MAT-310: RESOLUÇÃO DE EXERCÍCIOS: ROTAÇÕES

RICARDO BIANCONI

Vamos resolver alguns dos exercícios da apostila de rotações.

Uma boa estratégia para resolver os problemas é assumir que esteja resolvido, descobrir as relações geométricas pertinentes e, com isso, descrever como resolver o problema. É preciso ter cuidado para não assumir a solução na resolução do problema.

Exercício 10. Mostre que os centros dos quadrados construídos externamente sobre os lados de um paralelogramo são os vértices de um quadrado. [Sugestão: composição de rotações tendo, pelo menos, um ponto fixo.]

. . . .

Solução bem detalhada: Seja $ABCD$ um paralelogramo. Para facilitar as referências a ele, assumimos que os vértices sejam nomeados no sentido horário. Sejam K, L, M, e N os centros dos quadrados sobre os lados $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ e $\overline{DA}$, respectivamente. Acompanhe a Figura 1.

Aplicamos rotações centradas nesses pontos, com ângulo de $\pi/2$ e obtemos que A será um ponto fixo da composição

$$F = R_{N,\pi/2} \circ R_{M,\pi/2} \circ R_{L,\pi/2} \circ R_{K,\pi/2},$$

pois $B = R_{K\pi/2}(A)$, $C = R_{L,\pi/2}(B)$, $D = R_{M,\pi/2}(C)$ e $A = R_{N,\pi/2}(D)$. Essa composição tem que ser uma translação, pois $4 \times \pi/2 = 2\pi$. Mas a única translação que tem pontos fixos é a identidade, $F(X) = X$, para todo ponto X.

Agora vamos associar essa composição assim:

$$F = (R_{N,\pi/2} \circ R_{M,\pi/2}) \circ (R_{L,\pi/2} \circ R_{K,\pi/2}).$$

A composição $G = (R_{L,\pi/2} \circ R_{K,\pi/2})$ é uma reflexão por um ponto O (pois $2 \times \pi/2 = \pi$) e, como $G(A) = C$, o ponto O é o ponto médio da diagonal $\overline{AC}$. Do mesmo modo, concluímos que a composição $H = (R_{N,\pi/2} \circ R_{M,\pi/2})$ é uma reflexão por um ponto O', e como $H(B) = D$, O' é o ponto médio da diagonal $\overline{BD}$.

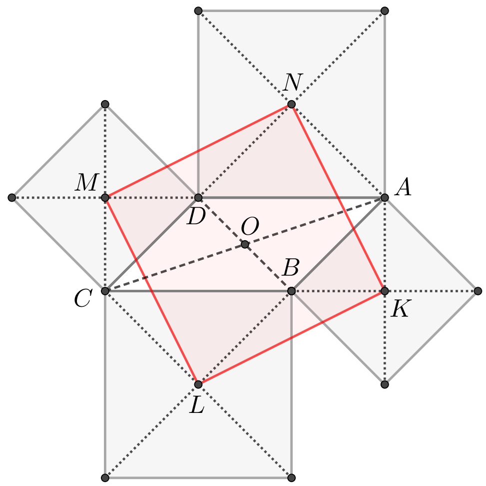

Figura 1. Exercício 10.

Como $ABCD$ é um paralelogramo, $O = O'$.

Vamos localizar o ponto O em relação aos pontos K e L. Aplicamos a composição $G = (R_{L,\pi/2} \circ R_{K,\pi/2})$ no ponto K e obtemos $G(K) = (R_{L,\pi/2} \circ R_{K,\pi/2})(K) = R_{L,\pi/2}(K) = K'$ e O será também o ponto médio do segmento $\overline{KK}'$. O triângulo $\triangle KLK'$ é retângulo em L, com $LK = LK'$.

Agora vamos localizar o ponto O em relação aos pontos M e N. Aplicamos a composição $H = (R_{N,\pi/2} \circ R_{M,\pi/2})$ no ponto K e obtemos $H() = (R_{N,\pi/2} \circ R_{M,\pi/2})(M) = K''$ e O será também o ponto médio do segmento $\overline{KK}''$. Com isso, temos que $K'' = K'$. O triângulo $\triangle KNK'$ é retângulo em N, com $NK = NK'$. Observe que os triângulos $\triangle LKK'$ e $\triangle NKK'$ têm a mesma hipotenusa $\overline{KK}'$ e, portanto $LKNK'$ será um quadrado.

Agora só falta mostrar que $M = K'$.

O mesmo argumento acima, com as devidas trocas de nomes de pontos, mostra que $\triangle LMN$ e $\triangle LM'N$ são retângulos, isósceles e têm a mesma hipotenusa $\overline{LN}$ e, portanbto, $LMNM'$ é um quadrado. Isso implica que $M' = K$ e, daí, que $M = K'$.

Assim, concluímos que $KLMN$ é um quadrado.

Eercício 11. Dadas duas retas distintas r e s, concorrentes no ponto O, e ângulo orientado α de r para s, determine o lugar geométrico dos pontos P do plano, para os quais $R_{P,\alpha}(r) = s$. [Sugestão: se $P \neq O$ for um desses pontos, o que acontece com as retas perpendiculares a r e a s, passando por P?]

. . . .

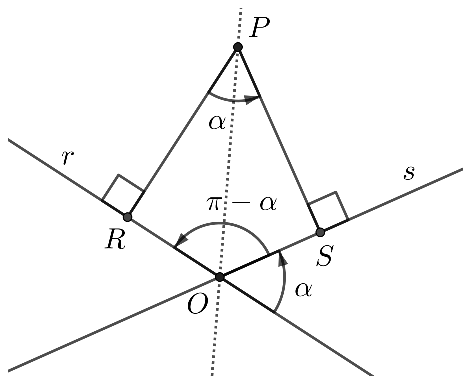

FIGURA 2. Exercício 11.

Solução: Acompanhe a Figura 2. A sugestão praticamente resolve o problema. Seja $P \neq O$ um ponto, tal que $R_{P,\alpha}(r) = s$. Sejam $R \in r$ e $S \in s$, tais que $\overleftrightarrow{PR} \perp r$ e $\overleftrightarrow{PS} \perp s$. Isometrias preservam ângulos e, portanto, $\overleftrightarrow{PS} = R_{P,\alpha}(\overleftrightarrow{PR})$. Em particular, $R_{P,\alpha}(R) = S$, pois $S \in s \cap R_{P,\alpha}(\overleftrightarrow{PR}$ e $R \in r$. Assim, $PR = PS$ e, portanto, P está na bissetriz do ângulo orientado medindo $\pi - \alpha$ entre r e s (pois o ângulo entre $\overline{PR}$ e $\overline{PS}$ deve medir α e $ORPS$ é um quadrilátero convexo – olhe para seus ângulos internos!).

Exercício 13. Dados um ponto P e três medidas $a, b, c > 0$, construir um triângulo equilátero $\triangle ABC$ contendo P em seu interior e tal que $PA = a$, $PB = b$ e $PC = c$. [Sugestão: o vértice A está na circunferência de centro P e raio a, etc. A solução parece-se com a do exercício 12.]

. . . .

Solução: Comecemos analisando o problema.

O problema requer que determinemos os vértices A, B e C do triângulo equilátero $\triangle ABC$, sujeitos às condições $PA = a$, $PB = b$ e $PC = c$, ou seja, $A \in \mathbb{S}_a$, $B \in \mathbb{S}_b$ e $C \in \mathbb{S}_c$, onde $\mathbb{S}_x$ indica a circunferência de centro P e raio x, para $x = a, b, c$. Cada vértice do triângulo "enxerga" os outros dois com um ângulo de $\pi/3$ ou $60°$. Assim, podemos dizer que o vértice B é o resultado da rotação de C com centro em A e ângulo (orientado) de $\alpha = \pm\pi/3$, sendo que o sinal $+$ ou $-$ é determinado pela orientação dos vértices. Como o vértice C está em $\mathbb{S}_c$, sua imagem pela rotação $R_{A,\alpha}$, $R_{A,\alpha}(C)$, está na imagem da rotação de toda a circunferência $\mathbb{S}_c$, $R_{A,\alpha}(\mathbb{S}_c)$. A única restrição sobre o vértice A é que ele pertença à circunferência $\mathbb{S}_a$. A simetria do problema deixa livre a escolha do ponto $A \in \mathbb{S}_a$.

Assim, podemos resolver o problema com a construção descrita a seguir.

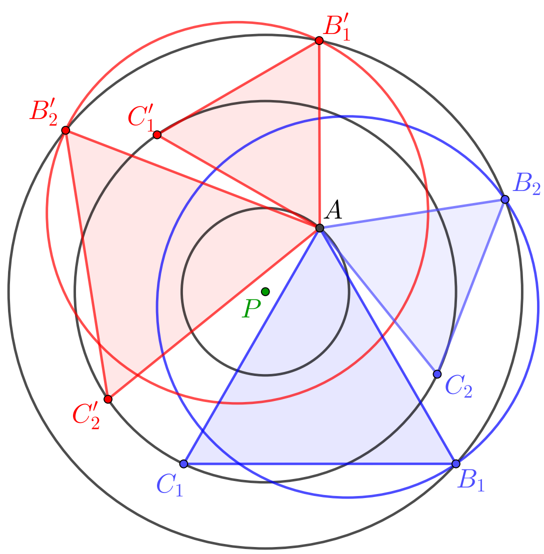

FIGURA 3. Exercício 13: os triângulos azuis ($\boldsymbol{\triangle AB_1C_1}$ e $\boldsymbol{\triangle AB_2C_2}$) foram obtidos com a rotação $R_{A,+\pi/3}$, e os vermelhos ($\boldsymbol{\triangle AB_1'C_1}$ e $\boldsymbol{\triangle AB_2'C_2}$) foram obtidos com a rotação $R_{A,-\pi/3}$.

Escolha um ponto A qualquer na circunferência $\mathbb{S}_a$ de centro P e raio a. O vértice B está na circunferência $\mathbb{S}_b$ de centro P e raio b, e também na imagem da circunferência $\mathbb{S}_c$ de centro P e raio c pela rotação $R_{A,\pi/3}$, ou seja, $B \in \mathbb{S}_b \cap R_{A,\alpha}(\mathbb{S}_c)$, com $\alpha = \pi/3$ ou $\alpha = -\pi/3$.

Observe que uma rotação de $-\pi/3$ também pode servir. Na Figura 3, indicamos as possíveis soluções com essas duas rotações e usando cada ponto de interseção.

Esse problema pode ter nenhuma, duas ou quatro soluções, dependendo da quantidade de pontos em $\mathbb{S}_b \cap R_{A<\alpha}(\mathbb{S}_c)$, $\alpha = \pm\pi/3$.

Exercício 15. Dado o centro M de um quadrado $ABCD$ a ser determinado, e dois pontos $P \in \overleftrightarrow{AB}$ e $Q \in \overleftrightarrow{BC}$, determine o quadrado. Observe que as retas $\overleftrightarrow{AB}$ e $\overleftrightarrow{BC}$ ainda são desconhecidas. [Sugestão: o que acontece ao rodarmos pelo centro as retas suportes dos lados do quadrado?]

....

Solução: Suponhampos que os vértices de $ABCD$ estejam nomeados no sentido anti-horário. O ponto $P' = R_{M,\pi/2}(P)$ deve pertencer à reta suporte do lado $\overline{BC}$, que será a reta $\overleftrightarrow{QP'}$. O que acontece se $P' = Q$? (Observe que se $Q = R_{M,\pi/2}(P)$, então $Q \neq R_{M,-\pi/2}(P)$.)

Exercício 17. Dados dois pontos A e B, uma circunferência $\mathbb{S}$ de centro O e uma medida de ângulo α, determine os pontos $C, D \in \mathbb{S}$, tais que $\overline{AC} \parallel \overline{BD}$ e $m(C\hat{O}D) = \alpha$. [Sugestão: se $\overline{DA'} = R_{O,\alpha}(\overline{CA})$, então $m(B\hat{D}A') = \alpha$, ou seja, o ponto D enxerga a corda $\overline{BA'}$ por um ângulo α.]

....

Solução: A sugestão dada está incorreta. A solução é bem simples. Analisemos o problema. Suponha que já tenhamos achado a corda $\overline{CD}$. Podemos dizer que $D = R_{O,\alpha}(C)$. A condição é que $\overline{CD} \parallel \overline{AB}$. A reta mediatriz t da corda $\overline{CD}$ contém o ponto O e é perpendicular a $\overline{AB}$.

Assim, traçamos a reta $t \perp \overleftrightarrow{AB}$, contendo o ponto O, tomamos um dos pontos M de $t \cap \mathbb{S}$ e obtemos $C = R_{O,-\alpha/2}(M)$ e $D = R_{O,\alpha/2}(M)$.

O problema admite duas soluções (ou apenas uma, se $\alpha = \pi$).

Exercício 19. Seja $X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x, y \in \mathbb{Z}\}$. Quais são as rotações $R_{M,\alpha}$, tais que $R_{M,\alpha}(X) = X$?

....

Solução: As rotações mais óbvias são $R_{P,n\pi/2}$, com $P \in X$. Outras menos óbvias, são $R_{Q,n\pi/2}$, onde $Q = P + (1/2, 1/2)$, com $P \in X$ (os pontos Q são os centros dos quadrados formados pelos pontos de X); também $R_K = R_{K,\pi}$ e R_L, rotações de π em torno dos pontos da forma $K = P + (1/2, 0)$ e $L = P + (0, 1/2)$ (os pontos médios dos quadrados formados pelos pontos de X).

Exercício 20. Sabemos que é possível *ladrilhar* o plano coom hexágonos regulares, todos congruentes entre si (lembre-se de um favo de mel). Quais são as rotações que deixam tal ladrilhamento invariante?

. . . .

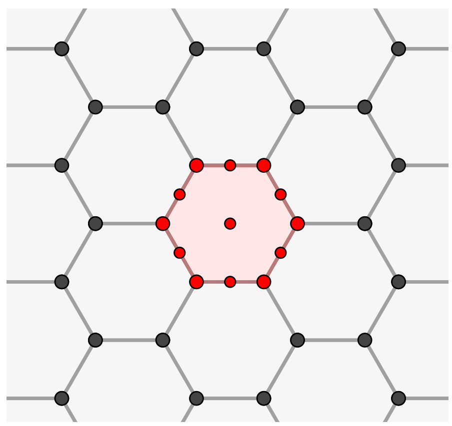

FIGURA 4. Exercício 20. Indicamos os centros de rotações em apenas um dos hexágonos (em vermelho para realçar).

Solução: Veja a figura 4. Temos rotações de $2\pi/3$ centradas nos vértices dos hexágonos; rotações de $\pi/3$ nos centros dos hexágonos e rotações de π nos pontos médios dos lados dos hexágonos.
