MAT-0331: 1^a LISTA DE EXERCÍCIOS

• Para os exercícios a seguir, use os axiomas: 1. Vazio; 2. Extensionalidade; 3. Separação; 4. Par; 5. União; 6. Partes.

1. Mostre que não vale a inclusão $\mathcal{P}(X) \subseteq X$. [Dica: argumente por contradição e use $Y = \{u \in X : u \notin u\}$.]

2. Mostre que:
(a) $A \subseteq B$ se, e somente se, $A \cap B = A$, se, e somente se, $A \cup B = B$;
(b) $A \subseteq B \cap C$ se, e somente se, $A \subseteq B$ e $A \subseteq C$;
(c) $B \cup C \subseteq A$ se, e somente se, $B \subseteq A$ e $C \subseteq A$;
(d) $A \setminus B = (A \cup B) \setminus B = A \setminus (A \cap B)$, onde $A \setminus B = \{a \in A : a \notin B\}$;
(e) $A \cap B = A \setminus (A \setminus B)$.

3. Dê um contraexemplo a cada uma das afirmações:
(a) $A \setminus B = B \setminus A$;
(b) $A \cap B \neq A$;
(c) $A \subseteq B \cup C$ se, e somente se, $A \subseteq B$ ou $A \subseteq C$;
(d) $B \cap C \subseteq A$ se, e somente se, $B \subseteq A$ e $C \subseteq A$.

4. Sejam A e S dois conjuntos, com $S \neq \varnothing$. Sejam $T_1 = \{Y \in \mathcal{P}(A) : \exists X \in S(Y = A \cap X)\}$ e $T_2 = \{Y \in \mathcal{P}(A) : \exists X \in S(Y = A \setminus X)\}$. Mostre que
(a) $A \cap (\bigcup S) = \bigcup T_1$;
(b) $A \setminus (\bigcap S) = \bigcup T_2$ e $A \setminus (\bigcup S) = \bigcap T_2$.

5. Mostre que se $a, b \in A$, então $(a, b) \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(A))$ e que $a, b \in \bigcup(a, b)$. Mostre que se $(a, b) = (b, a)$, então $a = b$.

6. Dadas as relações $R \subseteq A \times B$ e $S \subseteq B \times C$, definimos $\mathrm{Dom}(R) = \{x \in A : \exists y \in B((x, y) \in R)\}$, $\mathrm{Im}(R) = \{y \in B : \exists x \in A((x, y) \in R)\}$, $R^{-1} = \{(b, a) \in B \times A : (a, b) \in R\}$ e $S \circ R = \{(a, c) \in A \times C : \exists b \in B((a, b) \in R \text{ e } (b, c) \in S)\}$; se $X \subseteq A$, $R[X] = \{b \in B : \exists a \in X((a, b) \in R)\}$. Mostre que
(a) dados $P, Q \subseteq A$, mostre que $R[P \cup Q] = R[P] \cup R[Q]$;
(b) $R[P \cap Q] \subseteq R[P] \cap R[Q]$ (e que nem sempre a igualdade vale aqui);
(c) $R[P \setminus Q] \supseteq R[P] \setminus R[Q]$ (e que nem sempre a igualdade vale aqui);
(d) $R^{-1}[R[P]] \supseteq \mathrm{Dom}(R) \cap P$, e se $Y \subseteq B$, $R[R^{-1}[Y]] \supseteq \Im(R) \cap Y$ (e que nem sempre a igualdade vale).

7. Mostre que

(a) $A \times B = \varnothing$ se, e somente se $A = \varnothing$ ou $B = \varnothing$;
(b) $(A * B) \times C = (A \times C) * (B \times C)$, onde $* = \cap, \cup, \setminus$;
(c) $A \times (B * C) = (A \times B) * (A \times C)$, onde $* = \cap, \cup, \setminus$.

8. Seja $E \subseteq A \times A$ uma relação de equivalência. Mostre que existe o conjunto A_E das classes de equivalência. Indique os axiomas usados.

9. Seja $R \subseteq A \times A$ uma relação reflexiva e transitiva: $(a, a) \in R$, e se $(a, b), (b, c) \in R$, então $(a, c) \in R$. Mostre que $E = \{(a, b) \in A \times A : (a, b) \in R$ e $(b, a) \in R\}$ é uma relação de equivalência. Denotemos $[a]_E$ a classe do elemento $a \in A$. Mostre que $(a, a'), (b, b') \in E$ e $(a, b) \in R$, então $(a', b') \in R$. Seja $R_E \subseteq A_E \times A_E$, tal que $([a]_E, [b]_E) \in R_E$ se, e somente se, $(a, b) \in R$, é uma relação de ordem (parcial).

• Para os exercícios a seguir, use também o axioma 7. Infinito. Faça os detalhes necessários ao aplicar o PIF e o Teorema da Recursão.

10. Dado $n \in \mathbb{N}$, mostre que não existe $k \in \mathbb{N}$, tal que $n < k < n + 1$.

11. Mostre que para cada $n \in \mathbb{N}$, se $n > 0$, existe um único $k \in \mathbb{N}$, tal que $n = k + 1$.

12. (Indução Dupla) Seja $P(x, y)$ uma propriedade que satisfaz

> *Se valer $P(k, l)$ para todo $k, l \in \mathbb{N}$, tais que $k < m$, ou $k = m$ e $l < n$, então vale $P(m, n)$.*

Mostre que, neste caso, $P(m, n)$ valerá, para todos os pares $(m, n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$.

13. Mostre que a soma é associativa: $(m + n) + p = m + (n + p)$.

14. Faça uma definição recursiva do produto $m \cdot n$ (use a soma, já definida) em $\mathbb{N}$ e mostre que o produto é comutativo, associativo e distributivo com a soma: $m \cdot (n + p) = (m \cdot n) + (m \cdot p)$.

15. Faça uma definição recursiva da exponencial m^n e mostre que $m^{(n+p)} = m^n \cdot m^p$.