ABC$ pode ter seus vértices nomeados em sentido horário e, portanto, começamos com $P' = R_{-2\pi/3}(P)$, etc.

Pode acontecer de P' coincidir com Q. Nesse caso, existem infinitas soluções: qualquer reta contendo P, mas não Q será levada pela rotação a uma reta contendo Q, etc.

---

3. Quais são as rotações (indique os centros e os ângulos) que deixam a figura ao lado invariante (um ladrilhamento do plano por quadrados e circunferências; o padrão repete-se por todo o plano).

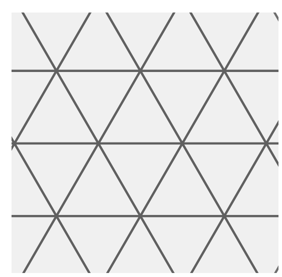


Solução. As circunferências devem ser levadas em circunferências e quadrados em quadrados.

Assim, temos rotações de $n\pi/2$ centradas nos centros das circunferências e dos quadrados e rotações de π centradas nos pontos médios entre dois quadrados adjacentes (ou duas circunferências adjacentes).

---

4. Quais são as rotações (indique os centros e os ângulos) que deixam a figura ao lado invariante (um ladrilhamento do plano por triângulos equiláteros; o padrão repete-se por todo o plano).



Solução. Triângulos devem ser levados em triângulos (vértices em vértices).

Assim, as rotações são: rotações de $n\pi/3$ centradas nos vértices dos triângulos; rotações de $2m\pi/3$ centradas nos centros dos triângulos, e rotações de π centradas nos pontos médios das arestas dos triângulos.
