MAT-310. G III. QUARTA PROVA. 06/07/2020

Cada questão vale 2,5 pontos.

1. Determine os vértices A, B e C do $\triangle ABC$, dados os pontos médios dos lados $L = (0, -1) \in \overline{AB}$, $M = (3, 2) \in \overline{BC}$ e $N = (1, 1) \in \overline{AC}$.

. . . .

Solução. Os vértices do triângulo devem satisfazer $B = R_L(A)$, $C = R_M(B)$ e $A = R_N(C)$ (reflexões por pontos, ou, o que é a mesma coisa, rotações de π, ou $180°$). Assim, $A = R_N \circ R_M \circ R_L(A)$, o ponto fixo da composição, que também será uma reflexão por ponto (ou seja, $R_N \circ R_M \circ R_L = R_A$).

Para obtermos o ponto A, basta escolher um ponto P qualquer e obter $P' = R_N \circ R_M \circ R_L(P)$, donde obtemos $A \in \overline{PP'}$ o ponto médio do segmento. Por exemplo, se $P = L = (0, -1)$, $R_L(P) = P$, $R_M(P) = (6, 5)$, $R_N(6, 5) = (-4, -3) = P'$. O ponto médio de $\overline{PP'}$ é $A = (-2, -2)$. Daí, $B = R_L(A) = (2, 0)$ e $C = R_M(B) = (4, 4)$.

---

2. Diga como determinar os vértices do quadrilátero $ABCD$, conhecendo-se os pontos P, Q, R e S, tais que $\triangle PAB$, $\triangle QBC$, $\triangle RCD$ e $\triangle SDA$ sejam equiláteros. [Sugestão: composição de rotações.]

. . . .

Solução. Para facilitar a referência às rotações, podemos supor que os vértices quadrilátero $PQRS$ sejam nomeados no sentido anti-horário (ou seja, o quadrilátero $ABCD$ também será nomeado em sentido anti-horário).

Análise da Solução Procurada. Suponha, primeiramente, $ABCD$ conhecido. Aplicando-se rotações, temos $B = R_{P,\pi/3}(A)$, $C = R_{Q,\pi/3}(B)$, $D = R_{R,\pi/3}(C)$ e $A = R_{S,\pi/3}(D)$. Daí, temos que A é um ponto fixo da composição $f = R_{S,\pi/3} \circ R_{R,\pi/3} \circ R_{Q,\pi/3} \circ R_{P,\pi/3}$. Como $4 \times \pi/3$ não é múltiplo inteiro de 2π, essa composição é uma rotação de ângulo $4\pi/3$. O centro da rotação é o único ponto fixo de f, o ponto A.

Construção. Escolha qualquer par de pontos distintos G e H e aplique a composição f a eles, obtendo $G' = f(G)$ e $H' = f(H)$. Sabemos que os segmentos $\overline{GH}$ e $\overline{G'H'}$ formam uma ângulo orientado de $4\pi/3$, ou $-2\pi/3$. O centro da rotação f é o encontro das mediatrizes de $\overline{GG'}$ e $\overline{HH'}$, ou, se estas coincidirem, o encontro das retas $\overleftrightarrow{GH}$ e $\overleftrightarrow{G'H'}$.

Outra possibilidade, trace o arco capaz do ângulo orientado de $-2\pi/3$ do segmento $\overline{GG'}$ e também sua mediatriz. O encontro da mediatriz com o arco é o centro da rotação.

---

3. Seja $ABCD$ um losango não quadrado (um paralelogramo, cujos lados sejam todos iguais entre si, mas que não tenha ângulo reto, algo assim: $\diamondsuit$). Quais são as retas que deixam $ABCD$ invariante por reflexão?

. . . .

Solução. Tal losango possui dois ângulos agudos e dois obtusos, cada par congruente entre si, $B\hat{A}D \equiv B\hat{C}D$ e $A\hat{B}C \equiv A\hat{D}C$. Reflexões pelas retas (diagonais) $\overleftrightarrow{AC}$ e $\overleftrightarrow{BD}$ deixam a figura invariante. Nenhuma outra reta deixa a figura invariante, pois para ser invariante, vértice tem que ser mapeado em vértice e, portanto, a reta de reflexão deve ser a mediatriz do segmento ligando tais segmentos. O losango não é um quadrado, o que implica que as mediatrizes dos lados do losango não deixam a figura invariante.

---

4. Determine as coordenadas do vetor $\vec{v}$ e uma equação da reta ℓ da reflexão transladada $f = T_{\vec{v}} \circ R_\ell$, com $\vec{v} \parallel \ell$, de modo que $f = T_{\vec{w}} \circ R_m$, onde $\vec{w} = (3, 1)$ e $m : x + y = 4$.

. . . .

Solução. Escreva $\vec{w} = \vec{u} + \vec{v}$, onde $\vec{v} \parallel m$ e $\vec{u} \perp m$: $\vec{u} = (2, 2)$ e $\vec{v} = (1, -1)$. Para achar a equação da reta $\ell : x + y = c$, considere a composição $R_\ell = T_{\vec{u}} \circ R_m$. Para isso, tomemos um ponto $P = (0, 0)$, por exemplo, e calculamos $P' = T_{\vec{u}} \circ R_m(P) = (6, 6)$. A reta ℓ será a mediatriz de $\overline{PP'}$ (que passa pelo ponto $(3, 3)$), ou seja, a reta $x+y = 6$.
