MAT-310: NOTAS DE AULA: ROTAÇÕES

RICARDO BIANCONI

RESUMO. Teoria, aplicações e exercícios sobre rotações.

1. PRELIMINARES

Coletamos os resultados anteriores que precisamos usar aqui. Usamos o símbolo $\mathbb{E}$ para denotar conjunto dos pontos do plano euclidiano.

Lembrem-se que uma translaç ao $T_{\vec{v}}$ pode ser escrita como a composição de duas reflexões por pontos $R_M \circ R_N$, onde $\vec{v}$ é representado pela flecha $2\vec{NM}$ (vou usar essa notação meio feia para diferenciar a flecha $\vec{AB}$, começando em A e terminando em B, da semirreta $\overrightarrow{AB}$). Se invertermos a ordem dos pontos, $R_N \circ R_M$, obtemos a translação $T_{-\vec{v}}$. Também é claro que (espero!) se A for um ponto qualquer e $B = T_{\vec{v}/2}(A)$, então $T_{\vec{v}} = R_B \circ R_A$.

Lembre-se também que a composição de uma quantidade ímpar de reflexões por ponto é também uma reflexão por postos, e que M é o único ponto fixo de R_M.

Exercício 1. Mostre que $T_{\vec{v}} \circ R_M \circ T_{-\vec{v}} = R_N$, onde $N = T_{\vec{v}}(M)$. [Sugestão: mostre que tal N é ponto fixo dessa composição.]

2. ROTAÇÕES: TEORIA

Precisamos da definição de um ângulo orientado no plano. Recorde que um *ângulo* $B\hat{A}C$ é o conjunto dos pontos contidos nas semirretas não colineares $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC}$.

Definição 1 (Ângulo Orientado)**.** Respire fundo e leia com cuidado. O *ângulo orientado* $\angle BAC$ é o par ordenado de semirretas $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ (elas podem ser colineares e até coincidentes). Dizemos que os ângulos orientados $\angle BAC$ e $\angle EDF$ têm a mesma orientação nos três casos seguintes:

(a) se as semirretas não forem colineares, então as bases de vetores $(\vec{AB}, \vec{AC})$ e $(\vec{DE}, \vec{DF})$ terão a mesma orientação;
(b) se $B - A - C$ $E - D - F$ (semirretas opostas, que corresponderão aos ângulos de $\pm 180°$);
(c) se $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC}$ e $\overrightarrow{DE} = \overrightarrow{DF}$ (cada par ordenado contém a mesma semirreta, que corresponderão aos ângulos de $0°$).

Escolhemos uma orientação dos ângulos como sendo a positiva (por exemplo, o *sentido anti-horário*, seja lá o que isso for) e atribuímos uma medida em radianos (poderia ser qualquer outra unidade, por exemplo, em graus), de modo que se $B - A - C$, $m(\angle BAC = \pi$; se $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC}$, então $m(\angle BAC = 0$, e se A, B e C não forem colineares, $m(\angle BAC) = \alpha$, onde $-\pi < \alpha < \pi$ e $\alpha \neq 0$, e $m(B\hat{A}C) = |\alpha|$ (ou seja, para ângulos orientados suas medidas coincidem em módulo com ao ângulo não orientado correspondentes).

Definição 2 (Rotação)**.** Uma *rotação centrada em um ponto O e de ângulo orientado (medindo) α* é a transformação do plano denotada $R_{O,\alpha}$, tal que:

(a) se $\alpha = 0 + 2n\pi$, então $R_{O,\alpha}$ é a transformação identidade $I(P) = P$, para todo $P \in \mathbb{E}$.
(b) se $\alpha = \pi + 2n\pi$, então $R_{O,\alpha}$ é a reflexão pelo ponto O, R_O;
(c) se $\alpha = \alpha_0 + 2n\pi$, com $0 < |\alpha_0| < \pi$, então $R_{),\alpha}(O) = O$ e se $P \neq O$ e $P' = R_{O,\alpha}(P)$, então $PO = P'O$(medidas de segmentos) e $m(\angle POP') = \alpha_0$ (medida de ângulo orientado).

Proposição 1 (Rotações são Isometrias)**.** Toda rotação $R_{O,\alpha}$ é uma isometria.

Demonstração. Precisamos mostrar que dados dois pontos distintos P e Q, se $P' = R_{O,\alpha}(P)$ e $Q' = R_{O,\alpha}(Q)$, então $P'Q' = PQ'$. Existem diversas possibilidades de posicionamento dos pontos P, Q e O.

Os casos em que O, P e Q são colineares ($P = O$, ou $Q = O$; $P - O - Q$; $O - P - Q$; $O - Q - P$) ficam como exercício.

Consideremos o caso em que O, P e Q não são colineares.

Da definição temos que $OP = OP'$ e $OQ = OQ'$. Mostremos que $\triangle OPQ \equiv \triangle OP'Q'$.

A hipótese da não colinearidade de O, P e Q implica que ou Q está no interior do ângulo $P\hat{O}P'$, ou em seu exterior. Em ambos os casos, $m(\angle P'OQ') = m(\angle POP') + m(\angle QOQ') - m(\angle QOP') = m(\angle POQ)$

(faça um desenho). Aplicamos LAL e obtemos que $\triangle OPQ \equiv \triangle OP'Q'$ e, portanto, $P'Q' = PQ$. $\square$

Vimos anteriormente que o que caracteriza translações e reflexões por pontos são paralelogramos (observe as ordens dos vértices nos dois casos):

(i) uma transformação F é uma translação se, e somente se, para todo par de pontos distintos P e Q, $PQQ'P'$ é um paralelogramo (onde $P' = F(P)$ e $Q' = F(Q)$);
(ii) uma transformação F é uma reflexão por um ponto se, e somente se, para todo par de pontos distintos P e Q, $PQP'Q'$ é um paralelogramo (onde $P' = F(P)$ e $Q' = F(Q)$).

Para as rotações temos também uma caracterização.

Proposição 2 (Caracterização de Rotações)**.** Uma isometria do plano F é uma rotação $R_{M,\alpha}$ (com $\alpha = \alpha_0 + 2n\pi$ e $0 < |\alpha_0| < \pi$) se, e somente se, para todo par de pontos distintos P e Q, os segmentos $\overline{PQ}$ e $\overline{P'Q'}$ estiverem contidos em semirretas $\overrightarrow{NP}$ (ou $\overrightarrow{NQ}$, se $N = P$) e $\overrightarrow{NP'}$ (ou $\overrightarrow{NQ'}$, se $N = Q$), para algum ponto N, e $m(\angle PNP') = \alpha_0$ (ou $m(\angle QNQ') = \alpha_0$ se $N = P$). Como sempre, $P' = F(P)$ e $Q' = F(Q)$.

Demonstração. Observe que como $\alpha_0 \neq 0$, $F \neq I$. Assim, existe um ponto P, tal que $P' \neq P$. Seja M o ponto da mediatriz de $\overline{PP'}$ que encontra o arco capaz do ângulo orientado de medida α e corda $\overline{PP'}$. Com isso, temos $P' = R_{O,\alpha}(P)$. Fixemos tal ponto P e tomemo-lo como referência para o que se segue.

Seja Q um ponto qualquer do plano, com $Q \neq P$ e $Q \neq M$, e seja $Q' = F(Q)$.

Se $M - P - Q$, $M - Q - P$ ou $P - M - Q$, então as retas suportes dos segmentos $\overline{PQ}$ e $\overline{P'Q'}$ devem encontrar-se no ponto M obtido acima (**exercício:** justifique; lembre-se do arco capaz) e, daí, $Q' = R_{M\alpha}(Q)$.

Suponhamos que M, P e Q não sejam colineares. Acompanhe a argumentação pela Figura 1.

As retas suportes dos segmentos $\overleftrightarrow{PQ}$ e $\overleftrightarrow{P'Q'}$ devem encontrar-se em um ponto N. Esse ponto deve pertencer ao arco capaz da corda $\overline{PP'}$ e ângulo orientado α_0. O arco capaz de corda $\overline{QQ'}$ e mesmo ângulo deve encontrar o primeiro arco capaz em N e em um segundo ponto, que, pasmem, será o ponto M.

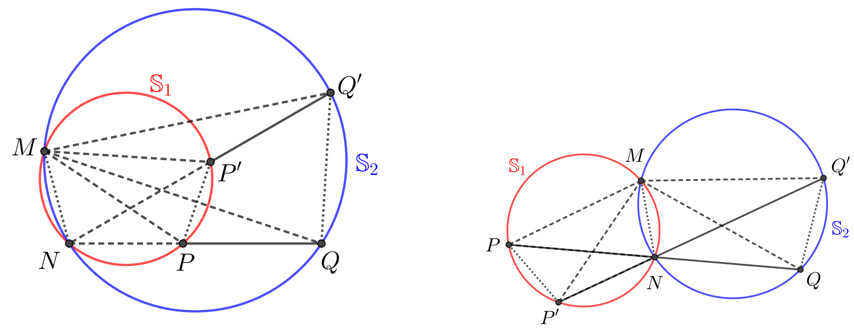

FIGURA 1. Devido ao arco capaz da corda $\overline{MN}$, $M\hat{P}N \equiv M\hat{P}'N$ e, portanto seus suplementares são congruentes: $M\hat{P}Q \equiv M\hat{P}'Q'$.

Para verificar tal afirmação, observe que, se $N - P - Q$ (ou, analogamente, $N - Q - P$), devido ao arco capaz da corda $\overline{MN}$, $M\hat{P}N \equiv M\hat{P}'N$ e, portanto seus suplementares são congruentes, isto é, $M\hat{P}Q \equiv M\hat{P}'Q'$. Daí, LAL resolve nosso problema.

O caso em que $P - N - Q$ é mais fácil, pois F é isometria (e, daí $PQ = P'Q'$) e arcos capazes mais $PM = P'M$, novamente LAL resolve o problema. $\square$

Analisamos a seguir composições de rotações.

Exemplo 1. Se os centros das rotações forem o mesmo ponto O, então a proposição acima implica diretamente que $R_{O,\alpha} \circ R_{O,\beta} = R_{O,\alpha+\beta}$.

Exemplo 2. A transformação inversa da rotação $R_{M,\alpha}$ é a rotação $R_{M,-\alpha}$.

Exemplo 3. Consideremos o caso em que $O_1 \neq O_2$. A composição $F = R_{O_2,-\alpha} \circ R_{O_1,\alpha}$ roda um segmento de um ângulo α e em seguida roda de volta com ângulo $-\alpha$, totalizando uma rotação de ângulo 0 do segmento. No entanto, o resultado não é a identidade, pois os centros de rotação são distintos. O segmento $\overline{PQ}$ será levado em um outro segmento $\overline{P'Q'}$ e a condição de ângulo implica que $PQQ'P'$ será um paralelogramo. Portanto, F será uma translação, ou especificamente, a translação $T_{\vec{v}}$, onde $\vec{v}$ é (representado pela flecha) $\overrightarrow{O_1O_1'}$, onde $O_1' = F(O_1) = R_{O_2,\alpha}(O_1)$.

Exemplo 4. Seja $F = R_{O_1,\alpha} \circ R_{O_2,\beta}$.

Consideremos agora o caso em que $O_1 \neq O_2$ e $\alpha + \beta \neq 2n\pi$. Neste caso, $R_{O_1,\alpha} \circ R_{O_2,\beta} = R_{O_3,\alpha+\beta}$, onde O_3 é determinado da seguinte maneira. Acompanhe o raciocínio pela Figura 2.

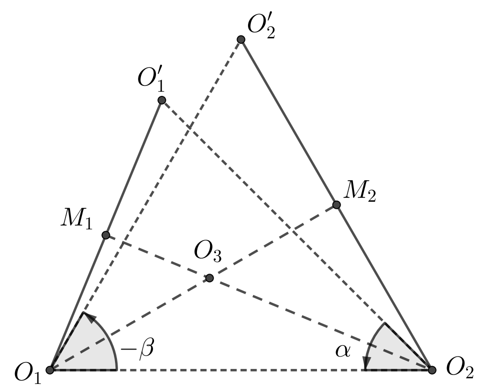

FIGURA 2. Composição de duas rotações. Na figura, $\alpha, \beta > 0$.

Se $\alpha + \beta = \pi + 2n\pi$, então O_3 é o ponto médio do segmento $\overline{O_2 O_2'}$, onde $O_2' = F(O_2) = R_{O_1,\alpha}(O_2)$.

Se $\alpha + \beta \neq (2n+1)\pi$ e $\alpha, \beta \neq 2k\pi$ para todos $n, k \in \mathbb{Z}$, sejam $O_1' = R_{O_2,-\beta}(O_1) = F^{-1}(O_1)$ e $O_2' = F(O_2) = R_{O_1,\alpha}(O_2)$. A imagem por F do segmento $\overline{O_2 O_1'}$ é o segmento $\overline{O_2' O_1}$. Como o ângulo orientado entre eles difere de $(2n+1)\pi$ para todo $n \in \mathbb{Z}$, eles não coincidem e nem são paralelos. Isso implica também que os segmentos $\overline{O_1 O_1'}$ e $\overline{O_2 O_2'}$ não coincidem e nem são paralelos e, portanto, suas mediatrizes encontram-se em um único ponto, que será o centro O_3 da rotação procurada.

Exercício 2. Mostre que $R_{M,\alpha} \circ T_{\vec{v}} = R_{N,\alpha}$, onde N é o ponto que satisfaz a equação $R_{M,-\alpha}(N) = T_{\vec{v}}(N)$. [Sugestão: observe que essa equação significa que N enxerga a corda $\overline{MT_{-\vec{v}}(M)}$ por um ângulo α.]

Exercício 3. Dados o vetor $\vec{v} = (a, b) \neq (0, 0)$, o ângulo α, com $0 < |\alpha| < \pi$ e o ponto M, determine o ponto N, tal que $R_{N,-\alpha} \circ R_{M,\alpha} = T_{\vec{v}}$. [Sugestão: o centro N também é o ponto fixo de $R_{N,-\alpha} = R_{M,\alpha} \circ T_{-\vec{v}}$; verifique esta igualdade.]

Exercício 4. Mostre que $T_{\vec{v}} \circ R_{M,\alpha} = R_{O,\alpha}$. Use o exercício anterior para determinar o centro O.

Exercício 5. Mostre que $T_{\vec{v}} \circ R_{M,\alpha} \circ T_{-\vec{v}} = R_{N,\alpha}$, onde $N = T_{\vec{v}}(M)$.

Observe que o conjunto das rotações não é fechada por composições. Mas, se unirmos a ele o conjunto das translações, será fechado por composições e, portanto tem uma estrutura de grupo. Um subgrupo do grupo de todas as isometrias.

3. Rotações em Coordenadas

Escolhemos um sistema de coordenadas do plano com origem um ponto $\mathbb{O}$ e duas retas perpendiculares e contendo a origem, $\boldsymbol{x}$ e $\boldsymbol{y}$ graduadas e orientadas de modo que a orientação da base $((1,0),(0,1))$ seja positiva. Os detalhes podem ser revisto da disciplina de Geometria Analítica.

Exemplo 5. Uma translação em coordenadas tem uma expressão simples: se $\vec{v}=(a,b)$, então $T_{\vec{v}}(x,y)=(x+a,y+b)$.

Exemplo 6. A reflexão pela origem também tem expressão simples, $R_{\mathbb{O}}(x,y)=(-x,-y)$.

Exercício 6. Determine a expressão de $R_M(x,y)$ em coordenadas, onde $M=(a,b)$. [Sugestão: $R_M=T_{\vec{v}}\circ R_{\mathbb{O}}\circ T_{-\vec{v}}$; qual é o vetor $\vec{v}$?]

Exercício 7. Mostre que uma rotação de ângulo α em torno da origem tem a expressão

$$R_{\mathbb{O},\alpha}(x,y)=(x\cos\alpha-y\operatorname{sen}\alpha,x\operatorname{sen}\alpha+y\cos\alpha).$$

Exercício 8. Determine a expressão de uma rotação centrada em um ponto qualquer do plano. [Use o truque de compor com translações, como no caso da reflexão por ponto.]

Exemplo 7. Podemos usar notação matricial para escrever a rotação em torno da origem:

$$R_{\mathbb{O},\alpha}(x,y)=\begin{pmatrix}\cos\alpha & -\operatorname{sen}\alpha\\ \operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x\cos\alpha-y\operatorname{sen}\alpha\\ x\operatorname{sen}\alpha+y\cos\alpha\end{pmatrix}.$$

Exercício 9. Suponha que $\cos\alpha=-3/5$ e $\operatorname{sen}\alpha=4/5$. Determine as coordenadas dos vértices do triângulo $\triangle A'B'C'$, onde $A'=R_{M,\alpha}(A)$, $B'=R_{M,\alpha}(B)$, $C'=R_{M,\alpha}(C)$, $M=(-2,-5)$, $A=(0,1)$, $B=(1,1)$ e $C=(2,3)$.

4. Rotações: Aplicações

Algumas aplicações podem ser resolvidas mais facilmente com argumentos geoméricos e outras por analíticos.

Comecemos com um exemplo sofisticado.

Exemplo 8 (Ponto de Fermat-Torricelli)**.** O *Ponto de Fermat-Torricelli* de um triângulo $\triangle ABC$ é um ponto F que minimiza a soma $FA + FB + FC$. Observe que tal ponto não pode ser externo ao triângulo (a desigualdade triangular resolve isso).

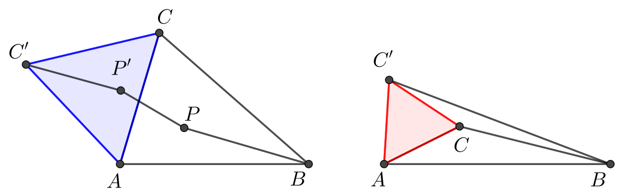

FIGURA 3

Seja $P \neq A$ um ponto do plano que não esteja no exterior do triângulo. Seja $\alpha = \pi/3$ se os vértices do triângulo estiverem nomeados no sentido anti-horário, e $\alpha = -\pi/3$ caso contrário. Sejam $C' = R_{A,\alpha}(C)$ e $P' = R_{A,\alpha}(P)$. Daí o triângulo $\triangle PAP'$ é equilátero e, portanto $AP = PP'$. Assim, $AP + BP + CP = PP' + BP + C'P'$. A soma da direita será mínima se os pontos B P e C' forem colineares. Se o segmento $\overline{BC'}$ não for externo ao triângulo $\triangle ABC$, então temos um procedimento para localizar o ponto F desejado. Se um dos ângulos $B\hat{A}C$ ou $B\hat{C}A$ medir mais que $2\pi/3$ (ou $120°$), então $\overline{BC'}$ será externo ao triângulo.

Assim, se todos os ângulos do triângulo forem menores que $2\pi/3$, o seguinte procedimento determina o ponto de Fermat-Torricelli. Se $C' = R_{A,\alpha}(C)$ $B' = R_{A,-\alpha}(B)$, o ponto F está na intersecção dos segmentos $\overline{CB'}$ e $\overline{BC'}$. Veja a Figura 4.

Se o ângulo em um dos vértices medir $2\pi/3$, então tal vértice será o ponto F. Se o ângulo em um dos vértices medir mais que $2\pi/3$, então tal vértice será o ponto F.

Exemplo 9. Dado um triângulo $\triangle ABC$ qualquer, sejam L, M e N os centros dos triângulos equiláteros $\triangle ABD$, $\triangle BCE$ e $\triangle CAF$ construídos externamente sobre os lados do triângulo $\triangle ABC$, respectivamente. Então o triângulo $\triangle LMN$ é equilátero. Acompanhe a argumentação com a Figura 5.

Podemos supor que os vértices A, B e C estão nomeados em sentido anti-horário. Seja $\alpha = 2\pi/3$. Assim, $B = R_{L,\alpha}(A)$, $C = R_{M,\alpha}(B)$

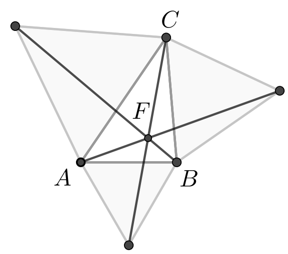

Figura 4. Ponto de Fermat-Torricelli.

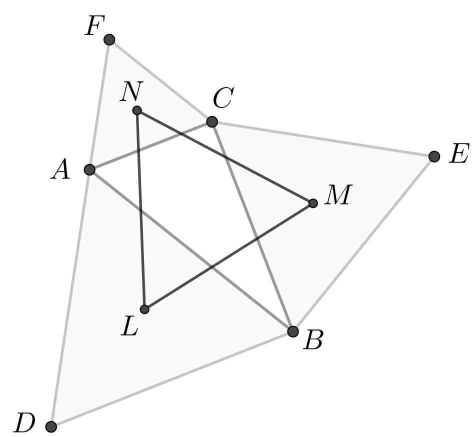

Figura 5. Triângulo com vértices os centros dos triângulos equiláteros externos construídos sobre os lados.

e $A = R_{N,\alpha}(C)$. A composição $R_{L,\alpha} \circ R_{M,\alpha} \circ R_{N,\alpha}$ tem o ponto fixo A e, portanto, tem que ser a identidade, pois a soma dos ângulos é $3 \times \alpha = 2\pi$ e, portanto, uma translação. A única translação com ponto fixo é a identidade.

Para que isso ocorra, deveremos ter $R_{L,-2\pi/3} = R_{M,2\pi/3} \circ R_{N,2\pi/3}$. Perceba que a comosição do lado direito é uma rotação de centro G e ângulo medindo $4\pi/3 = -2\pi/3 + 2\pi$, onde o triângulo $\triangle MNG$ é equilátero. Veja a Figura 6.

Aqui vão alguns exercícios de aplicações de rotações.

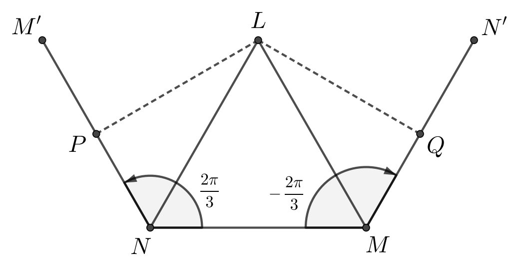

FIGURA 6. Composição de duas rotações de ângulos medindo $2\pi/3$. O quadrilátero $N'MNN'$ é a metade de um hexágono regular e, portanto o encontro das mediatrizes indicadas é o circuncentro da figura, ou seja, $\triangle LMN$ é equilátero.

Exercício 10. Mostre que os centros dos quadrados construídos externamente sobre os lados de um paralelogramo são os vértices de um quadrado. [Sugestão: composição de rotações tendo, pelo menos, um ponto fixo.]

Definição 3 (Ângulo Orientado Entre Retas)**.** Dadas duas retas distintas r e s, concorrentes em um ponto O, dizemos que α ($|\alpha| < \pi$) é o ângulo orientado de r para s se $R_{O,\alpha}(r) = s$. Observe que se α for um ângulo orientado de r para s, então $\pi - \alpha$ também o será. Para retas paralelas ou coincidentes, o ângulo orientado entre elas é 0.

Exercício 11. Dadas duas retas distintas r es, concorrentes no ponto O, e ângulo orientado α de r para s, determine o lugar geométrico dos pontos P do plano, para os quais $R_{P,\alpha}(r) = s$. [Sugestão: se $P \neq O$ for um desses pontos, o que acontece com as retas perpendiculares a r e a s, passando por P?]

Exercício 12. Dadas três retas paralelas e distintas, r, s e t, como determinar um triângulo equilátero $\triangle ABC$, com $A \in r$, $B \in s$ e $C \in t$? [Sugestão: quais rotações relacionam pares de vértices do triângulo? Observe que você tem a liberdade de escolher um dos vértices, por exemplo A; daí os outros dependerão deste.]

Exercício 13. Dados um ponto P e três medidas $a, b, c > 0$, construir um triângulo equilátero $\triangle ABC$ contendo P em seu interior e tal que $PA = a$, $PB = b$ e $PC = c$. [Sugestão: o vértice A está na circunferência de centro P e raio a, etc. A solução parece-se com a do exercício acima.]

Exercício 14. Dados os pontos $M_1, \ldots, M_n$, para algum $n \geq 3$, e medidas de ângulos $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$, determine os vértices de um polígono $A_1, \ldots, A_n$, tais que cada M_i forma um triângulo isósceles $\triangle M_i A_i A_{i+1}$ (convencionando que A_{n+1} seja A_1), de bases $\overline{A_i A_{i+1}}$ e $m(A_i \hat{M}_i A_{i+1}) = \alpha_i$. [Sugestão: achar ponto fixo de uma composição de rotações.]

Exercício 15. Dado o centro M de um quadrado $ABCD$ a ser determinado, e dois pontos $P \in \overleftrightarrow{AB}$ e $Q \in \overleftrightarrow{BC}$, determine o quadrado. Observe que as retas $\overleftrightarrow{AB}$ e $\overleftrightarrow{BC}$ ainda são desconhecidas. [Sugestão: o que acontece ao rodarmos pelo centro as retas suportes dos lados do quadrado?]

Exercício 16. Dados três pontos distintos O, P e Q, construir um triângulo equilátero cujo centro seja O e P e Q pertencem a retas suporte de duas arestas. [Sugestão: com qual ângulo o centro O enxerga um par de vértices?]

Exercício 17. Dados dois pontos A e B, uma circunferência $\mathbb{S}$ de centro O e uma medida de ângulo α, determine os pontos $C, D \in \mathbb{S}$, tais que $\overline{AC} \parallel \overline{BD}$ e $m(C\hat{O}D) = \alpha$. [Sugestão: se $\overline{DA'} = R_{O,\alpha}(\overline{CA})$, então $m(B\hat{D}A') = \alpha$, ou seja, o ponto D enxerga a corda $\overline{BA'}$ por um ângulo α.]

Exercício 18. Seja $ABCD$ um quadrado de centro O e cujos vértices estejam listados em sentido positivo (anti-horário). Mostre que $R_{A,\pi/2} \circ R_{B,\pi/2} = R_O$.

Exercício 19. Seja $X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x, y \in \mathbb{Z}\}$. Quais são as rotações $R_{M,\alpha}$, tais que $R_{M,\alpha}(X) = X$?

Exercício 20. Sabemos que é possível *ladrilhar* o plano coom hexágonos regulares, todos congruentes entre si (lembre-se de um favo de mel). Quais são as rotações que deixam tal ladrilhamento invariante?