Similaridades no Plano

Ricardo Bianconi

Abril, 2013

1 Introdução: Teoria Geral das Similaridades

Este texto apresenta um resumo da teoria das similaridades do plano euclideano, começando com a teoria geral, para depois tratar das suas aplicações na solução de problemas geométricos.

1.1 O Plano Euclideano

Denotemos o plano euclideano pela letra $\mathbb{E}$. Isto quer dizer que $\mathbb{E}$ é um conjunto de pontos $\mathbb{E}$, com uma coleção de subconjuntos distinguidos, chamados de retas, e munido de relações de incidência ordem e congruência de segmentos e de ângulos, satisfazendo os postulados da geometria euclideana. Em particular, para ganharmos tempo, assumiremos os postulados da geometria métrica de Birkhoff, ou seja,

1. para cada reta r do plano, existe uma função bijetora $f_r : r \to \mathbb{R}$, tal que, se $A - B - C$, então ou $f(A) < f(B) < f(C)$, ou $f(C) < f(B) < f(A)$, e se $A, B \in r$ e $C, D \in s$ forem tais que $\overline{AB} \equiv \overline{CD}$, então $|f_r(A) - f_r(B)| = |f_s(C) - f_s(D)|$;

2. vale o postulado de Pasch, ou seja, dado o triângulo $\triangle ABC$ e reta r, se existir $P \in r$, tal que $A - P - B$, então existe $Q \in r$, tal que $Q = C$, ou $A - Q - C$, ou $B - Q - C$; assumiremos que você saiba das suas consequências: separação de plano e definição de interior de ângulos;

3. existe uma função m que associa a cada ângulo orientado $\angle AOB = (\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$ um número real $m(\angle AOB \in]-\pi, \pi]$, de modo que se $\angle AOB \equiv \angle CPD$, então $m(\angle AOB) = m(\angle CPD)$ e tal que se X for um ponto do interior do ângulo $\angle AOB$, então $m(\angle AOB) = m(\angle AOX) + m(\angle XOB)$;

4. o postulado LAL (lado-ângulo-lado): dados os triângulos $\triangle ABC$ e $\triangle DEF$, caso $\overline{AB} \equiv \overline{DE}$, $\overline{AC} \equiv \overline{DF}$ e $m(\angle CAB) = m(\angle FDE)$, então $\triangle ABC \equiv \triangle DEF$;

5. o postulado das paralelas: dada uma reta r e um ponto $P \notin r$, existirá uma única reta $s \ni P$, tal que $r \cap s = \varnothing$.

Esses postulados e suas consequências serão assumidos em todo este texto.

Em particular, assumiremos que o plano euclideano possa ser coordinatizado pelo conjunto $\mathbb{R}^2$ e assumiremos toda aquela parte de Geometria Analítica e Vetores.

1.2 Relembrando as Isometrias

Lembramos que as isometrias do plano são as transformações que preservam congruência de segmentos e, por conseguinte, preservam também ângulos.

Em particular, dados dois triângulos $\triangle ABC$ e $\triangle DEF$, tais que sejam congruentes, considerando a associação de pontos $A \mapsto D$, $B \mapsto E$ e $C \mapsto F$, então existe uma única isometria F do plano, satisfazendo $F(A) = D$, $F(B) = E$ e $F(C) = F$. A demonstração desta afirmação é bem simples:

Sabemos também que cada isometria do plano ou é uma translação, ou uma rotação em torno de um ponto, ou uma reflexão em relação a uma reta, ou uma reflexão transladada (que é uma reflexão em relação a uma reta composta com uma translação paralela àquela reta).

Neste texto estudaremos as transformações do plano que levam figuras em figuras semelhantes, que chamaremos de **similaridades**. Denotaremos o plano (euclideano) por $\mathbb{E}$.

1.3 Similaridades

Dado um número real positivo $\lambda \in \mathbb{R}$, definimos uma similaridade do plano de fator λ como sendo uma transformação $F : \mathbb{E} \to \mathbb{E}$, tal que $\overline{F(A)F(B)} = \lambda\overline{AB}$, para todo par de pontos $A, B \in \mathbb{E}$.

É claro que as isometrias são consideradas como casos particulares de similaridades (basta tomarmos $\lambda = 1$). Nosso primeiro objetivo será classificar todas as similaridades do plano e usá-las para resolver problemas geométricos.

Um primeiro resultado que caracteriza as similaridades é o seguinte.

Proposição 1 *Toda similaridade do plano é uma colineação, ou seja, a imagem de uma reta por uma similaridade é uma reta.*

Demonstração: Observemos que a soma de segmentos $\overline{AB} + \overline{BC} = \overline{AC}$ somente será verdadeira se $A - B - C$ (isto é, os três pontos estão em uma mesma reta e B está entre A e C). Dessa forma, para demonstrar que as imagns de retas por uma similaridade serão retas, basta demostramos que a similaridade preserva a relação de ordem de pontos (que em si já contém a noção de colinearidade).

Suponhamos que $F : \mathbb{E} \to \mathbb{E}$ seja uma similaridade e que $\lambda > 0$ seja a constante tal que valha $\overline{F(A)F(B)} = \lambda\overline{AB}$, para todo par de pontos $A, B \in \mathbb{E}$. Para demonstrarmos que F será uma colineação, usaremos a asserção do parágrafo anterior. Tomemos três pontos satisfazendo $A - B - C$. Então sabemos que $\overline{AB} + \overline{BC} = \overline{AC}$. Sejam $A' = F(A)$, $B' = F(B)$ e $C' = F(C)$. Dado que $\overline{A'B'} = \lambda AB$, $\overline{B'C'} = \lambda\overline{BC}$ e $\overline{A'C'} = \lambda\overline{AC}$, concluímos que $\overline{A'B'} + \overline{B'C'} = \overline{A'C'}$. Assim, podemos afirmar que $A' - B' - C'$ e, portanto, que F será uma colinearidade. $\square$

Exercício 1: Mostre que uma similaridade do plano preserva medida de ângulos (não orientados).

Proposição 2 *Dados dois triângulos $\triangle ABC$ e $\triangle A'B'C'$, que sejam semelhantes, com razão de semelhança $\lambda > 0$, existe uma única similaridade $F : \mathbb{E} \to \mathbb{E}$, tal que $F(A) = A'$, $F(B) = B'$ e $F(C) = C'$.*

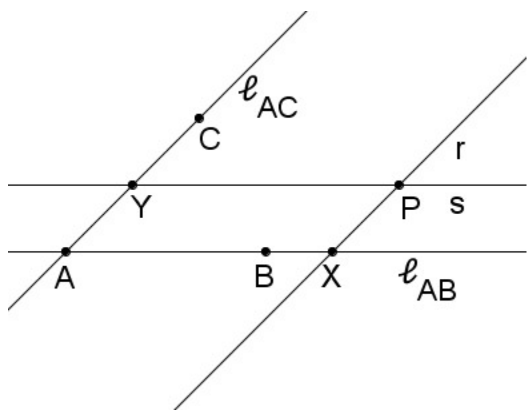
Demonstração: Comecemos com a parte da existência.

Se $A - X - B$, $A - B - X$ ou $X - A - B$ seja P', tal que $A' - X' - B'$, ou $A' - B' - X'$, ou $X' - A' - B'$, respectivamente, de modo que $A'X'/A'B' = \lambda AX/AB$. Definimos $F(X) = X'$.

Se $A - Y - C$, $A - C - Y$ ou $Y - A - C$ seja P', tal que $A' - Y' - C'$, ou $A' - C' - Y'$, ou $Y' - A' - C'$, respectivamente, de modo que $A'Y'/A'C' = \lambda AY/AC$. Definimos $F(Y) = Y'$.

Se P for um ponto que não pertença à reta ℓ_{AB} e nem à reta ℓ_{AC}, sejam $r \ni P$ e $s \ni P$ as retas paralelas às retas ℓ_{AC} e ℓ_{AB}, respectivamente, e sejam $X \in \ell_{AB}$ e $Y \in \ell_{AC}$ as respectivas interseções de r e s com aquelas retas.

Chamaremos X de abscissa do ponto P e Y de ordenada de P e o par (X, Y) de coordenadas de P.



Definimos os pontos $X' = F(X) \in \ell_{A'B'}$ e $Y' = F(Y) \in \ell_{A'C'}$ como acima. Traçamos as retas $r' \ni X'$ paralela à reta $\ell_{A'C'}$ e $s' \ni Y'$ paralela a $\ell_{A'B'}$. As retas r' e s' são concorrentes em um ponto P'. Definimos $F(P) = P'$.

Mostremos que f assim definida é uma similaridade de fator λ.

Sejam $P, Q \in \mathbb{E}$ dois pontos, $P' = F(P)$ e $Q' = F(Q)$. Sejam (X_1, Y_1) as coordenadas de P e (X_2, Y_2) as coordenadas de Q. Sejam $X'_i = F(X_i)$ e $Y'_i = F(Y_i)$, para $i = 1, 2$.

Por construção, temos que $X'_i A' = \lambda X_i A$, etc, e, portanto, comparando-se os diversos triângulos pertinentes, obteremos que $P'Q' = \lambda PQ$, ou seja, F ser'a uma similaridade de fator λ.

Agora passemos à demonstração da unicidade da similaridade.

Examinando a construção de F dada acima, vemos que se F e G forem similaridades, tais que $F(A) = G(A) = A'$, $F(B) = G(B) = B'$ e $F(C) = G(C) = C'$ e se (X, Y) forem as coordenadas de P, então $F(X) = G(X) = X'$ e $F(Y) = G(Y) = Y'$, o que implica que $F(P) = G(P)$, ou seja, aquela similaridade F construída acima é a única que satisfa a condição da proposição. $\square$

1.4 Homotetias

Tratemos agora de um tipo importante de similaridade, chamda de homotetia.

Dado um ponto $O \in \mathbb{E}$ e um número real $\lambda > 0$, seja $h_{O,\lambda} : \mathbb{E} \to \mathbb{E}$ a transformação definida pelas seguintes condições:

1. $h_{O,\lambda}(O) = O$;
2. se $P \neq O$, então $h_{O,\lambda}(P) = P'$ dado por:
   (a) se $0 < \lambda < 1$, $O - P' - P$ e $OP' = \lambda OP$;
   (b) se$\lambda = 1$, $P' = P$;
   (c) se $\lambda > 1$, $O - P - P'$ e $OP' = \lambda OP$.

Observe que $h_{O,1}$ é a identidade.

Exercício 2: Mostre que $h_{O,\lambda}$ é similaridade de fator λ.

Exercício 3: Mostre que se $\lambda \neq 1$, então O é o único ponto fixo de $h_{O,\lambda}$.

Exercício 4: Mostre que se f e g forem similaridades de fatores λ_1 e λ_2, respectivamente, então $f \circ g$ será uma similaridade de fator $\lambda = \lambda_1\lambda_2$.

Exercício 5: Mostre que a inversa de $h_{O,\lambda}$ é $h_{O,1/\lambda}$.

Exercício 6: Mostre que $h_{O,\lambda} = T_{\overrightarrow{PO}} \circ h_{P,\lambda} \circ T_{\overrightarrow{OP}}$. Faça um desenho para ajudar na argumentação.

Exercício 7: Usando a identificação de $\mathbb{E}$ com $\mathbb{R}^2$, mostre que se $P = (x, y)$ e $O = (a, b)$, então $h_{O,\lambda}(P) = (a + \lambda(x - a), b + \lambda(y - b))$.

1.5 Similaridades Próprias e Impróprias

O próximo resultado mostra por que homotetia é importante.

Proposição 3 *Seja F uma similaridade do plano de fator $\lambda > 0$. Dado um ponto $O \in \mathbb{E}$, existem únicas isometrias g_1 e g_2, tais que $F = g_1 \circ h_{O,\lambda} = h_{O,\lambda} \circ g_2$.*

Demonstração: Como $F \circ h_{O,1/\lambda} = g_1$ e $h_{O,1/\lambda} \circ F = g_2$ são similaridades de fator 1, elas são isometrias. □

No caso em que a isometria g_1 for própria (preserva a orientação do plano), então g_2 também o será e a similaridade f será chamada de similaridade própria. Caso g_1 (e, portanto, g_2) for imprópria, a similaridade f será chamada de similaridade imprópria.

Lembre-se que as isometrias impróprias são as reflexões por retas e as reflexões transladadas.

Exercício 8: Mostre que a composição de uma homotetia $h_{O,\lambda}$ com uma translação $T_{\vec{v}}$ também será uma homotetia. Determine os novos centros P e Q das homotetias $h_{P,\lambda} = h_{O,\lambda} \circ T_{\vec{v}}$ e $h_{Q,\lambda} = T_{\vec{v}} \circ h_{O,\lambda}$.

Exercício 9: Suponhamos que $\lambda \neq 1$ e que a reta r contenha o ponto O. Mostre que o ponto O será o único ponto fixo pela similaridade $h_{O,\lambda} \circ R_r$. Mostre também que $h_{O,\lambda} \circ R_r = R_r \circ h_{O,\lambda}$ e que essa similaridade não é uma homotetia.

Exercício 10: Seja $\alpha \in]-\pi, \pi] \setminus \{0\}$. Mostre que O é o único ponto fixo da similaridade $h_{O,\lambda} \circ R_{O,\alpha}$, e que $h_{O,\lambda} \circ R_{O,\alpha} = R_{O,\alpha} \circ h_{O,\lambda}$.

2 Similaridades centrais

Vimos na seção anterior que, se $\lambda \neq 1$, então a homotetia $h_{O,\lambda}$ tem um único ponto fixo, o ponto O. Neste caso, o ponto O será chamado de centro da simnilaridade $h_{O,\lambda}$.

Em geral, uma similaridade f que tiver um único ponto fixo O será chamada de similaridade central.

São exemplos imediatos de similaridades centrais as composições $h_{O,\lambda} \circ R_O$, $h_{O,\lambda} \circ R_{O,\alpha}$ e $h_{O,\lambda} \circ R_\ell$, sendo que neste último, o ponto $O \in \ell$.

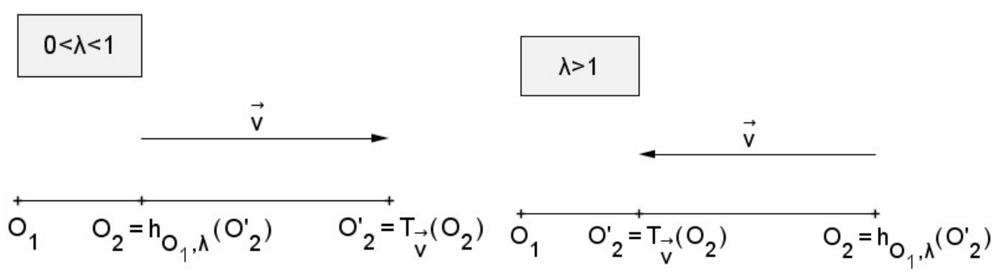
Exercício 11: Mostre que nesses casos $h_{O,\lambda} \circ R_O = R_O \circ h_{O,\lambda}$, $h_{O,\lambda} \circ R_{O,\alpha} = R_{O,\alpha} \circ h_{O,\lambda}$ e $h_{O,\lambda} \circ R_\ell = R_\ell \circ h_{O,\lambda}$.

Exercício 12: Mostre que se f for similaridade de fator $\lambda \neq 1$, que possui (pelo menos) um ponto fixo O (ou seja, $f(O) = O$), então nenhum outro ponto do plano poderá ser ponto fixo de f.

Veremos que se f for uma similaridade de fator $\lambda \neq 1$, então ela será uma similaridade central.

2.1 Similaridades Centrais Próprias

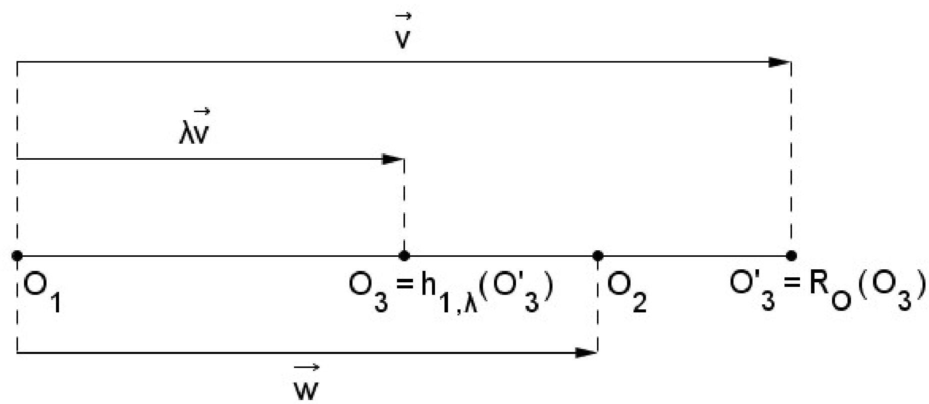
Já vimos que a composição de uma homotetia com uma translação é uma homotetia de centro deslocado e que a composição de uma rotação com uma homotetia de mesmos centros é uma similaridade central.



Agora temos que verificar agora que a composição de uma homotetia com uma rotação de centros distintos ainda é uma similaridade central. Comecemos com a rotação de ângulo π.

Proposição 4 *Consideremos a composição $h_{O_1,\lambda} \circ R_{O_2}$, supondo que $O_1 \neq O_2$ e que $\lambda > 0$ e $\lambda \neq 1$. Então existe um ponto O_3 na semirreta $\overrightarrow{O_1O_2}$, tal que $h_{O_1,\lambda} \circ R_{O_2} = h_{O_3,\lambda} \circ R_{O_3}$. Esse ponto O_3 será chamado de centro da similaridade.*

Demonstração: Temos que achar o centro O_3, tal que $h_{O_1,\lambda} \circ R_{O_2,\alpha} = h_{O_3,\lambda} \circ R_{O_3,\alpha}$, ou seja, precisamos localizar o ponto fixo O_3 daquela transformação.



Em termos de vetores, o ponto O_3 pode ser obtido, conhecendo-se o vetor $\overrightarrow{OO_3}$. Seja $\vec{w}$ o vetor $\overrightarrow{OO_2}$. Seja $O'_3 = R_{O_2}O_3$ e seja $\vec{v} = \overrightarrow{O_1O'_3}$, que pode ser descrito como $\vec{v} = 2\,\vec{w} - \vec{v}$ (**exercício:** deduza isto). Impondo-se que $h_{O_1,\lambda} \circ R_{O_2,\alpha}(O_3) = O_3$, em termos de vetores, temos que $\overrightarrow{O_1O_3} = \lambda\,\overrightarrow{O_1O'_3} = \lambda\,[2\,\overrightarrow{O_1O_2} - \overrightarrow{O_1O_3}]$, donde segue que

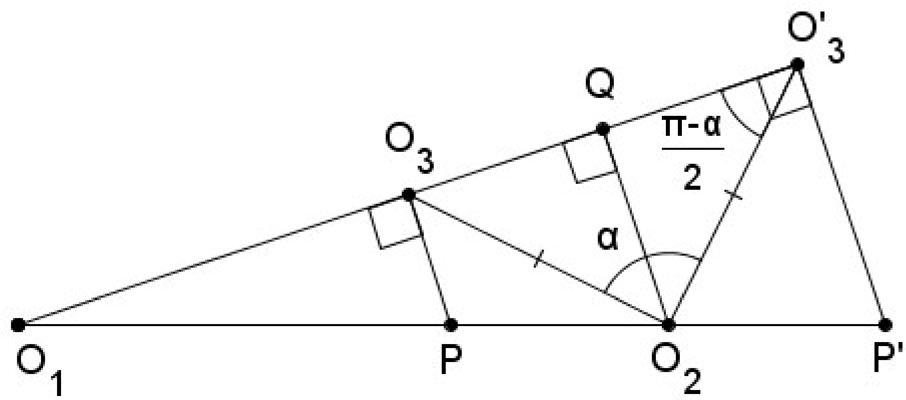
$$\overrightarrow{O_1O_3} = \frac{2}{1+\lambda}\overrightarrow{O_1O_2}.$$

Assim, determinamos o ponto fixo O_3 da composição. Como $\lambda \neq 1$, esse é o único ponto fixo. □

Agora vamos tratar do caso em que o ângulo de rotação mede $\alpha \neq 0, \pi$.

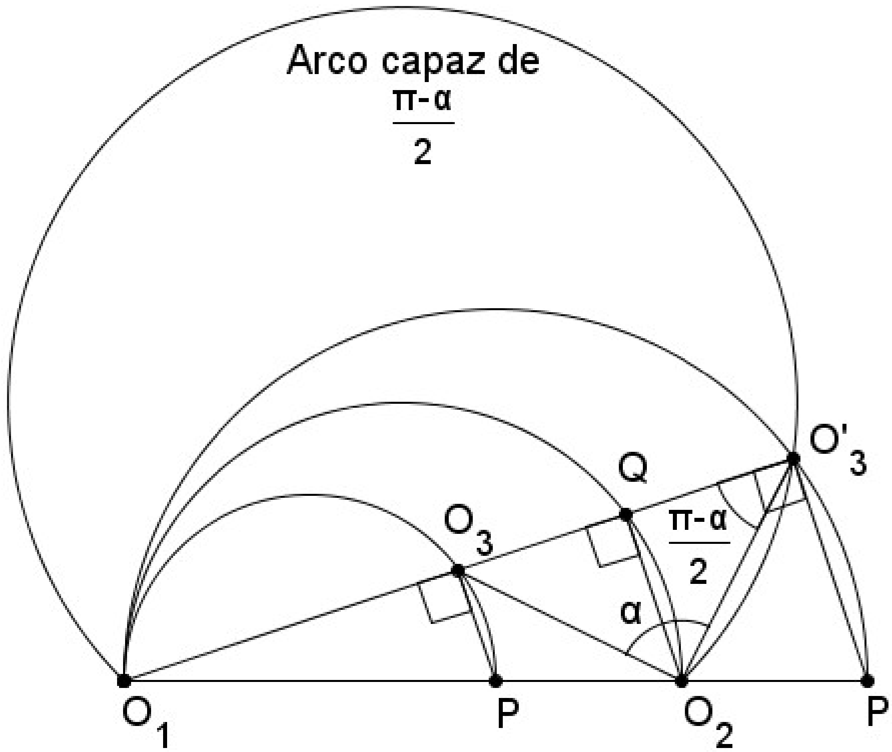
Proposição 5 *Consideremos a composição $h_{O_1,\lambda} \circ R_{O_2,\alpha}$, supondo que $O_1 \neq O_2$. Então existe um ponto O_3 na semirreta $\overrightarrow{O_1O_2}$, tal que $h_{O_1,\lambda} \circ R_{O_2,\alpha} = h_{O_3,\lambda} \circ R_{O_3,\alpha}$. Esse ponto O_3 será chamado de centro da similaridade.*

Demonstração: Consideremos a composição $h_{O_1,\lambda} \circ R_{O_2,\alpha}$. Temos que achar o centro O_3, tal que $h_{O_1,\lambda} \circ R_{O_2,\alpha} = h_{O_3,\lambda} \circ R_{O_3,\alpha}$, ou seja, precisamos localizar o ponto fixo O_3 daquela transformação.



Para podermos determinar o ponto fixo desejado, assumiremos que já o obtivemos e estudaremos suas propriedades para então descrevermos uma construção geométrica que o determine. A ideia seria construir triângulos semelhantes, da seguinte maneira: observe que o ponto fixo desejado, O_3, não poderá estar na reta $\ell_{A_1O_2}$, pois $\alpha \neq 0, \pi$. Seja O_3' o ponto da semirreta $\overrightarrow{O_1O_3}$, tal que $R_{O_2,\alpha}(O_3) = O_3'$. Como queremos que $h_{O_1,\lambda} \circ R_{O_2,\alpha}(O_3) = O_3$, então deveremos ter que $\lambda O_1\vec{O}_3' = O_1\vec{O}_3$. Sejam P e P' os pontos da semirreta $\overrightarrow{O_1O_2}$, tais que $\overline{PO_3}, \overline{P'O_3'} \perp \ell O_1O_3$. Então os triângulos $\triangle O_1PO_3$ e $\triangle O_1P'O_3'$ são semelhantes. Como $R_{O_2,\alpha}(O_3) = O_3'$, temos a congruência $\overline{O_2O_3} \equiv \overline{O_2O_3'}$. O ângulo $\angle O_3O_3'O_2$ mede $(\pi - \alpha)/2$.

Isto sugere a seguinte construção: se $\alpha < 0$ e $\lambda < 1$ (caso do desenho acima), o ponto O_3' está no arco capaz do ângulo de medida $(\pi - |\alpha|)/2$ referente à corda $\overline{O_1O_2}$ e também na semicircunferência de diâmetro $\overline{O_1P'}$, sendo que esses dois arcos deverão estar no semiplano determinado pela reta ℓO_1O_2 tal que o ângulo orientado $(\overrightarrow{O_1O_2}, \overrightarrow{O_1O_3})$ (que será necessariamente agudo) tenha medida positiva (novemente, olhe o desenho). No caso em que $\lambda > 1$ e $\alpha > 0$, trocam-se os pontos P com P'm e também O_3 com O_3' na construção acima descrita. Observe-se que, como o ângulo de medida $(\pi - |\alpha|)/2$ é agudo, os dois carcos descritos na construção terão duas interseções, uma será o ponto comum já conhecido, O_1, e o outro será o ponto O_3', ou O_3, procurado.



Para os casos em que $\lambda > 1$ e $\alpha < 0$, ou $\lambda < 1$ e $\alpha > 0$, faz-se o mesmo no outro semiplano. □

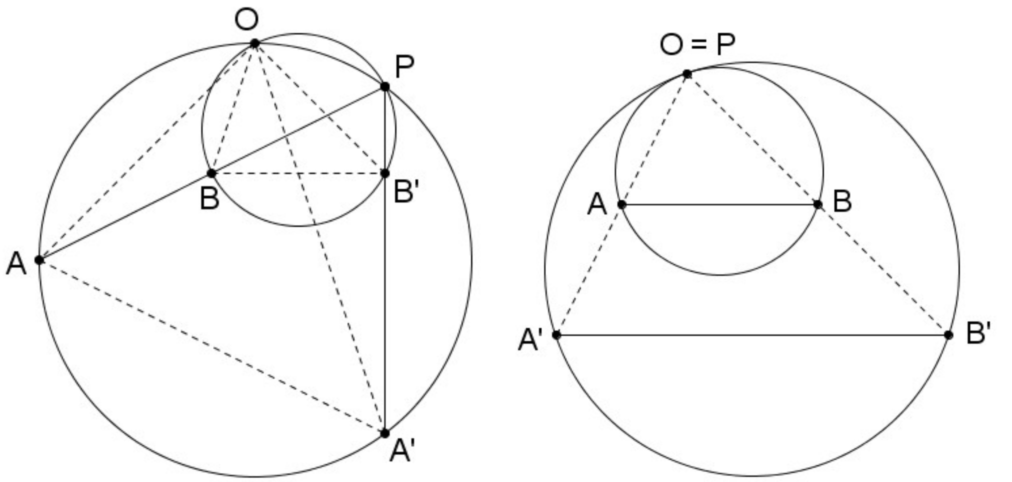
Exercício 13: Detalhe a argumentação dessa demonstração.

Exercício 14: Mostre que se $\overline{AB} = \lambda \overline{A'B'}$, com $\lambda > 0$, então existe uma única similaridade própria f, de fator λ, tal que $f(A) = A'$ e $f(B) = B'$.

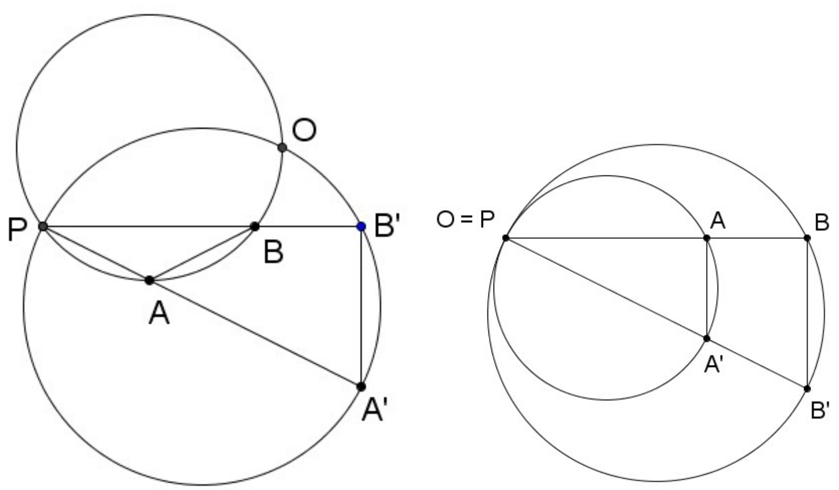
Exercício 15: Suponhamos que $f(A) = A'$ e $f(B) = B'$, sendo f uma similaridade central. Mostre que o centro O dessa similaridade será o ponto O, determinado pela seguinte construção:

1. se o segmento $\overline{AB}$ for paralelo ao segmento $\overline{A'B'}$, então O será o ponto de encontro das retas $\ell_{AA'}$ e $\ell_{BB'}$ (por que elas não são retas paralelas?);
2. se os segmentos $\overline{AB}$ e $\overline{A'B'}$ não forem paralelos, então o centro O será o segundo ponto de encontro das circunferências que circunscrevem os

triângulos $\triangle PAA'$ e $\triangle PBB'$, em que $P \in \ell_{AB} \cap \ell_{A'B'}$, considerando que $O = P$, caso essas circunferências sejam tengentes no ponto P. (Sugestão: mostre que os triângulos $\triangle OAA'$ e $\triangle OBB'$ serão semelhantes.)



Exercício 16: Suponhamos que $f(A) = A'$ e $f(B) = B'$, sendo f uma similaridade central. Mostre que o centro O dessa similaridade será o ponto O, que será também o centro da similaridade g, tal que $g(A) = B$ e $g(A') = B'$. Conclua que o centro O será o segundo ponto da intersecção das circunferências que circunscrevem os triângulos $\triangle PAB$ e $\triangle PA'B'$.



2.2 Similaridades Centrais Impróprias

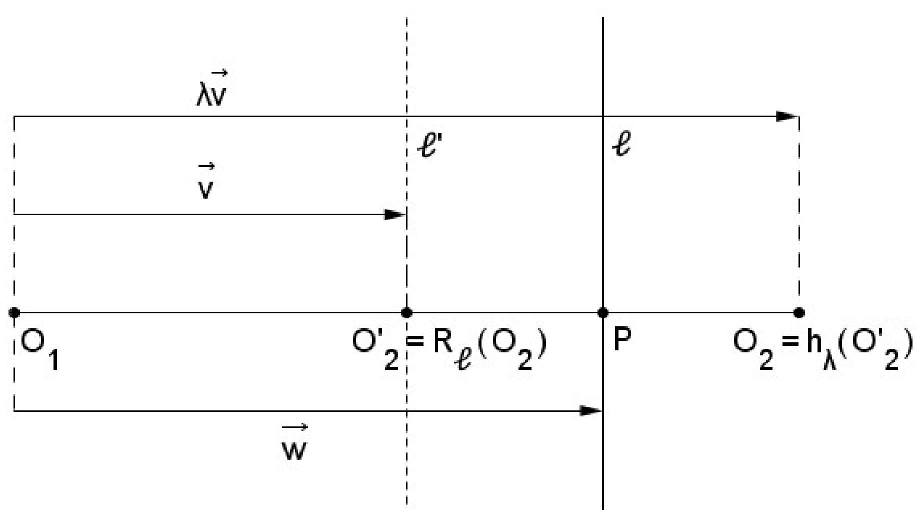
Já vimos que a composição de uma homotetia com uma translação é uma homotetia de centro deslocado. Assim, para mostrarmos que uma similaridade imprópria de fator $\lambda \neq 1$ também é similaridade central, basta considerarmos a composição de uma homotetia com uma reflexão por reta.

Exercício 17: Mostre que a composição de uma homotetia com uma reflexão transladada é igual à composição de outra homotetia com uma reflexão por uma reta.

Já vimos que se o centro da homotetia estiver na reta de reflexão então a composição da homotetia com a reflexão pela reta será uma similaridade central.

Consideremos o caso em que o centro O não pertença à reta ℓ da reflexão.

Proposição 6 *Suponha que o ponto O_1 não pertença à reta ℓ, que $\lambda > 0$ e que $\lambda \neq 1$. Então existirá um ponto O_2, pertencente à semirreta $\overrightarrow{O_1P} \perp \ell$ (com $P \in \ell$), tal que $h_{O_1,\lambda} \circ R_\ell = h_{O_2,\lambda} \circ R_{\ell'}$, sendo que a reta ℓ' conterá o ponto O_2 e será paralela à reta ℓ.*



Demonstração: A obtenção do ponto O_2 é bem parecida com o caso da composição $h_{O_1,\lambda} \circ R_P$ e será deixada como exercício. □

Finalmente, consideremos a composição de uma homotetia com uma reflexão transladada.

Proposição 7 *Suponha que o ponto O_1 não pertença à reta ℓ, que $\lambda > 0$ e que $\lambda \neq 1$; seja $\vec{v}$ um vetor não nulo e paralelo à reta ℓ. Então existirá um ponto O_2, tal que $h_{O_1,\lambda} \circ (T_{\vec{v}} \circ R_\ell) = h_{O_2,\lambda} \circ R_{\ell'}$, sendo que a reta ℓ' conterá o ponto O_2 e será paralela à reta ℓ.*

Exercício 18: Escreva uma demonstração para esta proposição.

3 Aplicações

Com vista às aplicações de similaridades na solução de problemas geométricos, vamos ressaltar algumas propriedades de certos subconjuntos $\mathcal{S}$ de similaridades do plano.

Comecemos com uma propriedade de isometrias.

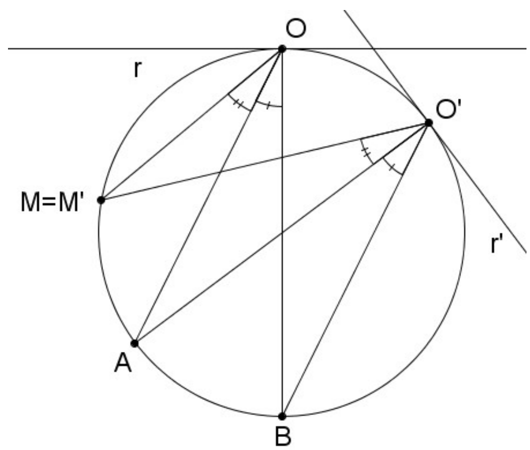
Proposição 8 *Seja $\mathcal{S}$ um conjunto de isometrias próprias do plano, tal que existem dois pontos distintos A e B e duas retas concorrentes em um terceiro ponto O, ℓ_{AO} e $\ell_{BO)}$, de modo que para cada $f \in \mathcal{S}$ e $O' = f(O)$, as imagens das retas ℓ_{AO} e ℓ_{BO} pela isometria f serão as retas $\ell_{AO'}$ e $\ell_{BO'}$. (Observe que isso não quer dizer que $f(A) = A$ e nem $f(B) = B$.)*

Nessas condições para cada reta r do plano podem ocorrer as seguintes situações:

1. *ou existirá um ponto $M \in r$, tal que para cada $f \in \mathcal{S}$, a imagem da reta r por f conterá o ponto M;*
2. *ou existirá uma circunferência S_1, tal que r será tangente a S_1 e também, para cada $f \in \mathcal{S}$, a imagem de r por f será tangente a S_1.*

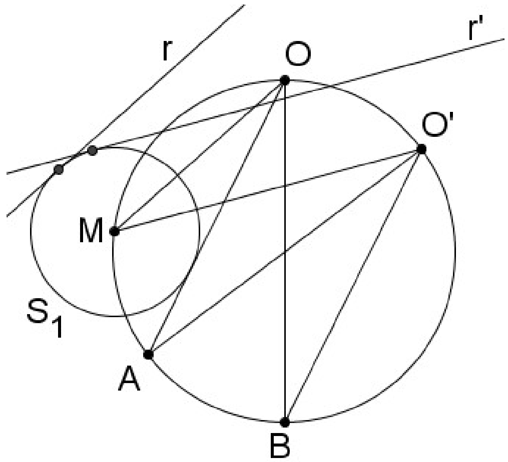
Demonstração: Dado que as isometrias preservam ângulos, das hipóteses desta proposição, segue que $\angle AOB \equiv \angle AO'B$ e, portanto, o ponto O' está na circunferência S que contém os ponto A, B e O. Essa circunferência é a mesma para todas as isometrias $f \in \mathcal{S}$.

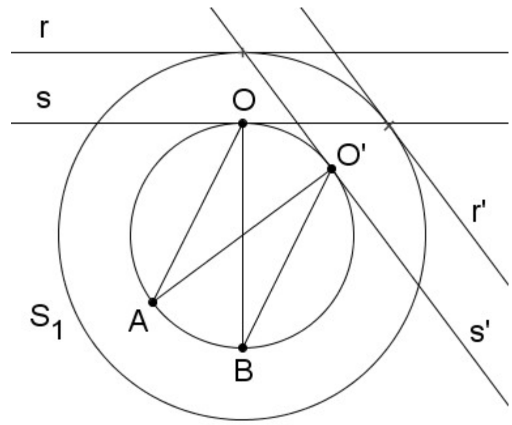
Suponhamos que $r \ni O$ não seja tangente à circunferência S. Portanto ela intersectará S em um outro ponto M, o qual podemos assumir ser distinto dos pontos A e B. Sejam $f \in \mathcal{S}$, $O' = f(O)$, r' a imagem de r por f e M' o ponto de interseção de r' com a circunferência S. Novamente usando a preservação de ângulos por isometrias, temos que $\angle AOM \equiv \angle AO'M' = \angle AO'M$. Portanto $M' = M$ (o ponto O' está no arco capaz do ângulo $\angle AOM$ e corda $\overline{AM}$).



Consideremos agora uma reta $r \ni O$. Se r for tangente à circunferência S, então suas imagens por isometrias de $\mathcal{S}$ também o serão. (**Exercício:** Por que?)

Analisemos o caso em que a reta r não contenha o ponto O. Seja $s \ni O$ paralela a r. A reta s pode ser, ou não, tangente à circunferência S.





Se a reta s não for tangente a S, então ela intersecta S em um outro ponto M. Como isometrias preservam distâncias, se $f \in \mathcal{S}$ e as imagens de r e s por f forem as retas r' e s', a circunferência S_1 de centro $M \in s \cap s'$ e tangente a r também será tangente a r'.

Se a reta s for tangente à circunferência S, então as retas r e r' serão tangentes à circunferência S_1 concêntrica a S.

Com isso, mostramos que sempre uma das duas conclusões desta proposição será satisfeita. $\square$

Exercício 19: Mostre que o conjunto $\mathcal{S}$ na proposição acima pode se assumido como sendo um subgrupo do grupo das isometrias.

Exercício 20: Mostre que se $\mathcal{S}$ for um conjunto de similaridades próprias, contendo a identidade e tal que existam dois pontos distintos A e B, cujas imagens pelas transformações de $\mathcal{S}$ estejam contidas em duas retas paralelas, então todas as transformações de $\mathcal{S}$ serão translações. (Sugestão: mostre que se $A' = f(A)$ e $B' = f(B)$, para alguma $f \in \mathcal{S}$, então os segmentos $\overline{AB}$ e $\overline{A'B'}$ serão paralelos.)

Proposição 9 *Suponhamos que $\mathcal{S}$ seja um conjunto de isometrias próprias e contendo a identidade, contendo a identidade e tal que existam dois pontos distintos A e B, cujas imagens pelas transformações de $\mathcal{S}$ estejam contidas em duas retas distintas p e q concorrentes em um ponto O.*

Nessas condições, existirá uma circunferência S, tal que para cada ponto $P \in S$, as imagens de P pelas transformações em $\mathcal{S}$ estarão contidas na reta ℓ_{OP}.

Demonstração: Comecemos com a observação de que os pontos A, B e O não são colineares. Com isso, existe uma (única) circunferência S contendo esses três pontos.

Dada a transformação $f \in \mathcal{S}$ (a qual suporemos não ser a identidade), sejam $A' = f(A)$, $B' = f(B)$ e S' a imagem de S por f. Então $A' \in \ell_{AO}$ e $B' \in \ell_{BO}$. Observemos que a circunferência S' também conterá o ponto O, pois $\angle AOB = \angle A'OB'$.

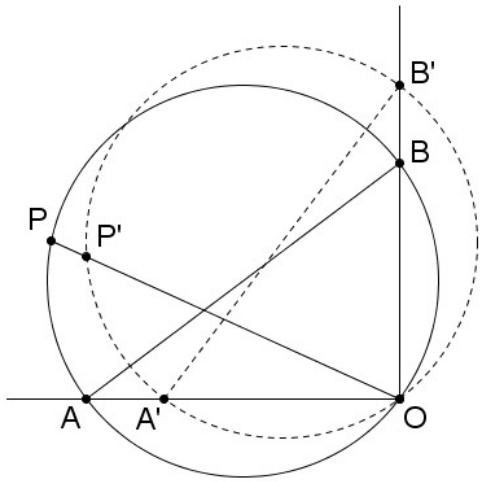
Tomemos um ponto $P \in S$ e denominemos $P' \in S' \cap \ell_{OP}$, $P' \neq O$. Mostremos que os triângulos $\triangle ABP$ e $\triangle A'B'P'$ serão congruentes.

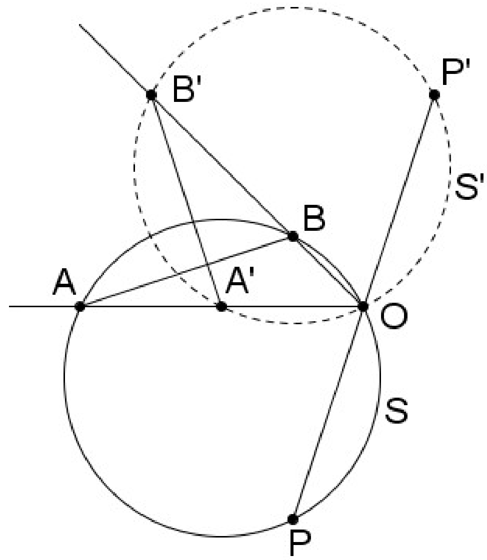
Já sabemos que $\overline{AB} \equiv \overline{A'B'}$. Também sabemos que $\angle APB \equiv \angle AOB = \angle A'OB' \equiv \angle A'P'B'$.

Mostremos agora que $\angle PBA \equiv \angle P'B'A'$, o que nos permita concluir a congruência dos triângulos $\triangle ABP$ e $\triangle A'B'P'$, pelo critério LAAo.

Vamos tratar aqui apenas o caso em que A' pertencer à semirreta $\overrightarrow{OA}$ e B' à semirreta $\overrightarrow{OB}$, deixando os demais casos como exercício. Renomeando pontos, caso seja necessário, podemos supor que valham as seguintes relações de ordem de pontos: $O - A' - A$ e $O - B - B'$ (e fica como exercício mostrar que não poderia valer as relações $O - A - A'$ e $O - B - B'$).

Podemos ter quatro situações distintas: ou P e P' estão na mesma semirreta de vértice O, ou estarão na ordem $P - O - P'$, ou $P = O$, ou $P' = O$.

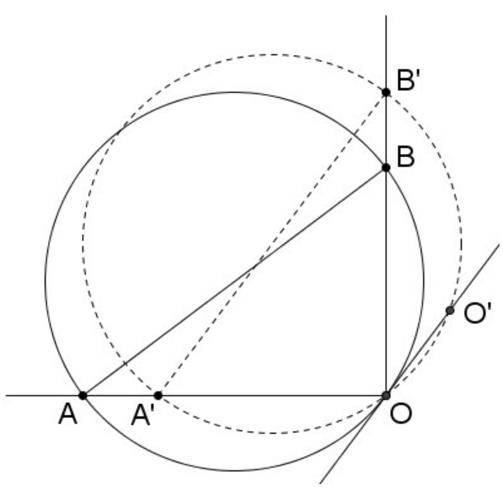


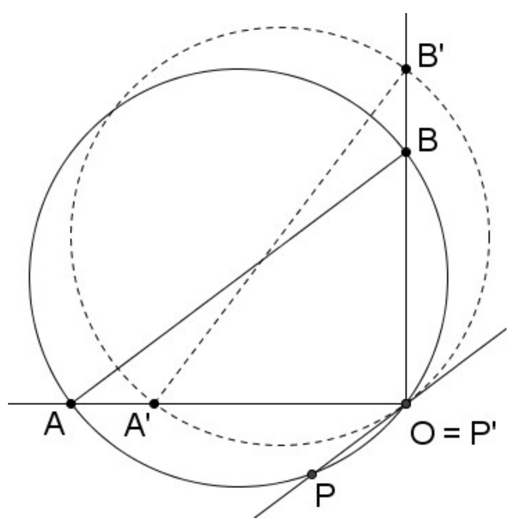


No primeiro caso, temos que $\angle PBA \equiv \angle POA = \angle P'OA' \equiv \angle P'B'A'$, o que implica que P' será a imagem de P pela isometria.

No segundo caso, olhando para os quadriláteros $ABOP$ e $A'B'OP'$, ambos inscritos em circunferências, vemos que $\angle ABP \equiv \angle AOP$, e este é o suplementar de $\angle A'OP'$ e, portanto, $\angle ABP \equiv \angle A'B'P'$.

Trataremos agora dos casos em que $O = P'$ (a reta ℓ_{PO} será tangente à circunferência S'), ou $P = O$ (a reta $\ell_{PO'}$ será tangente à circunferência S).





No primeiro caso, temos que $\angle O'A'B' \equiv \angle O'OB' = \angle O'OB \equiv \angle AOB$. Isso, jonto com a congruência $\angle OAB \equiv \angle O'A'B'$ termina esta parte da demonstração.

No segundo caso, argumentamos como no primeiro, ficando os detalhes como exercício. $\square$

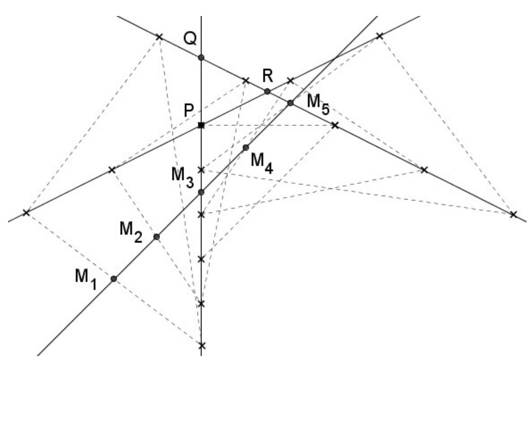
Exercício 21: Termine a demonstração desta proposição, considerando os casos em que $A-O-A'$ e B' na semirreta $\overrightarrow{OB}$, e o caso em que $A-O-A'$ e $B-O-B'$. Observe que não se faz necessário considerar o caso em que A' estiver na semirreta $\overrightarrow{OA}$ e $B-O-B'$ (por que?).

Para o que faremos a seguir, precisamos definir o que são pares de subconjuntos similares do plano: diremos que o subconjunto de pontos do plano Y será similar ao subconjunto X (com fator de similaridade $\lambda > 0$), se o conjunto Y for a imagem de X por uma similaridade f do plano com fator de similaridade λ.

Proposição 10 *Seja $\mathcal{S}$ um conjunto de similaridadesprópias do plano, contendo a identidade e tal que existam três pontos distintos A, B e C, cujas imagens pelas similaridades de $\mathcal{S}$ sejam respectivamente em três retas não concorrentes em um mesmo ponto.*

Nestas condições, para cada ponto M do plano, suas imagens estarão em uma mesma reta (contendo M).

Além disso, todas as similaridades do conjunto $\mathcal{S}$, que não sejam a identidade, são similaridades centrais, cujos centros são o mesmo ponto O.

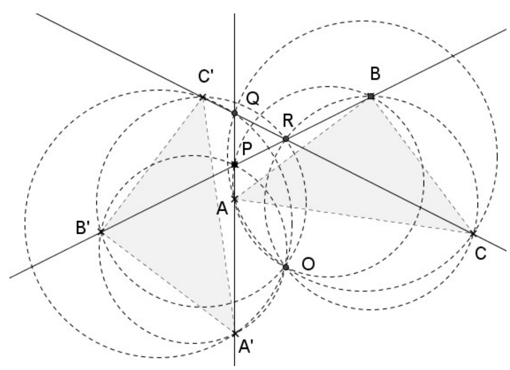


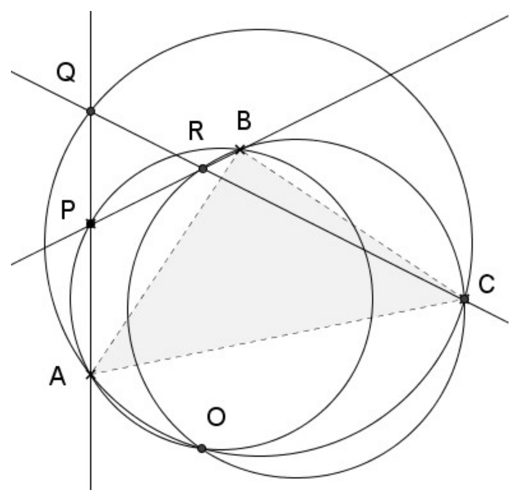
Demonstração: A asserção de que as imagens de cada ponto M do plano formariam uma reta decorre das relações de semelhança que o ponto M mantiver com o triângulo $\triangle ABC$.

Vamos mostrar que existe um ponto O do plano, o qual será o centro de todas as similaridades do conjunto $\mathcal{S}$ (que não sejam a identidade, é claro).

Trataremos apenas do caso em que as retas do enunciado são duas a duas concorrentes, deixando os demais casos como exercício.

Sejam P, Q e R os três pontos (necessariamente não colineares), tais que as retas ℓ_{PQ}, ℓ_{PR} e ℓ_{QR} sejam as imagens dos pontos A, B e C, respectivamente, pelas similaridades de $\mathcal{S}$. Podemos supor que os pontos P, Q, R, A, B e C sejam todos distintos.





Seja $f \in \mathcal{S}$ e denominemos $A' = f(A)$, $B' = f(B)$ e $C' = f(C)$. Se f for uma isometria, então mão poderá ser uma translação, pois a translação faria com que $ABB'A'$ fosse um paralelogramo e, consequentemente, a reta $\ell_{AA'}$ seria paralela à reta $\ell BB'$, contradizendo a hipótese de que elas seriam concorrentes no ponto P. Como deverá, então ser isometria própria, f será uma rotação, um caso de similaridade central. Se f não for isometria, já vimos que seu fator será algum $\lambda \neq 1$ e, por conseguinte, ela terá que ser uma similaridade central.

Resta-nos, assim, mostrar que o centro de f será um ponto O que independe da transformação.

Vimos no exercício 16, na página 11, que o centro O da similaridade f pertence à intersecção das circunferências circunscritas aos triângulos $\triangle PAB$ e $\triangle PA'B'$. Esse centro também deverá pertencer à intersecção das circunferências que circunscrevem os triângulos $\triangle QAC$ e $\triangle QA'C'$. Assim, para acharmos esse ponto O, basta determinarmos o segundo ponto de interseção das circunferências que circunscrevem $\triangle PAB$ e $\triangle QAC$. Esses dois triângulos não dependem da transformação f e, portanto, o ponto O independe de f. $\square$

Exercício 22: Demonstre essa proposição nos casos em que duas das retas sejam paralelas e também o caso emn que as três sejam paralelas.

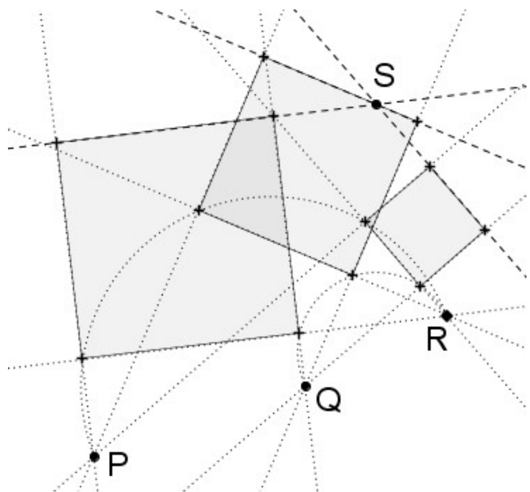
Proposição 11 *Seja $\mathcal{S}$ um conjunto de similaridades pró prias do plano, contendo a identidade e tal que existam três retas distintas ℓ_1, ℓ_2 e ℓ_3 não concorrentes em um mesmo ponto, cujas imagens pelas similaridades de $\mathcal{S}$ contenham, respectivamente, os pontos P, Q e R (independentes das similaridades em questão).*

Nestas condições, temos as seguintes conclusões:

1. *todas as transformações de $\mathcal{S}$ distintas da identidade serão similaridades centrais, cujos centros serão o mesmo ponto O;*

2. *para cada reta r do plano existirá um ponto $S \in r$, tal que todas as imagens de r pelas similaridades de $\mathcal{S}$ conterão aquele ponto P;*

3. *para cada ponto X do plano, existirá uma circunferência contendo todas as imagens desse ponto pelas similaridades de $\mathcal{S}$.*

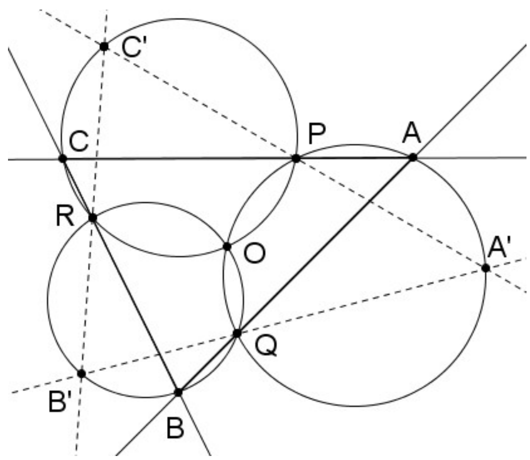


Demonstração: Como as imagens das retas ℓ_1, ℓ_2 e ℓ_3 contêm os pontos P, Q e R, respectivamente, então as similaridades de $\mathcal{S}$ deverão ser similaridaqdes centrais. Precisamos determinar seus centros e mostrar que ele será o mesmo para todas elas.

Sejam $p \ni P$, $q \ni Q$ e $r \ni R$ três retas , tais que $A \in p \cap q$, $B \in p \cap r$ e $C \in q \cap r$ sejam três pontos distintos dos pontos P, Q e R, e também distintos entre si. Seja $f \in \mathcal{S}$ e denominemos $A' = f(A)$, $B' = f(B)$ e $C' = f(C)$. Como similaridades preservam ângulos entre retas, temos que $\angle PAQ \equiv \angle PA'Q$ e, portanto, o ponto A' estará contido na circunferência que circunscreve o triângulo $\triangle PQA$. De modo análogo, podemos concluir que o ponto B' estará na circunferência que circunscreve o triângulo $\triangle PRB$ e o ponto C' estará na circunferência que circunscreve o triângulo $\triangle QRC$.

Mostremos que essas circunferências conterão o mesmo ponto O, que será o centro de todas as similaridades de $\mathcal{S}$.

Seja O o centro da similaridade f. Então $\angle AOA' \equiv \angle APA'$, pois o ângulo da similaridade será o ângulo entre as retas ℓ_{PA} e $\ell PA'$. Também deveremos ter $\angle BOB' \equiv \angle BQB'$ e $\angle COC' \equiv \angle CRR'$ Ou seja, o ponto O deverá pertencer à interseção daquelas circunferências.



Por fim, seja s uma reta e s' sua imagem por f. Então existirá um ponto $M \in s \cap s'$, pois essas retas não poderiam ser paralelas (exercício: justifique esta afirmação). Sejam $D \in s$, $D \neq M$ e $D' = f(D)$. Então $\angle DMD' \equiv \angle DOD'$, ou seja, os pontos O, M, D e D' estarão em uma mesma circunferência, a qual pode ser determinada pelos pontos O, M e D. Isto implica que qualquer imagem de s por uma similaridade de $\mathcal{S}$ deverá conter o ponto M (uma propriedade de arcos capazes - justifique). $\square$

Exercício 23: Mostre como obter um quadrado cujos lados estejam sobre retas contendo quatro pontos distintos dados.

* * *