MAT-0331. LISTA 4.

1. Mostre que $(\mathbb{N} \otimes \mathbb{N}) \oplus \mathbb{N}$ não é isomorfa a $\mathbb{N} \otimes \mathbb{N}$.

2. Dê exemplo de relação de ordem $\prec$ em $\mathbb{N}$ tal que $(\mathbb{N}, \prec) \simeq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$.

3. Mostre que se X for um conjunto transitivo, então $\mathcal{P}(X)$ também será transitivo.

4. Mostre que se $\alpha \geq 1$ for um ordinal, então $\mathcal{P}(\alpha)$ não é ordinal. [*O que é um ordinal?*]

5. Mostre que se existir uma boa ordem "$<$" no conjunto A, então existirá uma ordem linear em $\mathcal{P}(A)$. [*Sugerstão: se* $X, Y \in \mathcal{P}(A)$*, seja* $X \prec Y$ *se* $\min(X \Delta Y) \in X$*, onde* $X \Delta Y = (X \setminus Y) \cup (Y \setminus X)$.]

6. Sejam $V_0 = \varnothing$, $V_{n+1} = \mathcal{P}(V_n)$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Mostre que cada V_n é um conjunto transitivo e que existe o conjunto $V_\omega = \bigcup\{V_n : n \in \mathbb{N}\}$. Indique os axiomas usados.

7. Mostre que se X for conjunto transitivo, então vale o Axioma da Extensionalidade em X: se $a, b \in X$ e $a \neq b$, então existe $c \in X$, tal que $c \in a \Delta b$, ou seja, o elemento que mostra que $a \neq b$ também está em X.

8. Mostre que o conjunto V_ω é transitivo. Mostre que todo $x \in V_\omega$ é conjunto finito.

9. Mostre que vale o Axioma da Escolha em V_ω. [*Sugestão: lembre-se de que todo* $x \in V_\omega$ *é finito.*]

10. Quais são os ordinais $\alpha \in V_\omega$? Qual é a cardinalidade de V_ω?

11. Mostre que o Axioma da Substituição não vale em V_ω. [*Sugestão:* $V_\omega \notin V_\omega$.]

12. Quais axiomas valem em V_ω? [*Por exemplo,* $\varnothing \in V_\omega$*. Você tem que mostrar que os conjuntos que os axiomas dizem existir estão em* V_ω.]