MAT-0331. LISTA 3.

1. Dê exemplos de subconjuntos de $\mathbb{Q}$ (com a ordem usual) isomorfos a $\mathbb{N} \oplus 10$, $\mathbb{N} \oplus \mathbb{N} \oplus \mathbb{N}$, $\mathbb{N} \otimes \mathbb{N}$, $\mathbb{N} \otimes \mathbb{N} \otimes \mathbb{N}$.

2. Seja $X = \{s \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}} : \exists n_0 \forall n \geq n_0, s(n) = 0\}$, com a ordem lexicográfica: $s_1 < s_2$ se, e somente se, existe n_0, tal que se $k < n_0$, $s_1(k) = s_2(k)$ e $s_1(n_0) < s_2(n_0)$. Mostre que $(X, <)$ é bem ordenado.

3. Sejam $(A, <_A)$ um conjunto bem ordenado não vazio e $\{(W_a, <_a) : a \in A\}$ um conjunto de boas ordens indexadas por elementos de A, tal que se $a_0 < a_1$, então W_{a_0} é segmento inicial de W_{a_1}. Mostre que $W = \bigcup_{a \in A} W_a$, com a ordem $x < y$ se existe $a \in A$ tal que $x, y \in W_a$ e $x <_a y$, é bem ordenado.

4. Mostre que $10 \oplus \mathbb{N}$ é isomorfo a $\mathbb{N}$ como conjuntos bem ordenados, mas que não é isomorfo a $\mathbb{N} \oplus 10$.

5. Mostre que $\mathbb{N} \oplus (\mathbb{N} \otimes \mathbb{N})$ é isomorfo a $\mathbb{N} \otimes \mathbb{N}$.

Lembre-se que um conjunto X é *transitivo* se para todo $x \in X$, $x \subset X$, ou seja, se $x \in X$ e $y \in x$, então $y \in X$. Por exemplo, cada $n \in \mathbb{N}$ e o próprio $\mathbb{N}$ são conjuntos transitivos. Um conjunto X é um *ordinal* se for transitivo e bem ordenado com a ordem $x < y$ se $x \in y$.

6. Mostre que X é transitivo se, e somente se $X \subset \mathcal{P}(X)$.

7. Mostre que X é transitivo se, e somente se, $\bigcup X \subset X$.

8. Demonstre ou dê contraexemplo:
(a) se X e Y são trnsitivos, então $X \cup Y$ é transitivo;
(b) se X e Y são trnsitivos, então $X \cap Y$ é transitivo;
(c) se $X \in Y$ e Y é transitivo, então X é transitivo;
(d) se $X \subseteq Y$ e Y é transitivo, então X é transitivo;
(e) se X é transitivo e $S \subseteq \mathcal{P}(X)$, então $X \cup S$ é transitivo.

9. Mostre que se X for um ordinal, então $X \cup \{X\}$ também será um ordinal. Mostre que se Y for um conjunto de ordinais, então $\bigcup Y$ serúm ordinal.

10. Mostre que se $Y \neq \varnothing$ for um conjunto de ordinais, então $\bigcap Y$ será um ordinal, na verdade, o menor ordinal em Y.