MAT-0331. LISTA 2.

Lembre-se que $|X| = |Y|$ significa que existe uma função bijetora de X em Y, e que $|X| \leq |Y|$, que existe uma função injetora de X em Y; X^Y é o conjunto das funções de X em Y.

1. Mostre que $|A \times B| = |B \times A|$, e que se $B \neq \varnothing$, então $|A| \leq |A \times B|$.

2. Mostre que se $A \neq \varnothing$ e $|A| \leq |B|$, então existe $f : B \to A$ sobrejetora.

3. Mostre que se $f : \mathcal{P}(X) \to \mathcal{P}(X)$ for crescente ou decrescente (com a ordem parcial $A \subseteq B$), então existe $C \in \mathcal{P}(X)$, tal que $f(C) = C$. [Dica: seja $D = \{Y \subseteq X : f(Y) \subseteq Y\}$; observe que $X \in D \neq \varnothing$; mostre que $C = \bigcap D$ é a resposta.]

4. Mostre que existe $C_0 \subseteq X$, tal que se $Y \subseteq X$ satisfizer $f(Y) = Y$ no exercício anterior, então $C_0 \subseteq Y$.

5. Mostre que se $S = \{X_0, \ldots, X_n$ e os elementos de S forem dois a dois disjuntos, então $|\bigcup S| = \sum_{i=0}^{n} |X_i|$.

6. Mostre que se X e Y forem finitos, então $\left|X^Y\right| = |X|^{|Y|}$.

7. Mostre que se $n, k \in \mathbb{N}$, com $k \leq n$, $|X| = k$ e $|Y| = n$, então a quantidade de funções $f : X \to Y$ que são injetoras é $n(n-1)\ldots(n-k+1) = n!/k!$ (fatoriais).

8. Mostre que se $A \neq \varnothing$ for finito e B enumerável, então $A \times B$ será enumerável.

9. Sejam $n \in \mathbb{N}$, $n > 0$, e A enumerável. Mostre que $\{X \in \mathcal{P}(A) : |A| = n\}$ é enumerável.

10. Seja A o conjunto de todas as sequências $s : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ que são progressões aritméticas. Mostre que $|A| = \aleph_0$.

Lembre-se que dadas duas ordens lineares $(A, <_A)$ e $(B, <_B)$, sua soma $A \oplus B$ é definida como a ordem baseada no conjunto $(\{0\} \times A) \cup (\{1\} \times B)$, com $(0, x) < (1, y)$, $(0, x) < (0, y)$ se $x <_A y$, e $(1, x) <_B (1, y)$ se $x <_B y$. O produto $A \otimes B$ é a ordem baseada em $A \times B$, com a ordem lexicográfica, ou seja, $(a, b) < (c, d)$ se $a <_A c$, ou $a = c$ e $b <_B d$.

11. Dê exemplo de duas ordens lineares $(A, <_A)$ e $(B, <_B)$, tais que $A \oplus B$ não seja isomorfa a $B \oplus A$. Faça o mesmo para $A \otimes B$ e $B \otimes A$.

12. Mostre que se as duas ordens lineares $(A, <_A)$ e $(B, <_B)$ forem bem ordenadas (todo subconjunto não vazio tem mínimo), então $A \oplus B$ e $A \otimes B$ serão bem ordenadas.

13. Seja $(\mathbb{Z}^{\mathbb{N}}, \prec)$ o conjunto das sequências de números inteiros com a ordem lexicográfica. Seja $F = \{s \in \mathbb{Z}^{\mathbb{N}} :$ existem $n_0 = n_0(s) \in \mathbb{N}$ e $a = a(s) \in \mathbb{Z}$, tais que $\forall n \geq n_0$, $s(n) = a\}$. Seja $<$ a restrição de $\prec$ a F. Mostre que F é enumerável e que $(F, <)$ é uma ordem linear densa sem extremos.

14. Sejam $(A, <)$ uma ordem linear densa e $a, b \in A$, com $a < b$. Mostre (por indução em n) que existem $x_0, \ldots, x_n \in A$, com $a < x_0 < x_1 < \cdots < x_n < b$.

15. Exiba exemplos de subconjuntos $A \subseteq \mathbb{Q}$, tais que a restrição da ordem de $\mathbb{Q}$ a A, produz uma ordem isomorfa a:
(a) $(\mathbb{N}, <) \oplus (\mathbb{N}, <)$;
(b) $(\mathbb{N}, <) \oplus (\mathbb{N}, <^*)$, onde $<^*$ é a ordem invertida;
(c) $(\mathbb{N}, <) \otimes (\mathbb{N}, <)$

Lembre-se que uma *lacuna* na ordem $(A, <)$ (linear densa) é um par ordenado (X, Y), tal que $X, Y \neq \varnothing$, $X \cap Y = \varnothing$; $X \cup Y = A$; $\forall x \in X$, $\forall y \in Y$, $x < y$; e não existem $\max X$ e nem $\min Y$. Por exemplo, $X = \{x \in \mathbb{Q} : x < \sqrt{2}\}$ e $Y = \{y \in \mathbb{Q} : \sqrt{2} < y\}$ formam uma lacuna em $(\mathbb{Q}, <)$. Uma ordem linear densa é completa se todo subconjunto não vazio e limitado superiormente tem supremo.

16. Mostre que uma ordem linear densa (sem extremidades) é completa se, e somente se, todo subconjunto não vazio e limitado inferiormente tem ínfimo.

17. Quais são as lacunas de $(\mathbb{Z}, <) \otimes (\mathbb{R}, <)$?

18. Se $(A, <)$ e $(B, <)$ forem duas ordens lineares densas completas, mostre que $(A, <) \oplus (B, <)$ não é completa. Qual é seu completamento (quantos pontos a mais precisam ser adicionados)?

19. Mostre que $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ é denso em $\mathbb{R}$.

20. Dê exemplos de duas ordens lineares densas sem extremidades de mesma cardinalidade não enumerável, que não sejam isomorfas.

* * * * * * **