A linguagem matemática

Ricardo Bianconi*

Introdução.

Matemática é uma disciplina dedutiva, ou seja, todas as propriedades das estruturas a serem estudadas são deduzidas a partir de propriedades elementares, usando argumentos lógicos para, passo a passo, chegarmos às propriedades desejadas. Raramente é fácil descobrirmos quais são os passos a serem dados, mas, uma vez descobertos, devem ser "fáceis" de serem lidos.

Bom, "fáceis" de serem lidos, desde que se esteja familiarizado com a linguagem e com o tipo de argumentação. Infelizmente, esse tipo de linguagem e de argumentação não são naturais para as pessoas. É preciso adquirir familiaridade com elas, mediante treinamento e desenvolvimento de um espírito crítico muito sutil.

Para tentar suprir esta necessidade para alunos que não tenham tido esse treino no segundo grau, e para esclarecer alguma dúvida eventual para os que já têm prática, proponho este guia de estudos. A aluna e o aluno que desejarem usar este guia devem evitar encará-lo como uma lei que deva ser seguida à risca, cerceando a liberdade de pensamento e criatividade. Ele serve apenas como um guia, levando à clareza de pensamento e de expressão.

Como usar este guia?

Sugiro que façam uma primeira leitura (sem se preocupar com entendimento) para saberem do que se trata, quais são as partes do texto, os exemplos, enfim, o que atrair sua curiosidade. Depois partam para uma leitura mais séria. Este trabalho tentará mostrar como entender alguns dos jargões mais usados em matemática, e como analisar uma demonstração (esta palavra será uma constante durante seu curso, e é preciso superar a ojeriza inicial que ela possa causar). O estudo de um livro de matemática pode ser feito assim: façam o mesmo tipo de análise fina das demonstrações do livro (não sejam passivos e apáticos com o texto; extraiam mais do que ele traz escrito); façam os exercícios, não tenham medo de fazer contas; sejam modestos, não suponham que seja um trabalho fácil; a evolução pode ser lenta, mas repentinamente vocês peceberão que estão entendendo.

Existe uma grande diferença de nível de dificuldade entre entender uma demonstração e descobrir uma demonstração. Durante seu curso, vão ser encontrados muitos exercícios pedindo "mostre que ..." ou "demonstre ..." (ou "prove que ..."). Não existe um receituário infalível que funcione para

*IME-USP, Caixa Postal 66281, CEP 05311-970, S. Paulo, SP, (e-mail: bianconi@ime.usp.br), (homepage: http://www.ime.usp.br/~bianconi)

todas as buscas de uma demonstração.[1] Mas é possível dar algumas dicas de como tentar e ter algum sucesso, o que é feito no fim deste texto.

Passemos então ao trabalho.

Começando com um exemplo: resolver equações

Vamos tentar motivar o tipo de raciocínio dedutivo usado em matemática analisando uma resolução da seguinte equação.

Resolver: $2x + 5 = 3x - 2$.

A técnica consiste em isolar a variável x de um lado da igualdade, obtendo-se o valor que resolve a equação.

Para isto, passamos o termo $2x$ para o lado direito, mudando seu sinal, e o termo -2 para o lado esquerdo, obtendo $5 + 2 = 3x - 2x$, ou seja, $x = 7$.

Análise da resolução: vamos agora tentar explicitar todos os passos de raciocínio usados.

Primeiramente, o que significa a equação? A letra x está representando um número desconhecido. A equação está dando uma condição sobre esse número desconhecido. A resolução desta equação é feita através de algumas transformações que nos permitem chegar ao valor de x.

Veremos adiante o que significa passar termos de um lado para o outro da igualdade.

Estrutura de uma teoria matemática

Toda teoria matemática tem um contexto de trabalho. Este é determinado por alguns pressupostos básicos, que costumamos chamar de *axiomas*. Estes dizem quais são as definições e propriedades básicas das estruturas que deveremos estudar.

Por exemplo, no contexto do Cálculo, os axiomas dão as propriedades básicas das operações de soma e produto nos naturais ($\mathbb{N}$), junto com a *propriedade da indução finita* (que diz: se A é um conjunto de números naturais contendo o zero e contendo $n+1$, para cada $n \in A$, então $A = \mathbb{N}$), nos inteiros ($\mathbb{Z}$), nos racionais ($\mathbb{Q}$) e nos reais ($\mathbb{R}$) (como, por exemplo, $x + y = y + x$), e a *propriedade do supremo*.[2]

A partir desses axiomas vamos deduzindo, passo a passo, todos os resultados do Cálculo. Estes

[1] Na verdade, o matemático alemão Kurt Gödel provou em 1931 que é impossível escrever um programa de computador que prove todos os teoremas da matemática (na verdade, nem mesmo todos os teoremas da aritmética). (Ufa! Pelo menos os matemáticos não serão demitidos e substituidos por um computador. A criatividade e intuição humanas ainda são indispensáveis.)

[2] Que diz que se A é um conjunto de números reais, não vazio, e tal que seja limitado superiormente (isto é $A \subseteq \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$, e existe algum $M \in \mathbb{R}$ tal que M é maior que todos os elementos de A) então A tem supremo (isto é, existe um número real s tal que s é o menor limitante superior de A, ou seja, se $x \in A$ então $x \leq s$ e se M for limitante superior de A então $s \leq M$).

resultados nada mais são do que propriedades mais elaboradas das estruturas em questão. *Teoremas, Lemas, Proposições* são palavras pomposas que indicam os enunciados das propriedades deduzidas. E as demonstrações são as argumentações apresentando as evidências da veracidade do que foi enunciado. Cada conclusão intermediária de uma demonstração deve ser de uma lógica indiscutível, evidente, naquele ponto, embora possa parecer mágica. (Fazer matemática também envolve conhecer vários "truques.")

Vamos começar explorando o significado de certas palavras chaves na escrita matemática.

A linguagem "proposicional"

Em matemática, todas as palavras têm um sentido preciso. Por isso, faz-se necessário que conheçamos seus significados.

Vamos começar com a parte chamada de proposicional. Vamos esclarecer expressões como "se ... então...", "e", "ou", "se, e somente se," "... sempre que ...," "condição necessária", "condição suficiente", "condição necessária e suficiente", "equivalente", e assim por diante.

Comecemos pelas mais simples. (Na verdade, veremos mais adiante que bastam e, ou, não para escrevermos quaisquer das outras expressões.)

As conjunções e, ou não têm segredo. Se digo "A e B," quero dizer que valem ambas as propriedades A e B. Se digo "A ou B," quero dizer que vale pelo menos uma das duas propriedades (ou A, ou B, ou ambas). Uma única ressalva que devemos fazer é que a conjunção sf ou na linguagem matemática tem sempre o significado de *ou não exclusivo* (ou A, ou B, ou ambas), o que na linguagem natural do dia a dia não acontece.

Todas as outras expressões listadas acima envolvem a implicação. Em suas formas mais simples aparecem como "A implica B" ou "se A então B." Isto quer dizer que A é uma propriedade mais restritiva do que B. A ocorrência de A força a ocorrência de B. Dito de outra maneira, *se a condição* A *for verificada, posso concluir* B. (Olhando de outro jeito, "se A então B" quer dizer que o conjunto dos elementos que têm a propriedade A está contido no conjunto dos elementos que têm a propriedade B.)

Mas, preste a atenção! Se A não valer, não posso concluir que B também não valha! Vejamos um exemplo do Cálculo:

> <u>Se</u> f for uma função derivável em x_0, <u>então</u> f será contínua em x_0.

A condição "f é derivável em x_0" é mais restritiva do que "f é contínua em x_0", pois existem funções contínuas que não são deriváveis. Portanto, não podemos concluir que se f não fosse derivável em x_0, f não seria contínua naquele ponto.

Agora, poderia acontecer de f não ser contínua, mas ser derivável em x_0? A resposta é não, pois o teorema citado acima diz que se f for derivável em x_0, forçosamente f será contínua em x_0. Daí concluímos que:

> <u>Se</u> f <u>não</u> for contínua em x_0, <u>então</u> f <u>não</u> será derivável em x_0.

Resumindo, as afirmações "se A então B" e "se não B então não A" dizem a mesma coisa de duas maneiras diferentes.

Com isto, poderemos entender as expressões "*condição necessária*" e "*condição suficiente*". Dizer que "A é condição suficiente para B" é o mesmo que dizer que "basta A para concluirmos B." Isto é o mesmo que dizer "A implica B." Dizer que "C é condição necessária para D" é o mesmo que dizer que "sem C não pode ocorrer D," ou seja, "não C implica não D," ou ainda, "D implica C."

Voltando aos exemplos acima, podemos reescrevê-los assim:

"f é derivável em x_0" é <u>condição suficiente</u> para que "f seja contínua em x_0."
"f é contínua em x_0" é <u>condição necessária</u> para que "f seja derivável em x_0."

Deixamos aos leitores a tarefa de convencerem-se que dizer "A sempre que B" é o mesmo que dizer que "B implica A." (Se facilitar, leia-se a frase "A sempre que B" como "A ocorre sempre que B ocorrer.")

Passemos à equivalência. Às vezes, uma mesma propriedade pode ser escrita de diversas maneiras. Por exemplo, dizer que "$x + a = b$" é o mesmo que dizer que "$x = b - a$." Podemos expressar isto usando a frase:

$x + a = b$ se, e somente se, $x = b - a$.

Dito de outro modo, uma frase "A se, e somente se, B" fica assim:

A se B, e A somente se B.
Ou, se preferirem: A ocorre se B ocorrer, e A ocorrerá somente se B ocorrer.

O primeiro pedaço é fácil: "se B então A." Para entendermos o segundo pedaço (A somente se B), observemos que ela afirma que a condição A não pode ocorrer sem condição B. Mas isto é o mesmo que dizer que "se não B então não A," o que é o mesmo que "A implica B." Portanto "A se, e somente se, B" é o mesmo que "A implica B e B implica A."

Novamente, leitores, fica como exercício convencerem-se de que "A se, e somente se, B" é o mesmo que "A é equivalente a B," ou ainda, "A é condição necessária e suficiente para B."

Em que situações uma implicação "A implica B" é verdadeira (ou *plenamente aceitável*) ou falsa (ou *inaceitável*)? Uma primeira restrição é que, a partir de coisas verdadeiras, não possamos concluir coisas falsas. Portanto, aquela implicação será considerada falsa quando A for verdadeira, mas B falsa. Por outro lado, se partirmos de uma pressuposição A falsa, poderemos concluir o que quisermos. Por isto, a implicação "A implica B" será verdadeira (*aceitável*) se A for falsa, não importando o que seja B. Com esta argumentação, podemos construir uma "tabela verdade" da implicação, simplesmente tabelando os casos possíveis de veracidade ou falsidade de A, B e da implicação A implica B (que denotaremos A $\Rightarrow$ B; note que esta tem os mesmos valores de verdade que "(não A) ou B"), e observemos como é diferente o resultado da tabela para não A implica não B:

A	B	A $\Rightarrow$ B	não A	(não A) ou B
V	V	V	F	V
V	F	F	F	F
F	V	V	V	V
F	F	V	V	V

A	B	não A	não B	não A $\Rightarrow$ não B
V	V	F	F	V
V	F	F	V	V
F	V	V	F	F
F	F	V	V	V

Os leitores são convidados a fazerem tabelas verdade das várias proposições que porventura aparecerem nos textos lidos.

Elementos genéricos e particulares: a "quantificação"

Voltemos a uma variação do exemplo já visto acima:

Se f for uma função derivável então f será contínua.

Agora pergunto: a qual f este enunciado se refere?

Na verdade, a nenhuma função em particular, mas se refere a qualquer função f. Este símbolo, f, representa um elemento genérico ou arbitrário, sem especificação que o particularize. O enunciado acima descreve uma propriedade que vale para cada função f. Podemos, então, reescrevê-lo assim:

Para cada f, se f for uma função derivável então f será contínua.

Ao invés de usar as palavras para cada, podem ser usadas as palavras para qualquer, ou para quaisquer, ou para todo(a), ou mesmo dado(a) ou dados(as), sem mudar o sentido do enunciado.

Em geral, o enunciado acima é escrito de uma forma mais sucinta:

Toda função derivável é contínua.

Esta afirmação está dizendo "quantos" elementos possuem uma dada propriedade: "todas" as funções f possuem a propriedade "se f for derivável então f será contínua."

Um outro tipo de afirmação de quantidade seria: "existe" (pelo menos uma) função f possuindo a propriedade "f é contínua e não derivável." Ou de um modo mais comumente achado nos textos:

Existe uma função f contínua tal que não é derivável.

As expressões acerca de quantidade, como "existe" e "para todo," são comumente chamadas de quantificadores ou de quantificações. Existem outros tipos mais sofisticados de quantificadores, mas são variações sobre estes dois tipos. (Por exemplo: "existem infinitos x tais que ...")

Vamos ver agora como entender um enunciado envolvendo ambos os tipos de quantificadores. É a definição de limite, ou seja do símbolo "$\lim_{x\to a} f(x) = L$", que resume a seguinte frase:

Dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que, para todo x, se $0 < |x - a| < \delta$ então $|f(x) - L| < \varepsilon$.

Uma observação muito importante: a ordem em que as quantificações aparecem não pode ser mudada! Quando se escreve "dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que ..." entende-se que tal δ pode depender do ε dado. E na definição de limite, δ não depende de x. Por isso, ficaria errado escrever o "para todo x" antes do "existe $\delta > 0$."

Neste caso, uma variável quantificada com o "existe" só não dependerá das que forem quantificadas depois dela. Em geral, dependerá das que foram quantificadas antes dela e das que não foram quantificadas. Voltando ao caso do limite, δ dependerá não só de ε, mas também de f e de L.

Argumentos usados em demonstrações

Essencialmente, todos os resultados em matemática são da forma hipótese(s) implica(m) tese. Dito de outra maneira, os resultados são da forma: *partindo de alguns pressupostos* (hipóteses) *posso concluir a* tese.

Quais são estes pressupostos? Eles podem estar explicitamente escritos no *enunciado* do resultado ou subentendidos. Por exemplo, não vamos escrever toda a hora os axiomas da teoria que estamos estudando. Eles são automaticamente assumidos como hipóteses. Resultados provados anteriormente também podem ser assumidos como hipóteses. (A menos que haja menção explícita de que não devam ser usados!)

O processo de demonstrar um resultado basicamente é partir dessas hipóteses e, mediante raciocínios elementares, ir obtendo conclusões intermediárias, até chegar à conclusão desejada. Este processo é parecido com as exposições de evidências que Sherlock Holmes apresentava ao Dr. Watson para explicar como ele tinha chegado às suas conclusões.

Mas quais são esses raciocínios elementares? Como devem ser apresentadas as evidências da veracidade de um enunciado?

Vamos tentar descrevê-los a partir de alguns exemplos, e depois faremos um sumário com todos eles.

(1) A primeira técnica é passar do geral para o particular:

Todos os homens são mortais.
Sócrates é um homem.
Portanto Sócrates é mortal.

Todos já devem ter ouvido estas três frases. A primeira é uma afirmação geral sobre os homens, dando uma propriedade que vale para todos os homens, de serem mortais. A segunda dá um exemplo particular de homem, Sócrates. E a terceira conclui que este exemplo particular também tem a propriedade de ser mortal.

Vejamos um exemplo mais matemático, já visto:

Toda função derivável é contínua.
O seno é função derivável.
Portanto o seno é função contínua.

Ou, usando um outro enunciado:

> Para cada função f, se f for derivável então f será contínua.
> Seno é uma função.
> Conclusão: se o seno for derivável então o seno será contínuo.

(2) A segunda seria o oposto, generalizando uma propriedade.

Aqui temos que ter mais cuidado. Não basta termos verificado uma afirmação para um caso particular para concluir o geral.

Por exemplo, se obtivermos uma propriedade que valha para a funcão seno, não podemos deduzir que valerá para todas as funções. (Um exemplo mais específico: sabemos que a função seno tem a propriedade $\text{sen}\,(x+2\,\pi) = \text{sen}\,(x)$; deste caso particular seria errado concluir que toda função f tem a propriedade $f(x+2\,\pi) = f(x)$. Poderemos apenas concluir que existe f tal que $f(x+2\,\pi) = f(x)$.)

Mas se chegarmos a uma conclusão usando um símbolo para um elemento *arbitrário*, que não seja específico, então poderemos concluir que valerá para todos os elementos no contexto em questão.

Por exemplo, para provar que toda função derivável é contínua, consideramos uma função arbitrária f, e faremos as contas que permitem concluir que f será contínua. Daí vem a famosa frase: "como f é arbitrária, isto vale para toda f." Não foi especificado qual era tal f, mas foi usado este símbolo para denotar cada f derivável.

(3) A terceira permite concluir a tese a partir de uma implicação e a verificação de sua hipótese.

Se valer uma implicação "Hipótese implica Tese" e se valer a "Hipótese" então concluímos que vale a "Tese." Vejamos um exemplo:

> *Havíamos concluido anteriormente que:* se o seno for derivável então o seno será contínuo.
> *Havíamos também concluido que:* o seno é derivável.
> *Portanto, concluímos que:* o seno é contínuo.

(4) Equivalências lógicas. Aqui, basicamente, substituimos uma frase por outra equivalente. Por exemplo:

> *A frase:* "se f é derivável então f é contínua"
> *é equivalente a* "ou f é contínua ou f não é derivável."

Analisando demonstrações

Vamos, agora, juntar tudo o que vimos anteriormente para analisar e entender uma demonstração. Primeiro, devemos encarar uma demonstração como um conjunto organizado de evidências de que o enunciado do *teorema* em questão está correto. Nos livros omitem-se muitos passos considerados óbvios pelo autor (ou, pelo menos, fáceis de serem descobertos). Cada passo da demonstração deve ser uma das seguintes:

1. Citar uma hipótese.
2. Citar um axioma ou teorema anterior.
3. Citar uma definição.
4. Usar uma das quatro técnicas descritas acima para as conclusões intermediárias.

Uma demonstração pode ser de dois tipos: direta ou por contradição.

Uma demonstração direta parte das hipóteses do teorema (se estiverem explícitas) e axiomas e resultados anteriores, vai usando aqueles tipos de argumentações intermediárias, até chegarmos à conclusão final, que é a tese do teorema.

Uma demonstração por contradição pode ser de dois tipos: prova-se que a negação da tese implica a negação da(s) hipótese(s), ou prova-se que a negação do teorema implica uma contradição (por exemplo, da forma A e não A; neste caso costuma-se chamar este tipo de demonstração de redução ao absurdo). Nesta última, usamos a verdade lógica: se não A implica algo sempre falso, então A é verdadeira.

Bom, nada melhor do que exemplos comentados para esclarecer as idéias.

Para ficar de fácil referência, citemos os axiomas para números reais:

(1) Axiomas para soma e produto. São axiomas dizendo como funcionam as duas operações de soma e produto: $x + y = y + x$; $x + (y + z) = (x + y) + z$; $x + 0 = x$; para cada x existe y tal que $x + y = 0$, e tal y é denotado como $-x$; $xy = yx$; $x(yz) = (xy)z$; $1x = x$; para cada $x \neq 0$ existe y tal que $xy = 1$, e tal y é denotado por x^{-1}; $x(y + z) = xy + xz$ (propriedade distributiva). Os leitores já devem estar acostumados a usar estas propriedades sem se dar conta de sua importância. (Poderíamos incluir aqui axiomas referentes a $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ e $\mathbb{Q}$. Como não serão usados nos exemplos seguintes, serão omitidos.)

(2) Axiomas para a ordem. Estes axiomas dizem que a ordem dos números reais é compatível com a soma e produto: se $x < y$ então $x + z < y + z$; se $x < y$ e $z > 0$ então $xz < yz$; para todo x, exatamente uma das condições vale: ou $x < 0$, ou $x = 0$, ou $x > 0$; se $x < 0$ então $-x > 0$.

(3) Propriedade do supremo. Esta propriedade diz que o conjunto de números reais é, de certo modo, completo, sem "furos." Ela diz: se $A \subseteq \mathbb{R}$ for um conjunto não vazio e limitado superiormente (isto é, existe algum $M \in \mathbb{R}$ tal que M é maior do que todos os elementos de A), então A possui um supremo (isto é, existe o menor limitante superior de A, ou seja, existe $s \in \mathbb{R}$ tal que, para todo $x \in A$, $x \leq s$ e se M for um limitante superior de A, então $s \leq M$).

Observemos que até a resolução de equações ou desigualdades é um processo dedutivo e usa os axiomas para a soma, o produto e a ordem como técnicas de solução.

Resolver a seguinte desigualdade:

$$\frac{x+1}{x-1} < \frac{x+2}{x-6}.$$

Resolver esta desigualdade significa obtermos desigualdades equivalentes a esta, onde a variável x aparece isolada. Para isto, usaremos as propriedades da soma, do produto e da ordem.

(1) Uma primeira condição para que haja solução é que os denominadores não se anulem. Por isso concluímos que $x \neq 1$ e $x \neq 6$.

(2) Precisamos eliminar os denominadores, fazendo a "multiplicação cruzada," ou seja, multiplicar ambos os membros da desigualdade por $(x-1)(x-6)$. Mas, temos que tomar cuidado com o sinal deste fator, pois a propriedade da ordem que trata de multiplicação dos dois lados da desigualdade requer que o fator seja positivo. Por isso, devemos dividir em dois casos: $(x-1)(x-6) > 0$ e $(x-1)(x-6) < 0$.

(3) Se $(x-1)(x-6) > 0$, concluímos que ou $(x-1) > 0$ e $(x-6) > 0$ donde $x > 6$, ou $(x-1) < 0$ e $(x-6) < 0$, donde $x < 1$. Portanto, se $x > 6$ ou $x < 1$, multiplicando ambos os membros da desigualdade por $(x-1)(x-6)$, concluímos que

$$(x+1)(x-6) < (x+2)(x-1).$$

(4) Ainda sob as hipóteses $x < 1$ ou $x > 6$, vamos resolver a desigualdade acima. Usando a propriedade distributiva, concluímos que

$$x^2 - 5x - 6 < x^2 + x - 2.$$

(5) Somando-se oas dois lados $-x^2 + 5x + 2$, concluímos que

$$-4 < 6x.$$

(6) Multiplicando-se ambos os membros por $1/6$, obtemos que $x > -2/3$. Como estamos sob as hipóteses $x < 1$ ou $x > 6$, podemos refinar a conclusão de que ou $-2/3 < x < 1$ ou $x > 6$. (Aqui argumento assim: como vale "A implica B," então também vale "A implica A e B.")

(7) Agora trataremos do caso em que $(x-1)(x-6) < 0$, ou seja, em que $(x-1) > 0$ e $(x-6) < 0$, donde $1 < x < 6$. Observe que a outra possibilidade, em que $(x-1) < 0$ e $(x-6) > 0$ não ocorre, pois, neste caso, x deveria ser ao mesmo tempo maior que 6 e menor que 1.

(8) Sob a hipótese de que $1 < x < 6$, $(x-1)(x-6) < 0$, donde $-(x-1)(x-6) > 0$. Multiplicando ambos os membros da desigualdade por $-(x-1)(x-6)$ obtemos:

$$-(x+1)(x-6) < -(x+2)(x-1).$$

(9) Pela propriedade distributiva, concluímos que:

$$-x^2 + 5x + 6 < -x^2 - x + 2.$$

(10) Somando aos dois membros $x^2 + x - 6$, obtemos:

$$6x < -4.$$

(11) Multiplicando por $1/6$, obtemos $x < -2/3$. Como estamos sob a hipótese de que $1 < x < 6$, e como $-2/3 < 1$, concluímos que não há soluções à desigualdade neste intervalo.

(12) Acabamos de provar que se x é um número real que satisfaz a desigualdade

$$\frac{x+1}{x-1} < \frac{x+2}{x-6}$$

então x deve satisfazer uma das desigualdades

$$-\frac{2}{3} < x < 1 \quad \text{ou} \quad x > 6,$$

(que é a solução procurada). Na verdade, pode ser provado que, para cada $x \in \mathbb{R}$,

$$\frac{x+1}{x-1} < \frac{x+2}{x-6} \quad \text{se, e somente se,} \quad -\frac{2}{3} < x < 1 \quad \text{ou} \quad x > 6.$$

Obviamente, não é necessário escrever tudo isto para resolver uma desigualdade. Isto só foi feito aqui para explicitar o raciocínio dedutivo que é usado para resolver qualquer tipo de problema, tanto "numérico" quanto "teórico." Neste exemplo vemos porque são omitidos vários detalhes "triviais" de uma dedução. Com todos estes detalhes a leitura torna-se mais enfadonha e complicada.

Agora, um exemplo mais sofisticado. Vamos deduzir destes axiomas que todo número real positivo tem raiz quadrada. Observemos que não explicitamos nestes axiomas quase nehuma propriedade de números reais que estamos acostumados a usar!

Prova de que todo número real positivo tem raiz quadrada:

Bom, comecemos com $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$. Vamos usar a propriedade do supremo, definindo o conjunto $A = \{x \geq 0 : x^2 < a\}$. Como $a > 0$ e $0^2 = 0 < a$, vemos que A não é vazio (pois exibimos um elemento dele). Vamos mostrar que A é limitado superiormente. Para isto, usaremos as propriedades da ordem.

Se $x > 1$ então $x > 0$ e por isso, $x^2 > x$ e se $x > 0$ e $x \leq 1$ então $x^2 \leq x$. Daí, se $a > 1$ e $x^2 < a$, então $x < a$ e se $a \leq 1$ e $x^2 < a$ então $x \leq 1$. Portanto, se $M = \max\{1, a\}$, então, para todo $x \in A$, $x \leq M$. Ou seja, A é limitado superiormente, donde concluímos que A tem supremo, que chamaremos de s.

Mostraremos que $s^2 = a$ (ou seja, s é uma raiz quadrada de a). Para isto, teremos que provar que nem $s^2 < a$ e nem $s^2 > a$, argumentando por contradição.

Se $s^2 > a$, tome $\varepsilon = (s^2 - a)/(3s)$. Então $0 < \varepsilon < (s^2 - a)/(2s)$; portanto, $(s - \varepsilon)^2 = s^2 - 2s\varepsilon + \varepsilon^2 > s^2 - 2s\varepsilon > a$ (lembrando que $\varepsilon^2 > 0$), donde $s - \varepsilon < s$ é limitante superior de A, contradizendo que s seja o supremo de A.

Se $s^2 < a$, tome $\varepsilon = \min\{1/2, (a - s^2)/(2s + 2)\}$. Então $0 < \varepsilon^2 < \varepsilon < (a - s^2)/(2s + 1)$; daí, $(s+\varepsilon)^2 = s^2 + 2s\varepsilon + \varepsilon^2 < s^2 + 2s\varepsilon + \varepsilon = s^2 + (2s+1)\varepsilon < s^2 + (2s+1)(a-s^2)/(2s+1) = a$, ou seja, $s + \varepsilon \in A$, contradizendo que s seja o supremo de A.

Portanto, $s^2 = a$. Tal s é denotado por $\sqrt{a}$.

Análise da demonstração acima: Vamos detalhar as argumentações da demonstração. Este tipo de detalhamento pode ser feito pelos leitores em qualquer demonstração de qualquer texto.

(1) A demonstração usa a propriedade do supremo para mostrar que $x^2 = a$ tem solução. Por isso, começamos definido um conjunto $A = \{x \geq 0 : x^2 < a\}$.

(2) Para usar a propriedade do supremo com A, precisamos verificar as duas condições sobre o conjunto em questão: A não é vazio e A é limitado superiormente? (Observemos que aqui particularizamos a propriedade do supremo ao conjunto A definido em (1), obtendo uma implicação. Agora partimos para a verificação das hipóteses desta implicação para podermos concluir sua tese.)

(3) Mostramos que A é não vazio exibindo um elemento dele: $0 \in A$, pois como $a > 0$ e $0^2 = 0 < a$, este elemento satisfaz a condição para pertencer a A.

(4) Mostramos que se $M = \max\{1, a\}$, então todos os elementos x de A satisfazem $x \leq M$, considerando as duas possibilidades: $x \leq 1$, donde $x^2 \leq x \leq 1 \leq M$, ou $x > 1$, donde $M \geq a > x^2 > x$.

(5) De (3) e (4), concluímos que A tem supremo, que chamamos de s. (Observemos que este s refere-se a um elemento específico, e não genérico.)

(6) Tivemos que mostrar que $s^2 = a$. Para isto, usamos prova por contradição. Ou seja, supomos que $s^2 \neq a$, dividindo nos dois casos possíveis: $s^2 > a$ e $s^2 < a$. Vimos que tanto a condição $s^2 > a$ como $s^2 < a$ permitiram concluir que s não poderia ser o supremo de A, contrariando (5).

(7) Supondo que $s^2 > a$, encontramos um número real $\varepsilon > 0$ tal que $(s - \varepsilon)^2 > a$, concluindo que s não era o supremo (ou menor limitante superior) de A, contradição a (5).

(8) Supondo que $s^2 < a$, novamente encontramos um $\varepsilon > 0$ tal que $(s + \varepsilon)^2 < a$, outra vez concluindo que s não era o supremo (ou menor limitante superior) de A, novamente contradizendo (5).

Vejam no fim deste texto os comentários de como poderia ser descoberta esta demonstração.

Desafio aos leitores: Os leitores podem treinar-se, demonstrando que se $a > 0$ então a equação $x^2 = a$ tem exatamente duas soluções, $\sqrt{a}$ e $-\sqrt{a}$. Claramente estes dois números reais são soluções de $x^2 = a$. Quem garante que não possa haver outra solução? Para provar isto, usem as propriedades da ordem para mostrar que se $x \neq \pm\sqrt{a}$ (ou seja, ou $x < -\sqrt{a}$, ou $-\sqrt{a} < x < \sqrt{a}$, ou $\sqrt{a} < x$) então $x^2 \neq a$.

Vamos deduzir a fórmula de Bhaskara, que resolve equações do segundo grau.

Fórmula de Bhaskara: (Supondo que $a \neq 0$) $ax^2 + bx + c = 0$ se, e somente se, $x = (-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac})/2a$.

Dedução: A idéia é completar quadrados perfeitos. Somando-se $-c + b^2/4a$ dos dois lados da equação, obteremos:

$$a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = -c + \frac{b^2}{4a}$$

donde, isolando-se x, obteremos o resultado.

Análise da dedução: Foram usadas apenas as propriedades da soma e produto de números reais. Detalhemos esta dedução:

(1) Citemos a equação: $ax^2 + bx + c = 0$.

(2) Somamos aos dois lados o termo $-c+b^2/4a$, obtendo $ax^2+bx+c-c+b^2/4a = 0-c+b^2/4a$. (Aqui usamos a propriedade da soma: se $a, b, c \in \mathbb{R}$ e $a = b$, então $a + c = b + c$.)

(3) Rearranjamos os termos, concluímos que: $ax^2 + bx + b^2/4a = -c + b^2/4a$.

(4) Novamente rearranjamos os termos: $a(x + b/2a)^2 = (b^2 - 4ac)/4a$. (Usando várias vezes a propriedade distributiva.)

(5) Multiplicando os dois lados da equação por $1/a$, concluímos que: $(x+b/2a)^2 = (b^2-4ac)/4a^2$.

(6) Usando o desafio aos leitores acima, temos duas soluções à equação em (5): $(x + b/2a) = (\pm\sqrt{b^2 - 4ac})/2a$.

(7) Finalmente, somamos aos dois lados da equação em (6) o termo $-b/2a$, obtendo: $x = (-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac})/2a$.

Por fim, vamos apresentar uma demonstração por redução ao absurdo.

Teorema: Se $x, y \in \mathbb{R}$ e $x > 0$ então existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $nx > y$.

Demonstração: Suponhamos, por absurdo, que para todo natural n, valha $nx \leq y$. Consideremos o conjunto $A = \{nx : n \in \mathbb{N}\}$. O conjunto A é não vazio, pois $x = 1x \in A$, e é limitado superiormente por y, logo admite supremo. Seja s o supremo de A. Sabemos que $0 < x$, donde $s - x$ não é limitante superior de A. Portanto existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $s - x < mx$. Mas, daí, $s < (m + 1)x$, contradizendo o fato de s ser o supremo de A.

Análise da demonstração: Esta é uma demonstração por redução ao absurdo, como é indicado no início. Então vamos mostrar que a negação do teorema implica (ou seja, permite concluir) uma coisa falsa.

Primeiramente, reconheçamos qual é a negação do teorema: ele é da forma hipótese implica tese. A hipótese é: $x, y \in \mathbb{R}$ e $x > 0$; a tese é existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $nx > y$. Como fica a negação disto? Dizer que A não implica B é dizer que pode valer A e não valer B. Ou seja, a negação do teorema fica sendo: hipótese e não a tese. Vamos provar que isto implica uma contradição (ou absurdo). Ou seja, a negação do teorema será usada como nova hipótese.

(1) Citamos a hipótese: para todo natural n, vale $nx \leq y$. (Isto é a negação da tese.)

(2) Definimos o conjunto $A = \{nx : n \in \mathbb{N}\}$. (Novamente usaremos a propriedade do supremo, particularizada a este A, etc.)

(3) Mostramos que A não é vazio, exibindo um elemento dele: $x = 1x \in A$. (Escrevemos $x = 1x$ para evidenciar que o próprio x satisfaz a condição para pertencer a A.)

(4) De (1), concluímos que A é limitado superiormente (por y).

(5) Citamos a propriedade do supremo: se A não for vazio e for limitado superiormente então possuirá supremo (que é o menor limitante superior de A).

(6) Concluímos, de (3), (4) e (5), que existe o supremo (ou menor limitante superior) de A, que chamamos de s.

(7) Citamos outra hipótese: $x > 0$.

(8) Concluímos que $s - x < s$, (somando-se s aos dois lados da desigualdade; aqui usamos a propriedade da desigualdade que diz: se $a, b, c \in \mathbb{R}$ e $a < b$ então $a + c < b + c$).

(9) Concluímos (da definição de supremo) que $s - x$ não é limitante superior de A.

(10) Concluímos que existe algum elemento de A, que deve ser da forma mx, para algum $m \in \mathbb{N}$, tal que $s - x < mx$.

(11) Concluímos que $s < (m + 1)x$, (somando-se x aos dois lados da desigualdade; novamente usamos a propriedade citada em (8)).

(12) A conclusão acima está dizendo que s não é limitante superior de A. Isto nega que s seja o supremo de A.

Ou seja, concluímos que existe um número real que é e, ao mesmo tempo, não é limitante superior de A!

Portanto, da negação do teorema concluímos uma contradição. Daí concluímos que o teorema tem que ser verdadeiro.

Bom, os leitores estão convidados a usar este tipo de análise de todas as demonstrações que encontrarem pelo caminho, tornando o estudo de um texto ou de uma disciplina mais proveitoso.

Algumas dicas para demonstrar teoremas

Como já foi dito, não é fácil descobrir uma demonstração. Isto depende de experiência. Mas podem ser dadas algumas sugestões que talvez ajudem a descobri-las.

Primeiro, pode-se tentar imitar demonstrações já vistas.

Segundo, tentem caminhar "ao contrário," ou seja, partam da tese, busquem transformações ou resultados anteriores que permitam concluir esta tese. Verifique quais as hipóteses que levam a tal tese. Olhe cada hipótese como uma conclusão intermediária, buscando resultados anteriores que permitam conclui-las, e assim por diante, até chegarmos às hipóteses do que queremos demonstrar. Depois é só passar a limpo, na ordem certa.

Terceiro: experiência. Não tem jeito. Só com muito treino (e paciência!) se consegue enfrentar uma demonstração sem desistir no meio do caminho.

Exemplo: Como foi demonstrado acima que todo número real positivo tem uma raiz quadrada (positiva)?

Lá foi usada a propriedade do supremo. Por que precisamos usá-la?

Bom, tínhamos em mãos as propriedades dos números reais. As propriedades da soma, do produto e da ordem não eram suficientes, pois elas também valem para os números racionais, e sabemos que nem todo número racional tem raiz quadrada racional. (Aqui entra a experiência...)

Por isso, a única propriedade que sobrou foi a do supremo. Para isto, precisamos achar um conjunto A que não fosse vazio e fosse limitado superiormente. Que propriedade usar? Uma primeira idéia seria, por exemplo, $A = \{x : x^2 = a\}$. Só que para mostrar que este A não é vazio precisaríamos mostrar que a tem raiz quadrada. Mas é justamente isto que estávamos tentando mostrar. Não podemos assumir a existência dela para mostrar que ela existe! Uma outra tentativa seria usar uma desigualdade, já que a igualdade não serviu. Como queríamos um conjunto limitado superiormente, tentamos $A = \{x : x^2 < a\}$. E como queríamos achar uma raiz quadrada positiva, acrescentamos a condição de que $x \geq 0$, isto é, tomamos $A = \{x : x \geq 0 \text{ e } x^2 < a\}$. Com este conjunto tivemos mais sorte, pois foi relativamente fácil mostrar que ele não era vazio. Para mostrar que ele era limitado superiormente foi apenas um pouco mais trabalhoso.

O próximo passo era mostrar que o supremo de A, que chamamos de s, era a raiz quadrada de a, ou seja, $s^2 = a$. Bom, tal s só poderia satisfazer uma das duas condições: ou $s^2 = a$ ou $s^2 \neq a$. Para mostrarmos que não poderia satisfazer $s^2 \neq a$, mostramos que esta condição levaria a alguma contradição. Fizemos isto dividindo o problema em dois casos: $s^2 > a$, ou $s^2 < a$. Em cada um destes casos, tentamos mostrar que s não podia ser supremo de A.

No caso em que $s^2 > a$, tentamos mostrar que s não poderia ser o menor limitante superior de A, tentando achar outro limitante superior de A menor que s. Tentamos, então achar algum $\varepsilon > 0$ de modo que $s - \varepsilon$ ainda fosse limitante superior de A. Ou seja, deveria satisfazer a desigualdade $(s - \varepsilon)^2 > a$. Desenvolvendo o quadrado, teríamos que achar algum $\varepsilon > 0$ tal que $s^2 - 2s\varepsilon + \varepsilon^2 > a$, ou seja, $2s\varepsilon - \varepsilon^2 < s^2 - a$. Poderíamos tentar resolver esta desigualdade de segundo grau em ε. Mas (e aqui novamente entra a experiência) vimos que bastava achar ε tal que $2s\varepsilon < s^2 - a$, pois, neste caso, $2s\varepsilon - \varepsilon^2 < 2s\varepsilon < s^2 - a$. Bastou então tomarmos $\varepsilon = (s^2 - a)/3s$. Entretanto, seria possível resolver a desigualdade de segundo grau (sem assumir que existem raízes quadradas!...)

No caso em que $s^2 < a$, vimos que neste caso $s \in A$. Por isso queríamos achar $\varepsilon > 0$ tal que $s + \varepsilon \in A$, contradizendo o fato de s ser limitante superior de A. Para isto, tínhamos que resolver a desigualdade $(s + \varepsilon)^2 < a$, ou $s^2 + 2s\varepsilon + \varepsilon^2 < a$. Mas, ao invés de tentar resolver uma desigualdade de segundo grau, se restrigirmos $\varepsilon < 1$, sabemos que $\varepsilon^2 < \varepsilon$. Daí, foi só tentar acertar a desigualdade $2s\varepsilon + \varepsilon^2 < 2s\varepsilon + \varepsilon = (2s + 1)\varepsilon < a - s^2$, não esquecendo de impor que $\varepsilon < 1$.