MAT-310: NOTAS DE AULA: REFLEXÕES POR RETAS E REFLEXÕES TRANSLADADAS

RICARDO BIANCONI

RESUMO. Teoria, aplicações e exercícios sobre reflexões por retas, reflexões transladadas e classificação das isometrias.

1. Preliminares

Vamos começar definindo reflexões por retas. Veremos mais adiante que com a composição de até três delas podemos gerar todas as isometrias.

Definição 1. Dada uma reta s, a reflexão por m é a transformação do plano R_s definida por:

(a) se P for um ponto de s, então $R_s(P) = P$;
(b) se Q não for ponto de s, então $R_s(Q) = Q'$, onde Q' está em semiplano oposto ao de Q de origem s, $\overline{QQ'} \perp s$ e, se $Q - S - Q'$, com S em s, então $QS = SQ'$.

Proposição 1. Reflexões por retas são isometrias.

Demonstração. Sejam P e Q dois pontos distintos. Consideremos as várias posições que eles podem ter.

Caso 1. Ambos os pontos estão em s. Neste caso, $R_s(P) = P$ e $R_s(Q) = Q$, ou seja, R_s é a identidade, uma isometria, quando restrita a s.

Caso 2. Somente um dos dois pontos está em s, P digamos. Sejam $Q' = R_s(Q)$ e S em s, tal que $Q - S - Q'$. Por LAL, $\triangle PSQ \equiv \triangle PSQ'$ e, portanto $PQ = PQ'$.

Caso 3. Ambos os pontos estão em um mesmo semiplano de origem s. Sejam $P' = R_s(P)$, $Q' = R_s(Q)$, e S e T em s, tais que $P - S - P'$ e $Q - T - Q'$.

Suponhamos primeiramente que $S \neq T$. Por LAL, $\triangle PST \equiv \triangle P'ST$ e, portanto, $\triangle TQP \equiv \triangle TQ'P'$, do que concluímos que $PQ = P'Q'$.

Se $S = T$, os pontos P, P', Q e Q' são colineares e a diferença de segmentos permite-nos concluir que $PQ = P'Q'$.

Caso 4. P e Q estão em semiplanos opostos de origem s. Sejam $P' = R_s(P)$, $Q' = R_s(Q)$, e S e T em s, tais que $P - S - P'$ e $Q - T - Q'$.

Suponhamos primeiramente que $S \neq T$. Por LAL, $\triangle PST \equiv \triangle P'ST$ e, portanto, $\triangle TQ'P \equiv \triangle TQP'$, ou seja, temos que $PQ' = P'Q$. Daí, o quadrilátero $PQ'QP$ é um retângulo, ou um trapézio isósceles. Em ambos os casos, as diagonais são congruentes, ou seja, $PQ = P'Q'$.

No caso em que $S = T$ argumentamos por soma de segmentos. $\square$

Observação 1. A definição deixa claro que os únicos pontos fixos de R_s são os pontos de s. As retas invariantes são s e todas as retas perpendiculares a s.

Observação 2. Reflexões por retas invertem a orientação das figuras: se o triângulo $\triangle ABC$ tem seus v'ertices nomeados no sentido anti-horário, então sua imagem $\triangle A'B'C'$ por R_s tem seus vértices nomeados em sentido horário. Translações e rotações mantêm a orientação de figuras.

2. Composições de Reflexões

Estudemos primeiramente a composição de duas reflexões por retas.

Proposição 2. Sejam r e s duas retas.

(1) Se $r = s$, então $R_s \circ R_s = I$, a identidade.
(2) Se $r \parallel s$, então $R_r \circ R_s = T_{\vec{v}}$, onde $\vec{v}$ é o vetor cujo módulo é $\|\vec{v}\| = 2\,\mathrm{dist}(r, s)$ (o dobro da distância de r a s), sua direção é perpendicular às retas e o sentido vai de s a r.
(3) Se r e s forem concorrentes em um ponto O, então $R_r \circ R_s = R_{O,2\alpha}$, onde α é o ângulo agudo ou reto orientado de s a r.

Demonstração. **(1)** A definição de reflexão por reta implica imediatamente que $R_r = R_r^{-1}$, ou seja, $R_r \circ R_r = I$.

(2) Dado o ponto P, sejam $P'' = R_s(P)$ e $P' = R_r(P'')$. Como $r \parallel s$, os pontos P, P' e P'' estarão numa mesma reta t perpendicular a r e s. Sejam H_1 o semiplano de origem s e não contendo r, H_2 o semiplano de origem r e não contendo s e H_3 a interseção dos semiplanos de origem cada uma dessas retas e contendo a outra (H_3 é a região entre as duas retas).

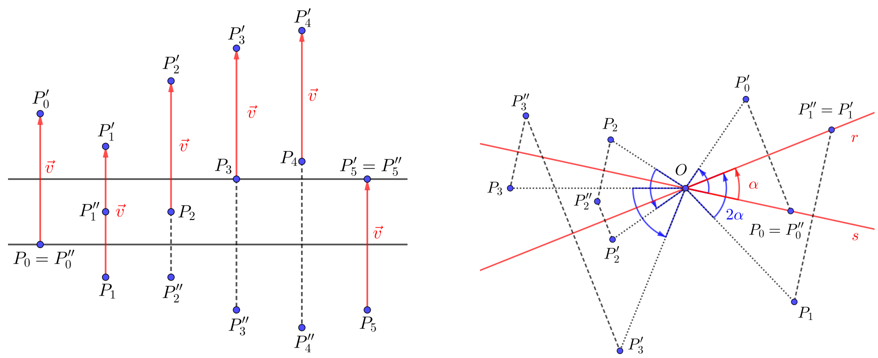

FIGURA 1. Composição de reflexões por duas retas parralelas e por duas concorrentes. Para cada $i \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$, $P_i'' = R_s(P_i)$ e $P_i' = R_r(P_i'')$.

(3) Pela definição de reflexão por retas, se O for o ponto comum a r e s, então $R_r \circ R_s(O) = O$. Seja P outro ponto fixo da composição, $R_r \circ R_s(P) = P$. Se $P \neq O$ outro ponto, sejam $P'' = R_s(P)$ e $P' = R_r(P'')$

Seja $P \neq O$ outro ponto e sejam $P'' = R_s(P)$ e $P' = R_r(P'')$.

Como a composição $R_r \circ R_s$ é uma isometria, o triângulo $\triangle POP'$ é isósceles (com base $\overline{PP'}$ e lados $\overline{OP} \equiv \overline{OP'}$). Se P estiver em s, então $P'' = P$ e r será a mediatriz de $\overline{PP'}$, que também será a bissetriz de $P\hat{O}P'$. Nesse caso, $P' = R_{O,2\alpha}(P)$. Se P não estiver em s, então $\triangle POP''$ e $\triangle P'OP''$ também serão isósceles (ou $P' = P''$ se P'' estiver em r). Seja qual for a configuração ($P' = P''$, ou $P' \neq P''$ e $P \in \mathrm{int}(P''\hat{O}P')$, ou $P' \in \mathrm{int}(P\hat{O}P'')$, ou $P'' \in \mathrm{int}(P\hat{O}P')$), $P' = R_{O,2\alpha}(P)$. $\square$

3. Reflexões Transladadas

Reservamos esta Seção para a composição de uma reflexão por uma reta e uma translação por um vetor que tenha componente não nula na direção dessa reta. Aqui surge um novo tipo de isometria.

Consideremos primeiramente o caso em que o vetor é paralelo à reta.

Proposição 3. Sejam r uma reta e $\vec{v}$ um vetor não nulo e paralelo à reta r. Então $T_{\vec{v}} \circ R_r = R_r \circ T_{\vec{v}}$ e essa transformação não tem pontos fixos e r é sua única reta invariante.

Demonstração. Se P estiver em r, então $T_{\vec{v}}(P)$ também estará em r. Assim, fica claro que r é invariante pela transformação e que $T_{\vec{v}} \circ R_r(P) = R_r \circ T_{\vec{v}}(P)$. Se P não estiver em r, então $PP'P''P'''$ forma um retângulo, onde $P' = R_r(P)$, $P'' = T_{\vec{v}}(P')$ e $P''' = T_{\vec{v}}(P)$. Observe que $P'' = R_r(P''')$. Assim, vale a comutatividade, $T_{\vec{v}} \circ R_r = R_r \circ T_{\vec{v}}$. Fica claro também que a transformação não tem pontos fixos.

Seja agora s uma outra reta. Se $s \parallel r$, então sua imagem por $F = T_{\vec{v}} \circ R_r$ é uma reta s' no semiplano de origem r e oposto àquele que contém a reta s, ou seja, $s' \neq s$. Se $s \perp r$, então sua imagem $s' = F(s)$ também é perpendicular a r, mas deslocada pelo vetor $\vec{v}$. Nesse caso, $s' \neq s$. Se s for concorrente com r e forma um ângulo agudo orientado medindo α, com $0 < |\alpha| < \pi/2$, então $s' = F(s)$ será uma reta concorrente com r, mas formando um ângulo orientado agudo medindo $-\alpha$. Nesse caso, também vale a desigualdade $s' \neq s$. Com isso, mostramos que nenhuma outra reta distinta de r pode ser invariante pela transformação. $\square$

A Proposição mostra que essa transformação não pode ser uma simples reflexão por reta (tem infinitos pontos fixos e infinitas retas invariantes), nem uma rotação (tem um único ponto fixo) e nem uma simples translação (nenhum ponto fixo e infinitas retas invariantes), ou seja, é um novo tipo de isometria.

Definição 2 (Reflexões Transladadas)**.** Sejam r uma reta e $\vec{v}$ um vetor não nulo e paralelo à reta r. A isometria $T_{\vec{v}} \circ R_r$ é chamada de *reflexão transladada*. A reta r é o seu *eixo*.

Observação 3. Sejam r uma reta e $\vec{v}$ um vetor não nulo e paralelo à reta r e $\vec{w}$ um vetor (não nulo) perpendicular a r e seja $\vec{u} = \vec{v} + \vec{w}$. Sabemos que translações comutam entre si, ou seja, $T_{\vec{v}} \circ T_{\vec{w}} = T_{\vec{v}+\vec{w}} = T_{\vec{w}} \circ T_{\vec{v}}$. Daí, $T_{\vec{u}} \circ R_r = T_{\vec{v}} \circ (T_{\vec{w}} \circ R_r) = T_{\vec{v}} \circ R_s$, onde s é a reta $T_{\vec{w}/2}(r)$, que é paralela a r, ou seja, $T_{\vec{u}} \circ R_r$ é a reflexão transladada $T_{\vec{v}} \circ R_s$.

4. Reflexões por Retas em Coordenadas

Consideremos um sistema de coordenadas ortonormal no plano, que é a escolha de um ponto de referência (a *origem*) e dois eixos perpendiculares entre si (na origem) e com *réguas calibradas*, ou seja, bijeções entre os pontos dos eixos e o conjunto de números reais $\mathbb{R}$, como se faz na Geometria Analítica.

Observação 4. Retas no plano podem ser representadas de (pelo menos) duas maneiras: equações em coordenadas e equações vetoriais: $ax+by+c = 0$, ou $(x, y) = (x_0, y_0)+t(u, v)$, onde $(a, b) \neq (0, 0)$, (x_0, y_0)

é um ponto qualquer da reta (mas fixo) e $(u, v) \neq (0, 0)$ um vetor paralela à reta. Para passar de uma forma à outra é simples: selecione duas soluções distintas (x_0, y_0) e (x_1, y_1) da equação $ax+by+c = 0$ e escreva a equação $(x, y) = (x_0, y_0) + t(u, v)$, onde $(u, v) = (x_1 - x_0, y_1 - y_0)$ (ou qualquer múltiplo não nulo dele). No caminho inverso, partimos da equação vetorial $(x, y) = (x_0, y_0) + t(u, v)$ e isolamos t em uma das equações e substituímos na outra. Fica como exercício mostrar que

$$\begin{array}{rcl} ax + by + c = 0 & \mapsto & (x, y) = (x_0, y_0) + t(b, -a), \\ (x, y) = (x_0, y_0) + t(u, v) & \mapsto & (-v)x + uy + (vx_0 - uy_0) = 0, \end{array}$$

onde (x_0, y_0) é um ponto qualquer da reta.

Proposição 4. A expressão da reflexão pela reta m de equação $ax + by + c = 0$ em coordenadas é

$$\boxed{R_m(x, y) = \frac{1}{a^2 + b^2} \begin{pmatrix} (b^2 - a^2)x - 2aby \\ -2abx + (a^2 - b^2)y \end{pmatrix} - \frac{2c}{a^2 + b^2} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}}$$

Demonstração. Para a determinação dessa expressão, é conveniente trabalharmos com uma equação vetorial da reta. Seja (x_0, y_0) um ponto da reta, ou seja, $ax_0 + by_0 + c = 0$, cuja equação vetorial é $(x, y) = (x_0, y_0) + t(-b, a)$.

Consideremos primeiramente o caso em que $c = 0$ (a reta m contém a origem $(0, 0)$). Uma equação vetorial é $(x, y) = t(-a, b)$, com $(x_0, y_0) = (0, 0)$.

Seja $P = (\bar{x}, \bar{y})$ um ponto do plano e $P' = R_m(P)$. Determinemos suas coordenadas.

Suponhamos que P não pertenç à reta m ($a\bar{x} + b\bar{y} \neq 0$). O ponto P' estará na reta de equação $(w, z) = (\bar{x}, \bar{y}) + \lambda(a, b)$, que é perpendicular à reta m. O ponto Q de interseção das duas retas tem coordenadas $Q = (b^2\bar{x} - ab\bar{y}, -ab\bar{x} + a^2\bar{y})/(a^2 + b^2)$. Para isso, resolva o sistema em t e λ:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} -bt & = & \bar{x} + a\lambda \\ +at & = & \bar{y} + b\lambda \end{array} \right.$$

Daí, $P' = (\bar{x}', \bar{y}') = P + 2(Q - P) = 2Q - P = ((b^2 - a^2)\bar{x} - ab\bar{y}, -ab\bar{x} + (a^2 - b^2)\bar{y})/(a^2 + b^2)$, ou em forma matricial,

$$\begin{pmatrix} \bar{x}' \\ \bar{y}' \end{pmatrix} = \frac{1}{a^2 + b^2} \begin{pmatrix} b^2 - a^2 & -ab \\ -ab & a^2 - b^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Para o caso geral, usamos um truque. Se a reta m contiver o ponto (x_0, y_0), a reta $m' = T_{\vec{v}}(m)$ conterá a origem $(0, 0)$, onde $\vec{v} = O - P =$

$(-x_0, -y_0)$. Representamos, então a reflexão R_m como a composição $R_m = T_{-\vec{v}} \circ R_{m'} \circ T_{\vec{v}}$. Assim,

$$\begin{pmatrix} \bar{x}' \\ \bar{y}' \end{pmatrix} = \frac{1}{a^2+b^2} \begin{pmatrix} (b^2-a^2)x - 2aby \\ -2abx + (a^2-b^2)y \end{pmatrix} - \frac{2c}{a^2+b^2} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

Com isso, terminamos a dedução da fórmula. □

Exemplo 1. A reflexão pela reta $m : x = 0$ (eixo y) é $R_m(x, y) = (-x, y)$. Aqui temos $a = 1$, $b = c = 0$.

Exemplo 2. A reflexão pela reta $m : y = x$ (com $a = 1$, $b = -1$ e $c = 0$) é $R_m(x, y) = (y, x)$.

Exemplo 3. A reflexão pela reta $m : y = 2x + 1$ (com $a = 2$, $b = -1$ e $c = 1$) é

$$R_m(x, y) = \left(\frac{-3x + 4y - 4}{5}, \frac{4x + 3y + 2}{5} \right).$$

Exemplo 4. Determinemos a composição $R_{m_1} \circ R_{m_2}$, onde $m_1; x = 0$ e $m_2 : y = 0$. Temos que para m_1, $a_1 = 1$, $b_1 = c_1 = 0$, $R_{m_1}(s, t) = (-s, t)$; para m_2, $b_2 = 1$, $a_2 = c_2 = 0$, $R_{m_2}(x, y) = (x, -y)$. Daí, $R_{m_1} \circ R_{m_2}(x, y) = R_{m_1}(x, -y) = (-x, -y)$, que é a rotação de π em torno da origem.

Exemplo 5. Determinemos a composição $R_{m_1} \circ R_{m_2}$, onde $m_1; x = 0$ e $m_2 : y = a$. Temos que para m_1, $a_1 = 1$, $b_1 = c_1 = 0$, $R_{m_1}(s, t) = (-s, t)$; para m_2, $b_2 = 1$, $b_2 = -1$, $c_2 = 0$, $R_{m_2}(x, y) = (y, x)$. Daí, $R_{m_1} \circ R_{m_2}(x, y) = R_{m_1}(y, x) = (-y, x)$, que é a rotação de $\pi/2$ em torno da origem.

5. Aplicações

Exemplo 6. A bissetriz r de um ângulo $A\hat{O}B$ é seu *eixo de simetria*, ou seja a imagem do ângulo por R_r é ele mesmo. A imagem da semirreta $\overrightarrow{OA}$é a semirreta $\overrightarrow{OB}$ e vice-versa.

Exercício 1. Dado o triângulo $\triangle ABC$, as três (retas) bissetrizes dos ângulos internos encontram-se num mesmo ponto (o *incentro*). Mostre que a bissetriz do ângulo interno em um vértice encontra as duas bissetrizes dos ângulos externos dos outros dois vértices em um mesmo ponto (um ex-incentro).

Exemplo 7. Dada três retas distintas r, s e t concorrentes em um ponto O e um ponto A em r distinto de O, determinemos um triângulo

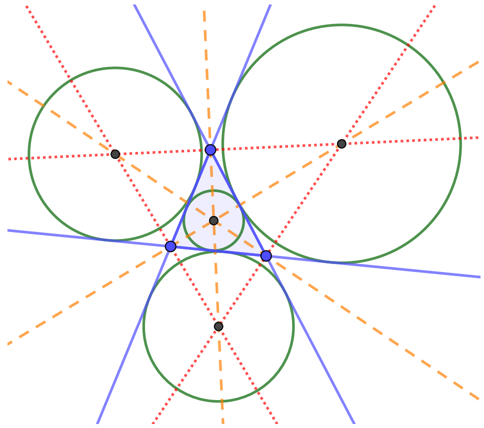

FIGURA 2. O incentro e os três ex-incentros de um triângulo. As linhas tracejadas são as retas bissetrizes internas e as pontilhadas, as externas.

$\triangle ABC$, tal que essas retas sejam bissetrizes dos ângulos do triângulo. Essas bissetrizes podem ser de ângulos internos ou externos.

Suporemos o problema resolvido para descobrir qual procedimento se aplica na solução deste problema.

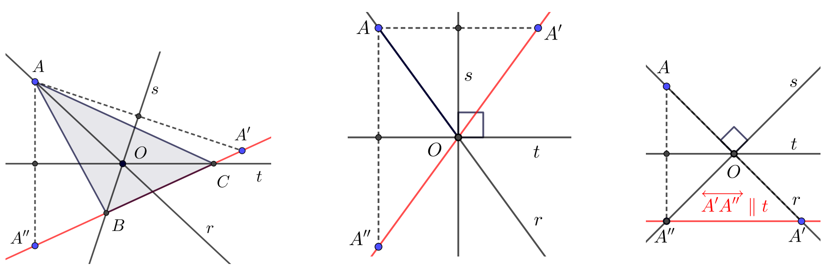

FIGURA 3. Determinação do triângulo $\triangle ABC$, sendo que a figura da esquerda indica uma solução e as outras duas indicam os casos sem soluções.

Suponhamos que a reta s seja a bissetriz do ângulo no vértice B e t a do ângulo em C. A imagem da reta $\overleftrightarrow{AB}$ por R_s é a reta $\overleftrightarrow{BC}$, que é a reta $\overleftrightarrow{A'B}$, onde $A' = R_s(A)$, e a imagem da reta $\overleftrightarrow{AC}$ por R_t é a reta $\overleftrightarrow{CB} = \overleftrightarrow{CA''}$, onde $A'' = R_t(A)$. Daí, a reta $\overleftrightarrow{BC}$ é a reta $\overleftrightarrow{A'A''}$. Assim, para descobrirmos os pontos B e C, obtemos as reflexões A' e A'' do ponto A, traçamos a reta $\overleftrightarrow{A'A''}$ e determinamos os pontos B e C pela interseção dessa reta com as reta s e t.

Se, por um azar, a reta $\overleftrightarrow{A'A''}$ contiver o ponto O, comum às três retas dadas, o problema não terá solução (isso ocorre se $\overleftrightarrow{OA'} \perp t$). Outra situação em que não haverá solução ocorre se a reta $\overleftrightarrow{A'A''}$ for paralela a s ou a t (esse é o caso em que $r \perp t$ ou $r \perp s$, respectivamente – verifique!).

Portanto, o problema tem solução (que é única) se, e somente se, nenhum par de retas entre r, s e t for perpendicular. Nesse caso, cada par de retas formam um ângulo agudo e um obtuso entre si.

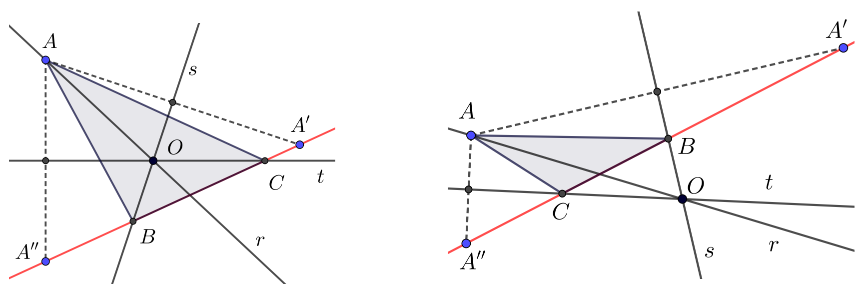

Figura 4. À esquerda, nenhuma reta passa pelo ângulo agudo formado pelas outras duas. À direita, a reta r passa pelo ângulo agudo formado por s e t.

Se uma das retas passar pelo interior dos ângulos agudos formado pelas outras duas, então essas últimas serão bissetrizes dos ângulos externos correspondentes. Digamos que r seja a reta que passa pelo interior do ângulo agudo formado por s e t. Digamos que tal ângulo meça $\alpha < \pi/2$. O ângulo $A'\hat{O}A''$ medirá $2\alpha < \pi$. Assim, o ponto O é externo ao $\triangle ABC$ e, portanto, s e t serão bissetrizes dos ângulos externos em relação ao lado $\overline{BC}$.

Exercício 2. Dadas a circunferência $\mathbb{S}$ de centro O e três retas r, s e t concorrentes no ponto O, determine o triângulo $\triangle ABC$ que circunscreva $\mathbb{S}$ (ou seja, $\mathbb{S}$ é a circunferência inscrita ou ex-inscrita), cujas bissetrizes sejam as retas r, s e t. Analise as (im)possibilidades de solução do problema. [Sugestão: tome um ponto $A' \neq O$ em r, construa $\triangle A'B'C'$, cujas bissetrizes sejam as retas dadas, como no exemplo acima, e depois trace retas tangentes a $\mathbb{S}$.]

Exercício 3. Dadas três retas distintas r, s e t, concorrentes num mesmo ponto O, e um ponto $L \neq O$ em r, determine o triângulo $\triangle ABC$, tal que L seja o ponto médio de $\overline{BC}$, r, s e t sejam as mediatrizes dos lados $\overline{BC}$, $\overline{AC}$ e $\overline{AB}$, respectivamente. Analise as (im)possibilidades de solução do problema. [Sugestão: A reta $\ell = \overleftrightarrow{BC}$ é a reta perpendicular a r e contendo o ponto L. Ainda não sabemos quais são os pontos A, B e C, mas sabemos que $A = R_t(B) = R_s(C)$; disso sabemos que o ponto A deve estas nas retas $\ell' = R_t(\ell)$ e $\ell'' = R_s(\ell)$.]

Exercício 4. Determine quais dessas letras (impressas nessa fonte, chamada de *sans-serif*) têm eixo(s) de simetria (são invariantes por reflexões por retas – essas retas são os eixos de simetria): A, B, C, D, E, F, G, H, I, J, K, L, M, N, O, P, Q, R, S, T, U, V, W, X, Y, Z. Determine os eixos de simetria das letras que os tiverem.

Exercício 5. Determine os eixos de simetrias dos polígonos regulares. Divida em dois casos: número par de vértices e número ímpar de vértices. Estude em particular o pentágono e o hexágono regulares.

Exercício 6. Mostre que um triângulo escaleno (os três lados são dois a dois não congruentes) não tem nenhum eixo de simetria. Mostre que um triângulo isósceles não equilátero tem um único eixo de simetria.

Exercício 7. Determine um triângulo $\triangle ABC$, dados o tamanho AB da base, o comprimento h de sua altura e a diferença γ das medidas dos ângulos na base (nos vértices A e B). [Sugestão: Trace $\ell \parallel \overline{AB}$, a uma distância h de $\overline{AB}$; seja B' a reflexão de B pela reta ℓ; o vértice C estará na reta ℓ e no arco capaz de ângulo $\pi - \gamma$ e corda $\overline{AB'}$. Justifique essa construção e também mostre que ℓ é a mediana do vértice C sobre o lado $\overline{AB'}$.]

Exercício 8. Determine um triângulo $\triangle ABC$, dados os tamanhos dos lados AC e BC e a diferença γ das medidas dos ângulos na base (nos vértices A e B). [Sugestão: Comparando com o problema anterior, podemos construir o $\triangle ACB'$; a linha ℓ será a mediana do vértice C sobre o lado $\overline{AB'}$.]

Exercício 9. Determine um quadrilátero $ABCD$, conhecendo-se os tamanhos de seus lados e que a diagonal é a bissetriz do ângulo $B\hat{A}D$. [Sugestão: supor o problema resolvido; seja $B' = R_{\overleftrightarrow{AC}}(B) \in \overleftrightarrow{AD}$; construa o triângulo $\triangle B'DC$, pois são conhecidos os lados $BC = B'C$, CD e $B'D$ que é a soma ou diferença de AD e AB', dependendo da posição de B' em relação a A e D. Com isso pode-se determinar o vértice A, etc. O que acontece se todos os lados forem iguais?]

Exercício 10. Dada a reta ℓ e dois pontos distintos A e B num mesmo semiplano de origem ℓ, determine o ponto X de ℓ tan que $AX+XB = a$, para um valor $a > 0$ dado. Quais as condições sobre a para que existam soluções? [Sugestão: trace a circunferência $\mathbb{S}_1$ de centro A e raio a; trace a circunferência $\mathbb{S}_2$ passando por B e $B' = R_\ell(B)$ e tangente a $\mathbb{S}_1$ — assuma ser possível essa construção, pois veremos mais adiante como fazê-la — o centro de $\mathbb{S}_2$ é o ponto X.]

Exercício 11. Dada a reta ℓ, uma media $a > 0$ e dois pontos A e B em semiplanos opostos de origem ℓ, determine pontos M e N em ℓ, tais que $MN = a$ e $AM + MN + NB$ seja mínimo. [Sugestão: use uma reflexão transladada.]

Exercício 12 (Frisos)**.** Determine quais são as reflexões e reflexões transladadas que deixam invariantes os frisos (os desenhos) da Figura 5. Observe que todas as figuras são invariantes por certas translações paralelas às retas que delimitam as figuras.

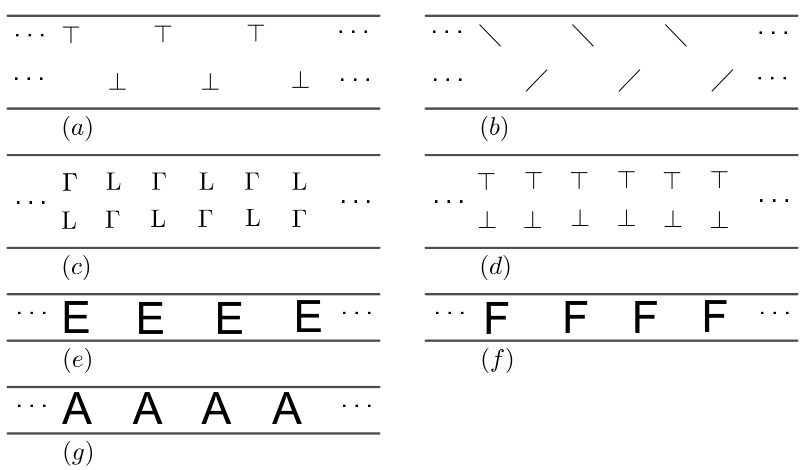

FIGURA 5. Frisos: o padrão repete-se indefinidamente.

Exercício 13. Dado o triângulo $\triangle ABC$, seja H seu ortocentro (o ponto de encontro das alturas). Mostre que as reflexões de H pelas retas suportes dos lados do triângulo estão todas na circunferência que circunscreve o triângulo. Considere os casos em que o triângulo seja acutângulo, obtusângulo e retângulo (este último é bem simples). [Sugestão: sejam $H_1 = R_{\overleftrightarrow{BC}}(H)$, $H_2 = R_{\overleftrightarrow{AC}}(H)$ e $H_3 = R_{\overleftrightarrow{AB}}(H)$; sejam $P \in \overleftrightarrow{BC}$, $Q \in \overleftrightarrow{AC}$ e $R \in \overleftrightarrow{AB}$ os pés das alturas; mostre que

$m(B\hat{A}C) + m(B\hat{H}_1C) = \pi$, o que implica que o quadrilátro $ABCH_1$ é inscritível em uma circunferência. Veja a Figura 6.]

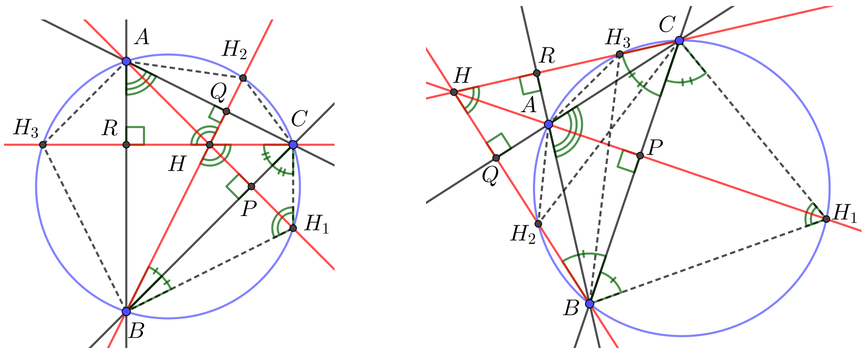

Figura 6. Reflexões do ortocentro de um triângulo acutângulo e um obtusângulo.

Exercício 14. Dados três pontos H_1, H_2 e H_3 que são as reflexões do ortocentro de um triângulo pelas retas suportes dos seus lados, determine esse triângulo (observe que o ortocentro não foi dado). [Sugestão: acompanhe pela Figura 6; observe que o $\triangle BHH_3$ é isósceles e $A\hat{B}H_3 \equiv A\hat{B}H = A\hat{B}H_2$ e, portanto $\overline{AH_2} \equiv \overline{AH_3}$.]

6. Classificação das Isometrias

Mostremos aqui que uma isometria do plano ou é uma translação, ou uma rotação, ou uma reflexão por reta, ou uma reflexão transladada.

Proposição 5. Dados os triângulos congruentes $\triangle ABC \equiv \triangle DEF$, existe uma única isometria f do plano, tal que $f(A) = D$, $f(B) = E$ e $f(C) = F$.

Demonstração. Suponha que f e g sejam isometrias do plano, tais que $f(A) = D$, $f(B) = E$ e $f(C) = F$, e também $g(A) = D$, $g(B) = E$ e $g(C) = F$. Mostremos que $h = g^{-1} \circ f$ é a identidade. Por causa disso, podemos supor que $f(A) = A$, $f(B) = B$ e $f(C) = C$.

Para isso, usamos o $\triangle ABC$ como um referencial para os pontos do plano. Seja P um ponto do plano. Podemos supor que $P \neq A, B, C$, e mostramos que $f(P) = P$. Seja $P' = f(P)$.

Se $P \in \overleftrightarrow{AB}$, ou $P \in \overleftrightarrow{AC}$, então $f(P) = P$, pois se $P' = f(P)$, $AP = AP'$, $BP = BP'$ e $CP = CP'$.

Se $P \notin \overleftrightarrow{AB}$ e $P \notin \overleftrightarrow{AC}$, sejam $X \in \overleftrightarrow{AB}$ e $Y \in \overleftrightarrow{AC}$, tais que $\overleftrightarrow{PX} \parallel \overleftrightarrow{AC}$ e $\overleftrightarrow{PY} \parallel \overleftrightarrow{AB}$. Como $X \in \overleftrightarrow{AB}$ e $Y \in \overleftrightarrow{AC}$ temos que $f(X) = X$ e $f(Y) = Y$. Como isometria preserva paralelismo, se $P' = f(P)$, então $\overleftrightarrow{P'X} \parallel \overleftrightarrow{AC}$ e, como $X \in \overleftrightarrow{P'X}$, pelo postulado das paralelas (exeiste uma única reta paralela a uma reta dada e contendo um dado ponto fora dela), $\overleftrightarrow{P'X} = \overleftrightarrow{PX}$. Do mesmo modo, obtemos que $\overleftrightarrow{P'Y} = \overleftrightarrow{PY}$. Portanto, $P' = P$.

Assim, mostramos que f é a transformação identidade. $\square$

A demonstração da *Classificação das Isometrias* a seguir mostra também que qualquer isometria pode ser expressa como a composição de até três reflexões por retas (mesmo a identidade: é a composição de duas reflexões pela mesma reta).

Proposição 6 (Classificação das Isometrias)**.** Seja f uma isometria do plano. Então, ou f é uma translação, ou uma rotação, ou uma reflexão por reta, ou uma reflexão transladada. Mais ainda, toda isometria pode ser expressa como a composição de uma, duas ou três reflexões por retas.

Demonstração. Suponha que f seja uma isometria e que $f(A) = A'$, $f(B) = B'$ e $f(C) = C'$, para os triângulos $\triangle ABC \equiv \triangle A'B'C'$.

Seja g a composição das isometrias $g_3 \circ g_2 \circ g_1$, onde g_1 será a reflexão pela reta mediatriz de $\overline{AA'}$, caso $A \neq A'$, e a identidade caso $A = A'$. Se $B = g_1(B')$, g_2 será a identidade; se $B \neq g_1(B')$, então ou $B - A - g_1(B')$ e, neste caso, g_2 será a reflexão pela mediatriz de $\overline{Bg_1(B')}$; se A, B e $g_1(B')$ forem não colineares, então g_2 será a reflexão pela reta bissetriz do ângulo $B\hat{A}g_1(B')$. Observe que $g_2 \circ g_1(A') = A$ e $g_2 \circ g_1(B') = B$. Se $g_2 \circ g_1(C') = C$, g_3 será a identidade; senão C e $g_2 \circ g_1(C')$ estarão em semiplanos opostos de origem a reta $\overleftrightarrow{AB}$. Daí, g_3 será a reflexão pela reta $\overleftrightarrow{AB}$ e $g_3 \circ g_2 \circ g_1(C') = C$, e também $g_3 \circ g_2 \circ g_1(A') = A$ e $g_3 \circ g_2 \circ g_1(B') = B$.

Como $g \circ f(A) = A$, $g \circ f(B) = B$ e $g \circ f(C) = C$, para o $\triangle ABC$, $g \circ f$ é a identidade e, portanto $f = g^{-1} = g_1 \circ g_2 \circ g_3$ a composição de até três reflexões por retas, que é ou uma translação, ou uma rotação, ou uma reflexão por reta, ou uma reflexão transladada. $\square$

Exemplo 8. Determinemos qual é a isometria que mapeia $\triangle ABC$ sobre $\triangle A'B'C' \equiv \triangle ABC$, onde $A = (0,0)$, $B = (5,0)$, $C = (3,4)$, $A' = (2,2)$, $B' = (2,7)$ e $C' = (-2,5)$.

. . . .

Vamos seguir a demonstração da proposição e obter a isometria como composição de até três reflexões por retas e depois determinaremos que tipo de isometria será tal composição.

Vamos escrever $f = g^{-1} = (g_3 \circ g_2 \circ g_1)^{-1} = g_1 \circ g_2 \circ g_3$ (lembre-se que uma reflexão por reta é a própria inversa).

Para facilitar a leitura, reproduzimos aqui a fórmula para a reflexão por uma reta m de equação $ax + by + c = 0$:

$$\boxed{R_m(x,y) = \frac{1}{a^2+b^2}\begin{pmatrix} (b^2-a^2)x - 2aby \\ -2abx + (a^2-b^2)y \end{pmatrix} - \frac{2c}{a^2+b^2}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}}$$

A isometria g_1 é a reflexão pela reta mediatriz de $\overline{AA'}$, que é a reta cuja equação vetorial é $(x, y) = (1, 1)+t(-1, 1)$, ou, se quiser, $y+x-2 = 0$ (onde $a = b = 1$ e $c = -2$). A imagem de $A' = (2, 2)$ é $A = (0, 0)$; a imagem de $B' = (2, 7)$ por essa reflexão é $B'' = (-5, 0)$, diferente de $B = (5, 0)$; a imagem de $C' = (-2, 5)$ é $C'' = (-3, 4)$.

Como $B'' - A - B$, usamos a reta mediatriz de $\overline{BB''}$, de equação $x = 0$, para definirmos g_2. Observe que essa reta contém o ponto A e, portanto, $g_2(A) = A$. Também vale que $g_2(B'') = B$ e $g_2(C'') = C$. Daí, g_3 será a identidade e $f = g_1 \circ g_2$. As retas que definem g_1 e g_2 têm o ponto $P = (0, 2)$ em comum e elas formam um ângulo orientado (positivamente) de $\pi/4$. Portanto a isometria f é a rotação $R_{P,\pi/2}$.

Exemplo 9. Determinemos qual é a isometria que mapeia $\triangle ABC$ sobre $\triangle A'B'C' \equiv \triangle ABC$, onde $A = (0, 0)$, $B = (5, 0)$, $C = (3, 4)$, $A' = (0, 4)$, $B' = (0, -1)$ e $C' = (-4, 1)$.

. . . .

A reflexão g_1 pela mediatriz de $\overline{AA'}$ (a reta $y - 2 = 0$, com $a = 0$, $b = 1$ e $c = -2$) mapeia B' em $B'' = (0, 5)$, e C' em $C'' = (-4, 3)$. A reflexão g_2 será pela reta bissetriz do ângulo $B\hat{A}B''$, a reta $x - y = 0$ (com $a = 1$, $b = -1$ e $c = 0$). Da´i, $g_2(A) = A$, $g_2(B'') = (5, 0) = B$ e $g_2(C'') = C''' = (3, -4) \neq C = (3, 4)$. A terceira reflexão, g_3, é pela reta $y = 0$ (com $a = c = 0$ e $b = 1$), que é a reta $\overleftrightarrow{AB}$, donde segue que $g_3(A) = A$, $g_3(B) = B$ e $G_3(C''') = C$.

A isometria f é a composição $g_1 \circ g_2 \circ g_3$. Para determinar essa isometria, consideremos primeiramente a composição $g_2 \circ g_3$, que é uma rotação de $\pi/2$ em torno do ponto $A = (0, 0)$, que pode ser escrita também como $h_2 \circ h_3$, onde h_2 é a reflexão pela reta $y = 0$ e h_3 pela reta $x+y = 1$. Assim, $g_1 \circ g_2 \circ g_3 = g_1 \circ h_2 \circ h_3$. A composição $g_1 \circ h_2$ é a composição de duas reflexões por retas paralelas ($y = 0$ e $y = 2$), que é uma translação pelo vetor $\vec{v} = (0, 4)$ (perpendicular às retas e medindo o dobro da distância entre elas. Esse vetor pode ser decomposto como $\vec{v} = \vec{u} + \vec{w}$, onde $\vec{u} = (-2, 2)$ é paralelo à reta $x + y = 0$ e $\vec{w} = (2, 2)$ é perpendicular a ela. Com isso, temos $g_1 \circ h_2 \circ h_3 = T_{\vec{u}} \circ T_{\vec{w}} \circ h_3$. A composição $T_{\vec{w}} \circ h_3$ é a reflexão pela reta $\ell : x + y - 1 = 0$.

Portanto, a isometria deste problema é a reflexão transladada $T_{\vec{u}} \circ R_\ell$.

Exemplo 10. Determinemos qual é a isometria que mapeia $\triangle ABC$ sobre $\triangle A'B'C' \equiv \triangle ABC$, onde $A = (0, 0)$, $B = (5, 0)$, $C = (3, 4)$, $A' = (-2, 2)$, $B' = (-2, 7)$ e $C' = (2, 5)$.

. . . .

A reflexão g_1 pela mediatriz de $\overline{AA'}$ (a reta $2x - y + 4 = 0$, com $a = 2$, $b = -1$ e $c = 4$) já satisfaz $g_1(B') = B$ e $g_1(C') = C$ (e vice-versa). Assim, a isometria é essa reflexão.

Exercício 15. Determine que tipo de isometria é f, sabendo-se que

(a) $f(0, 0) = (2, 0)$, $f(0, 1) = (1, 0)$ e $f(2, 0) = (2, 2)$;
(b) $f(0, 0) = (2, 0)$, $f(0, 1) = (1, 0)$ e $f(2, 0) = (-2, -2)$;
(c) $f(0, 0) = (4, 4)$, $f(0, 1) = (4, 5)$ e $f(2, 0) = (2, 4)$;
(d) $f(0, 0) = (4, 4)$, $f(0, 1) = (4, 3)$ e $f(2, 0) = (2, 4)$;
(e) $f(0, 0) = (4, 4)$, $f(0, 1) = (4, 3)$ e $f(2, 1) = (6, 3)$;
(f) $f(0, 0) = (2, 3)$, $f(10, 0) = (8, -5)$ e $f(0, 5) = (6, 6)$.

. . . .