SUGESTÕES PARA RESOLVER OS EXERCÍCIOS DE MAT-310: TRANSLAÇÕES

RICARDO BIANCONI

Resumo. O objetivo dos exercícios é o uso de transformações geométricas para a resolução de problemas. Mesmo que eles admitam outras soluções que não usem transformações, os exercícios têm que ser resolvidos com elas.

Aviso Importante: Quase todas as aplicações envolvem determinar um ou mais pontos, sujeitos a restrições. Por exemplo, se precisamos achar um ponto P em um conjunto X e um ponto P' em outro conjunto Y (que pode ser o próprio X), e que $P' = F(P)$, para alguma transformação F, impomos as condições que $P' \in Y$ e que também $P' \in F(X)$, ou seja, P' tem que estar em Y, mas também está na imagem de X (onde estará o ponto P) pela transformação F.

Em geral, para descobrirmos qual transformação resolve o problema, admitimos o problema resolvido para analisarmos as propriedades geométricas das figuras devemos utilizar.

1. Translações

Nesta seção vamos tratar de alguns dos problemas das páginas 42 e 43 do livro emphUm Estudo Geométrico das Transformações Elementares, de Sérgio Alves e Maria Elisa E. L. Galvão, das Publicações do IMEUSP. Aqueles não tratados aqui têm solução similar a de algum dos abaixo. A numeração dos exercícios não corresponde à do livro.

Exercício 1. *Inscrever em uma dada circunferência um retângulo com dois lados paralelos e congruentes a um segmento dado.*

Análise do problema. Precisamos achar os vértices de um retângulo $ABCD$, todos pertencentes a uma circunferência $\mathbb{S}$ dada. Outra condição é que dois de seus lados, digamos $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$, sejam paralelos e congruentes a um segmento $\overline{PQ}$ dado. É claro que para o problema ter solução, o segmento $\overline{PQ}$ não pode ser maior ou igual ao diâmetro de $\mathbb{S}$.

Pensando vetorialmente, as flechas $\vec{AB}$ e $\vec{DC}$ têm que representar o mesmo vetor $\vec{v}$ da flecha $\vec{PQ}$, ou seja, $B = T_{\vec{v}}(A)$ e $C = T_{\vec{v}}(B)$. Daí, $B, C \in \mathbb{S} \cap T_{\vec{v}}(\mathbb{S})$. Depois, temos que $A = T_{-\vec{v}}(B)$ e $D = T_{-\vec{v}}(C)$.

Para os que tiverem dúvida sobre a figura $ABCD$ ser um retângulo, perceba que ela é um paralelogramo inscrito em uma circunferência.

Exercício 2. *Provar que* $T_{\vec{v}} \circ T_{\vec{AB}} \circ (T_{\vec{v}})^{-1} = T_{\vec{A'B'}}$, *onde* $A' = T_{\vec{v}}(A)$ *e* $B' = T_{\vec{v}}(B)$.

Sugestão: Cuidado, é para mostrar que as expressões dos dois lados da igualdade representam a mesma função. Observe que $ABB'A'$ é um paralelogramo. Assim, se $\vec{w}$ é o vetor representado pela flecha $\vec{AB}$, então ele também é representado pela flecha $\vec{A'B'}$. Uma vez que saibamos isso, podemos argumentar assim:

$$T_{\vec{v}} \circ T_{\vec{AB}} \circ (T_{\vec{v}})^{-1} = T_{\vec{v}} \circ T_{\vec{w}} \circ (T_{\vec{v}})^{-1} = T_{\vec{v}} \circ (T_{\vec{v}})^{-1} \circ T_{\vec{w}} = T_{\vec{w}} = T_{\vec{A'B'}},$$

onde usamos que a composição de translações comutam.

Exercício 3. *Dadas duas circunferências* $\mathbb{S}_1$ *e* $\mathbb{S}_2$ *e um segmento* $\overline{MN}$, *determinar um segmento* $\overline{AB}$ *paralelo e congruente com* $\overline{MN}$, *com* $A \in \mathbb{S}_1$ *e* $B \in \mathbb{S}_2$.

Sugestão: As palavras *paralelo* e *congruente* indicam que o segmento $\overline{MN}$ serve "apenas" para determinar um vetor $\vec{v}$, representado pela flecha $\vec{MN}$ (ou pela flecha $\vec{NM}$, dependendo das posições das circunferências). Veja o aviso importante acima.

Exercício 4. *Determinar o lugar geométrico dos pontos do plano cuja diferenç das distãncias a duas retas concorrentes desse plano seja igual a um valor dado* m.

Solução: Sejam r e s as duas retas dadas, concorrentes em um ponto O. A condição da diferença das distâncias sugerem dois vetores, $\vec{v}$ e $\vec{w}$, ambos com módulos $\|\vec{v}\| = \|\vec{w}\| = m$, com $vecv \perp s$ e $\vec{w} \perp r$; escolha um sentido para cada um deles.

Sejam $A \in r \cap T_{\vec{v}}(s)$, $B \in r \cap T_{-\vec{c}}(s)$, $C \in s \cap T_{\vec{w}}(r)$ e $D \in s \cap T_{-\vec{w}}(r)$. Então valem as relações $A{-}O{-}B$, $C{-}O{-}D$ e $\mathrm{dist}(A, s) = \mathrm{dist}(B, s) = \mathrm{dist}(C, r) = \mathrm{dist}(D, r) = m$. Esses quatro pontos satisfazem a condição de diferença das distâncias.

Agora seja $s' = T_{\vec{v}}(s)$. As retas r e s' são concorrentes no ponto A e a distângia de qualquer ponto de s' a s é sempre a mesma, m. A bissetriz $\overrightarrow{OE}$ (onde E é qualquer ponto dessa bissetriz para definir a semirreta) de $A\hat{O}C$ é equidistante de r e s e, se $E' = T_{\vec{v}}(E)$ então a semirreta $\overrightarrow{AE'}$ é equidistante de r e s'. Observe que se $P \in \overrightarrow{AE'}$, então $\mathrm{dist}(P, s) = \mathrm{dist}(P, s') + \mathrm{dist}(s', s) = \mathrm{dist}(P, r) + m$. Portanto, os pontos de $\overrightarrow{AE'}$ satisfazem a condição de diferença das distâncias.

Os outros pontos do lugar geométrico dever ser óbvios agora.

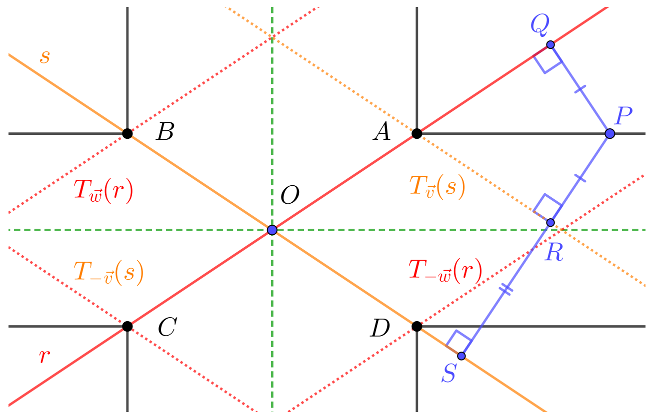

FIGURA 1. O lugar geomérico é indicado em preto, a reta r (e suas transladadas) em vermelho e s (e suas transladadas) em laranja. Para o ponto P indicado, valem $PQ = \text{dist}(P, r) = \text{dist}(P, T_{\vec{v}}(s)) = PR$ e $PS = \text{dist}(P, s) = PR + RS$, com $RS = m$.

Exercício 5. *Dado um ângulo $A\hat{B}C$, determinar $P \in \overleftrightarrow{AB}$ e $Q \in \overleftrightarrow{BC}$, tais que $PQ = AB$ e $\overleftrightarrow{PQ}$ intercepta $\overleftrightarrow{BC}$ formando um ângulo de $60°$.*

Sugestão: a solução aqui segue o aviso importante acima, onde o conjunto X é a reta $\overleftrightarrow{AB}$ e Y a reta $\overleftrightarrow{BC}$. O vetor $\vec{v}$ tem módulo igual a AB e sua direção faz $60°$ com a reta $\overleftrightarrow{BC}$. Cuidado: existem pelo menos duas possibilidades para tal vetor (qual é a orientação do ângulo; e também observe que se $\vec{v}$ serve, então $-\vec{v}$ também serve!).

Exercício 6. *Construir um quadrilátero convexo $ABCD$, sendo dados os (tamanhos de) seus lados e a media $0 < \alpha \leq \pi/2$ entre as retas suportes dos lados opostos $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$.*

Análise: suponha que já conheçamos o quadrilátero $ABCD$ e seja C', tal que $\overline{AC'} \parallel \overline{DC}$ e $AC' = DC$. Assim, $AC'CD$ é um paralelogramo e, daí, as flechas $\vec{AC'}$ e $\vec{DC}$ representam o mesmo vetor $\vec{v}$. Observe que teremos $C = T_{\vec{v}}(D)$. Como C pertence à circunferência $\mathbb{S}_1$ de centro A e raio AD (este valor é dado) e D à circunferência de centro B e raio BC (também é dado), para achar o ponto C faça interseção $\mathbb{S}_2 \cap T_{\vec{v}}(\mathbb{S}_1)$. Veja a Figura 2.

Exercício 7. *Dadas duas circunferências $\mathbb{S}_1$ e $\mathbb{S}_2$ (de centros O_1 e O_2, respectivamente), um comprimento $m > 0$ e uma reta r, determinar*

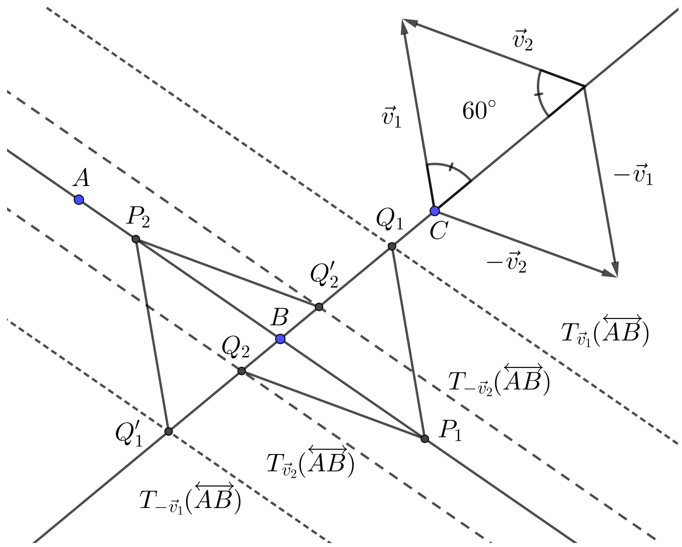

FIGURA 2. Os vetores $\pm\vec{v}_1$ e $\pm\vec{v}_2$ formam um ângulo de $60°$ com a reta $\overleftrightarrow{BC}$.

uma reta $s \parallel r$, tal que $s \cap \mathbb{S}_2 = \{A_1, B_1\}$, $s \cap \mathbb{S}_2 = \{A_2, B_2\}$, tal que $A_1B_1 + A_2B_2 = m$.

Sugestão: Por uma translação $T_{\vec{v}}$ (a ser determinada), podemos conectar os dois segmentos, ou seja, fazemos $A'_1 = T_{\vec{v}}(A_1)$ e $B'_1 = T_{\vec{v}}(B_1) = A_2$, de modo que $A'_1 - B'_1 - B_2$ e $A'_1B_2 = m$. Parte da informação sobre o vetor $\vec{v}$ está contida na reta r dada: sua direção; o sentido depende das posições das circunferências. Só falta o módulo. Para descobri-lo, suponhamos o problema resolvido e tracemos as perpendiculares $\overline{O'_1M} \perp \overline{A'_1B'_1}$ e $\overline{O_2N} \perp \overline{A_2, B_2}$, onde $O'_1 = T_{\vec{v}}(O_1)$. Então M é o ponto médio da corda $\overline{A'_1B'_1}$ e N o ponto médio da corda $\overline{A_2B_2}$. Portanto, $MN = m/2$. Seja $t \perp r$ um reta tal que $\mathrm{dist}(O_2, t) = m/2$ e seja $k = \mathrm{dist}(O_1, t)$. O módulo de $\vec{v}$ será esse k.

Exercício 8. *Dadas duas circunferências $\mathbb{S}_1$ e $\mathbb{S}_2$ (de centros O_1 e O_2 e raios ρ_1 e ρ_2, respectivamente) e um ponto A traçar uma reta spassando por A, com $s \cap \mathbb{S}_\ell = \{A_\ell, B_\ell\}$, $\ell = 1, 2$, de modo que $\overline{A_1B_1} \equiv \overline{A_2B_2}$.*

Análise: Seja $T_{\vec{v}}$ a translação (a ser determinada), tal que se $\mathbb{S}'_1 = T_{\vec{v}}(\mathbb{S}_1)$ e $\mathbb{S}_2 \cap \mathbb{S}'_1 = \{A_2, B_2\}$, observe que a reta $\overleftrightarrow{O_2, O'_1}$ é a mediatriz da corda $\overline{A_2B_2}$. Em particular, $\triangle O_1O_2O'_1$ é um triângulo retângulo, cuja hipotenusa é $\overline{O_1O_2}$ (conhecida). Daí o vértice O'_1 do ângulo reto está na circunferência de diâmetro a hipotenusa $\overline{O_1O_2}$. Sejam $T_2 \in \mathbb{S}_2$ e $T_1 \in \mathbb{S}_1'$ os pontos de tangência das retas $\overleftrightarrow{AT_2}$ e $\overleftrightarrow{AT_1'}$. Potência de pontos em relação às circunferências $\mathbb{S}_2$ e $\mathbb{S}_1'$ produz as igualdades: $AT_2^2 = AA_2\,AB_2 = (AT_1')^2$. O triângulo $\triangle AT_1'O_1'$ é retângulo em T_1'. conhecemos o tamanho da hipotenusa $AT_1' = AT_2$ e de um de seus catetos $O_1'T_1' = \rho_1$. Daí determinamos o tamanho do outro cateto $AO_1' = \sqrt{AT_2^2 + \rho_1^2}$. O ponto O_1' está na circunferência de centro A e raio $\sqrt{AT_2^2 + \rho_1^2}$, etc.

Exercício 9. *Dadas duas cordas $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ de uma circunferência $\mathbb{S}$, encontre um ponto $X \in \mathbb{S}$, tal que as cordas $\overline{AX}$ e $\overline{BX}$ determinem sobre $\overline{CD}$ um segmento $\overline{EF}$ de comprimento dado m.*

Análise: Suponha conhecido o ponto Xe, portanto, o segmento $\overline{EF}$. Seja $A' = T_{\vec{EF}}(A)$. Daí, $B\hat{F}A' \equiv B\hat{X}A$. Use arcos capazes.