Capítulo 1

Breve Histórico

Neste capítulo abordaremos sumariamente a evolução histórica da lógica matemática, sem a pretensão de sermos completos. Na verdade, veremos apenas os ramos que nos interessam para motivar o que vem a seguir, deixando àqueles que se interessarem a leitura das obras referidas na bibliografia.

1.1 Lógica na Antiguidade

1.1.1 Os Primórdios da Lógica Grega Antiga

Aristóteles foi o primeiro filósofo grego a escrever de forma sistemática sobre lógica, como ferramenta (ou conjunto de regras) para disciplinar a argumentação científica. No entanto, antes dele (séculos V e IV A.C.), alguns filósofos e sofistas[1] já se ocupavam do problema da argumentação, linguagem (estrutura das sentenças), verdade, falácias, entendimento e convicção.

Os sofistas dedicavam-se à argumentação política e jurídica: ou seja, convencer os outros. Para eles, *verdade* seria aquilo que pudessem fazer seu interlocutor crer que fosse tal. Por exemplo, o famoso sofista Protágoras (485-415

[1] A palavra *sofista* designa genericamente escolas de pensamento que se preocupavam com a argumentação política e jurídica, tendo o homem e não ideias abstratas como ponto de referência. Foram criticados pelos filósofos idealistas, que criaram o uso pejorativo da palavra sofista e sofisma. Para um estudo mais sério sobre estes pensadores, recomendamos a obra *Os Sofistas* de W. C. Guthrie.

A.C.) estudava a estrutura das sentenças, classificando-as como expressando desejo (*gostaria que ...*), questão, resposta e comando (modo imperativo); Alcidamas (discípulo de outro sofista famoso, Górgias, e que floresceu em meados do século IV A.C.) classificava-as como afirmação, negação, questão e discurso; Antístenes (meados dos séculos V e IV A.C.) definia sentença como sendo aquilo que indique o que uma coisa foi ou é, de modo que aquele que dissesse a coisa que é, falaria a verdade.

O tartado de lógica mais antigo de que se tem notícia é o *Dissoi Logoi* – ou seja, *Duplos Argumentos* – publicado em cerca de 400 A.C., debatendo sobre verdade e falsidade, opondo duas teorias da verdade:

1. a verdade seria uma propriedade temporal de sentenças – uma senteną seria verdadeira se no momento que fosse proferida, ocorresse aquilo a que se refere (por exemplo, a frase *chove agora* seria considerada verdadeira se no momento em que fosase proferida estivesse chovendo, e falsa, caso contrário);

2. a verdade seria uma propriedade atemporal de sentenças – uma sentença seria considerada verdadeira se fosse o caso de que se conformasse com o que existisse.

Esse tratado também se refere ao problema de que um uso auto-referente do predicado verdade traria problemas (antecipando o famoso *paradoxo do mentiroso* descoberto por Eubúlides de Mileto em meados do século IV A.C. – uma pessoa diz *estou mentindo*; esta frase é verdadeira ou falsa?).

Platão separou a sintaxe (a sentença) e a semântica (o fato de ser verdadeira ou falsa) (veja seu diálogo *O Sofista*), mas não fez nenhum estudo sistemático da lógica.

1.1.2 Os Silogismos Aristotélicos

Aristóteles escreveu (pelo menos) seis livros tratando especificamente de lógica, agrupados posteriormente com o nome de *Órganon* (ferramenta). Ao analisar os argumentos matemáticos, ele pôde definir as regras básicas de argumentação lógica – os *silogismos*, ou deduções. As sentenças consideradas por Aristóteles eram da forma *Sujeito-Predicado* ligados pelo verbo *ser* conjugado conforme o caso. Tanto o sujeito quanto o predicado da sentença eram chamados de *termos*. Estes podem ser *termos universais* se forem da forma *todo X*, ou *termos particulares*, ou *indefinidos* se apenas contiver palavras ou expressões sem uma ideia de quantidade (todo ou algum). Podem haver também os *termos singulares*, aqueles que nomeiam alguma coisa ou ser específico (por exemplo, o nome de uma pessoa) – estes são tratados por Aristóteles como se fossem universais (por exemplo *Sócrates* – o nome do filósofo – era tratado também como se fosse *todo Sócrates*). Confrome seja o termo que é o sujeito da sentença, esta pode ser chamada de *universal*,, ou *particular* ou *indefinida*.

Ele definiu uma *dedução* como sendo *um discurso em que, sendo supostas certas coisas, algo diferente do que foi suposto resulta necessariamente por assim ser*[2].

Bom, essa definição não ajuda muito entender o que ele pretendia, mas uma descrição explícita de seu sistema vem a calhar.

Um silogismo é uma regra de extrair uma conclusão *necessária* a partir de duas premissas (ou seja, se for negada a conclusão, as premissas não poderão ambas serem aceitas). Os silogismos são construídos com sentenças de um dos tipos:

1. todo X é Y;
2. algum X é Y;
3. todo X é não Y (ou nenhum X é Y);
4. algum X é não Y (ou nem todo X é Y).

Os dois primeiros tipos de sentenças são afirmativas e as duas últimas negativas. A sentença "*algum X é não Y*"é a negação de "*todo X é Y*"e a sentença "*nenhum X é Y*"é a negação de "*algum X é Y*".

Durante a Idade Média (não se sabe quando) surgiram palavras mnemônicas para a memorização das várias figuras dos modods de silogismos. Usaram as duas primeiras vogais da palavra latina *affirmo*, A e I, e as duas vogais da palavra *nego*, E e O, para indicar cada um dos tipos de sentenças que podem compor um silogismo:

[2]Ser necessário! Ou seja,se as coisas supostas forem verdadeiras, a conclusão tem que ser verdadeira.

1. (A): todo X é Y;

2. (I) algum X é Y;

3. (E) todo X é não Y (ou nenhum X é Y);

4. (O) algum X é não Y (ou nem todo X é Y).

O silogismo envolverá sempre três termos nas três sentenças que o compœ, sendo que um termo será comum nas duas premissas (o chamado termo médio) e a conclusão envolverá os termos restantes: como exemplo, o primeiro silogismo:

> **Premissa:** Todos os homens são animais.
> **Premissa:** Todos os animais são mortais.
> **Conclusão:** todos os homens são mortais.

Pensando nas classes (ou coleções) de homens, animais e mortais, temos que necessariamente os homens formam uma subclasse dos animais, que, por sua vez, formam uma subclasse dos mortais. A *premissa maior* é a sentença que contém como predicado (isto é, o que vem depois do verbo *ser*) o que virá a ser o predicado da conclusão. A outra premissa é chamada de *premissa menor*. O predicado da premissa menor é osujeito da premissa maior e não faz parte da conclusão. Este predicado é o chamado *termo médio* do silogismo.

O silogismo apresentado acima é da forma AAA, ou seja, as três sentenças que o compõem são da forma *todo X é Y*. O nome medieval deste tipo de silogismo é $BARBARA$.

Aristóteles obteve três figuras (ou tipos de estruturas) de silogismos, e para não ocupar muito espaço em sua exposição (e para melhor visualização) vamos introduzir um pouco de notação, usando as letras A, E I e O, como explicadas acima, definindo:

1. $A(X, Y)$: todo X é Y;

2. $I(X, Y)$ algum X é Y;

3. $E(X, Y)$ todo X é não Y (ou nenhum X é Y);

4. $O(X, Y)$ algum X é não Y (ou nem todo X é Y).

Assim, o silogismo BARBARA pode ser escrito como $A(X, Y), A(Y, Z) \vdash A(X, Z)$ (aqui já usaremos o símbolo $\vdash$ para indicar a relação que diz ser o lado direito dele conclusão do que vem de seu lado esquerdo).

A **Primeira Figura** caracteriza-se pela forma genérica dos predicados: $*(Y, Z), *(X, Y) \to *(X, Z)$ (ou seja, o termo médio Y é o sujeito da premissa maior $*(Y, Z)$ e predicado da menor $*(X, Y)$), sendo que o asterisco representa uma das vogais A, E, I ou O. Essa figura é composta pelas quatro regras (ou *modos*) seguintes:

1. Barbara $A(Y, Z), A(X, Y) \vdash A(X, Z)$
2. Celarent $E(Y, Z), A(X, Y) \vdash E(X, Z)$
3. Darii $A(Y, Z), I(X, Y) \vdash I(X, Z)$
4. Ferio $E(Y, Z), I(X, Y) \vdash O(X, Z)$

Exercício 1 Mostre que somente essas possibilidades são válidas (tente outras permutações das vogais e verifique, dando um exemplo, que não podem ser válidas).

A **Segunda Figura** caracteriza-se pelo esquema $*(X, Z), *(Y, Z) \to *(X, Y)$ (isto é, o termo médio Z é o predicado das duas premissas) e tem quatro modos:

1. Cesare $E(X, Z), A(Y, Z) \vdash E(X, Y)$
2. Camestres $A(X, Z), E(Z, X) \vdash E(X, Y)$
3. Festino $E(X, Z), I(Y, Z) \vdash O(X, Y)$
4. Baroco $A(X, Z), O(Y, Z) \vdash O(X, Y)$

A **Terceira Figura** caracteriza-se pelo esquema $*(X, Y), *(X, Z) \to *(Z, Y)$ (o termo médio X é o sujeito das duas premissas) e possui seis modos:

1. Darapti $A(X,Y), A(X,Z) \vdash I(Z,Y)$
2. Felapton $E(X,Y), A(X,Z) \vdash O(Z,Y)$
3. Disamis $I(X,Y), A(X,Z) \vdash I(Z,Y)$
4. Datisi $A(X,Y), I(X,Z) \vdash I(Z,Y)$
5. Bocardo $O(X,Y), A(X,Z) \vdash O(Z,Y)$
6. Ferison $E(X,Y), I(X,Z) \vdash O(Z,Y)$

Um discípulo de Aristóteles, Teofrasto, isolou uma **Quarta Figura**, caracterizada por $*(X,Y), *(Y,Z) \rightarrow *(Z,X)$ (o termo médio Y é o sujeito da premissa menor e predicado da maior), com cinco modos:

1. Bramantip (ou Bamalip) $A(X,Y), A(Y,Z) \vdash I(Z,X)$
2. Camenes $A(X,Y), E(Y,Z) \vdash E(Z,X)$
3. Dimaris $I(X,Y), A(Y,Z) \vdash I(Z,X)$
4. Fesapo $E(X,Y), A(Y,Z) \vdash O(Z,X)$
5. Fresison $E(X,Y), I(Y,Z) \vdash O(Z,X)$

Exercício 2 Descreva como são e verifique a validade dos seguintes *modos subalternos*: Barbari, Celaront, Cesaro, Camestrop e Camenop, que se caracterizam por conclusoes particulares tiradas a partir de premissas universais. De quais modos foram obtidos?

Exercício 3 Do ponto de vista moderno, os modos Bramantip e barbari são problemáticos. Explique porque. Aqui Aristóteles assume implicitamente alguma coisa que faz com que estes silogismos sejam válidos.

Agora exporemos os **Métodos de Prova** Aristotélicos. Como ele definiu uma demonstração (ou prova) como sendo um discurso *etc*, será então uma sequência de sentenças ordenadas segundo certos princípios e regras.

Uma demonstração pode ser *direta*, em que o discurso é composto por uma sequência de sentenças obtidas por silogismos ou regras de conversão (veja mais adiante) ou por redução ao absurdo.

O primeiro importante princípio é o **Princípio da Não Contradição**, estatuindo que não se pode afirmar e negar uma sentença ao mesmo tempo (ou seja, não pode uma sentença e sua negação serem ambas verdadeiras).

O segundo é o **Princípio do Terceiro Excluído**[3], ou seja, entre uma sentença e sua negação, exatamente uma delas será verdadeira.

Este princípio materializa-se nas **Demonstrações por Redução ao Absurdo**, em que, assumindo a negação do que se quer demonstrar e concluindo uma contradição (ou seja, existe uma sentença e também sua negação no discurso demonstrativo), pode-se concluir que o que se queria estará demonstrado.

A *Demonstração Direta* é o discurso partindo de premissas, *usando os silogismos da primeira figura* ou[4]

Regras de Conversão:

1. $E(X,Y) \vdash E(Y,X)$ (*nenhum X é Y* converte-se em *nenhum Y é X*);

2. $I(X,Y) \vdash I(Y,X)$ (*algum X é Y* converte-se em *algum Y é X*);

3. $A(X,Y) \vdash I(X,Y)$ (*todo X é Y* converte-se em *algum X é Y* – hoje em dia essa regra não é considerada válida – mas para os gragos antigos não fazia sentido falar em *conjunto vazio* e, portanto, uma frase do tipo *todo venusiano é verde* seria considerada falsa por não existirem venusianos[5]

Observemos que numa demonstração por redução ao absurdo também podem ser usadas estas regras e os silogismos da primeira figura.

Por fim, para **refutar** uma sentença, pode ser adimtido um (contra)exemplo.

Façamos dois exemplos de deduções neste sistema:

---

[3]Hoje em dia, principalmente com o advento da *Lógica Intuicionista*, há uma diferença importante entre o princípio da não contradição e o do terceiro excluído. Veja o Capítulo 4 sobre o Cálculo Proposicional em que daremos algumas noções da lógica intuicionista e a diferença entre esses dois institutos.

[4]Para nós, a menos de menção contrária, a palavra OU é inclusiva – falar A OU B significa pelo menos uma das sentenças entre as referidas – é o famoso E/OU usado em alguns textos. Veja mais sobre isto na próxima seção sobre a Lógica Estóica.

[5]Se porventura você acredita na existência de venusianos, substitua o termo por qualquer outro que você acredite não existir.

Exemplo 1 Vamos demonstrar o modo Cesare da segunda figura, ou seja, $E(X,Z), A(Y,Z) \vdash E(X,Y)$[6]

1. $E(X,Y)$ - premissa;
2. $A(Y,Z)$ – premissa;
3. $E(Z,X)$ – conversão de 1;
4. $E(X,Y)$ – conclusão de Celarent, tendo como premissas 3 e 2 (nesta ordem).

Exemplo 2 Vamos agora usar o método da redução ao absurdo para provar Baroco, ou seja, $A(X,Z), O(Y,Z) \vdash O(X,Y)$[7] Para isto, assumiremos que não valha a regra (ou seja, assumiremos as premissas e negaremos a conclusão[8]), obtendo uma contradição:

1. $A(X,Z)$ – premissa;
2. $O(Y,Z)$ – premissa;
3. $A(X,Y)$ – premissa (hipótese para a redução ao absurdo);
4. $A(Y,X)$ – conversão de 3;
5. $A(Y,Z)$ – Barbara com premissas 4 e 3;
6. $O(X,Y)$ – conclusão devido à contradição entre 2 e 5.

Exercício 4 Mostre que cada um dos modos das figuras 2, 3 e 4 podem ser deduzidos neste sistema. [Sugestão: a consoante que inicia o nome de cada um desses modos coincide com aquele da primeira figura que será usado nma demonstração. O único modo que requer demonstração por redução ao absurdo é Bocardo.]

[6] Para os terráqueos, premissas: *nenhum X é Z, todo Y é Z*; conclusão: *nenhum X é Y.*

[7] Para nós, pobres mortais, premissas: *todo X é Z, nenhum Y é Z*; conclusão: *nenhum X é Y.*

[8] Por que isto significa negar a regra?

Exercício 5 Mostre que os modos DARII e FERIO podem ser deduzidos no sistema em que só se usam os dois primeiros modos da primeira figura. [Sugestões: por redução ao absurdo usando CAMESTRES para DARII e CESARE para FERIO, e depois elimine essas figuras usando o exercício anterior.]

Muita coisa sobre a lógica de Aristóteles foi omitida deste texto..

1.1.3 A Lógica dos Estóicos

Dos estóicos falaremos pouco. O que mais nos interessa de sua lógica é que trataram com profundidade o que hoje chamamos de Cálculo Proposicional, assunto de nosso próximo Capítulo[9]. Essencialmente estudaram a implicação (*se A então B*, que resumiremos com a notação $A \rightarrow B$) chegando às seguintes regras de dedução contendo duas premissas e uma conclusão:

1. $A \rightarrow B$; $A \vdash B$ (*Modus Ponens*)

2. $A \rightarrow B$; não $B \vdash$ não A (*Modus Tollens*)

3. se não for o caso de valer ambas A e B, mas valer $A \vdash$ não B

4. ou A ou B; $A \vdash$ não B (aqui eles entendem a palavra *ou* como sendo exclusivo – apenas uma das sentenças entre A e B pode ser verdadeira para que a disjunção[10] que compœ a primeira premissa seja verdadeira)

5. ou A ou B; não $A \vdash B$ (novamente disjunção exclusiva).

1.2 O Enfoque Moderno da Lógica

Vamos deixar a Antiguidade e pular para os séculos XIX e XX.

[9] Não perca!
[10] Sentenças do tipo *A ou B*, *ou A ou B*, são ditas disjunções.

1.2.1 Boole e a Algebrização da Lógica

George Boole foi o primeiro que apresentou a Lógica como uma teoria matemática, dando um enfoque algébrico a ela – uma álgebra de conjuntos. Definiu abstratamente um sistema algébrico para formalizar os silogismos, como por exemplo, a sentença *todo X é Y* é representada pela relação $X \cdot Y = Y$, sendo que $\cdot$ seria uma operação binária (que para conjuntos corresponderia à intersecção) – hoje ela representa o conectivo E – assim, a representação algébrica do silogismo BARBARA ficaria $Y \cdot Z = Y$; $X \cdot Y = X \vdash X \cdot Z = X$. Falaremos mais sobre essas álgebras (chamadas de álgebras de Boole, ou booleanas) no capítulo sobre o Cálculo Proposicional.

O importante aqui é ressaltar a construção de objetos matemáticos que intepretam[11] fielmente (parte do) raciocínio lógico usado em matemática.

1.2.2 Leibniz e a —Lingua Characteristica – Frege e a Necessidade da Formalização

Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716) publicou em 1666 a obra *Dissertatio de arte combinatoria* na qual esboçou um plano para o que chamava de *Característica Universal*, uma linguagem artificial prórpia para expressar os conceitos da lógica e filosofia. Esboçou também um cálculo lógico, cuja intenção era mecanizar as deduções (inferências) válidas e também verificar as deduções feitas por outros. Essas ideias influenciaram Charles Babbage, William Stanley Jevons, Charles Sanders Peirce e outros, os quais produziram trabalhos voltados para essa mecanização, culminando com o desenvolvimento dos computadores.

Uma influência assumida foi declarada por Gottlob Frege (1848-1925), que desenvolveu uma linguagem artificial para o estudo das deduções lógicas e expressões de conceitos, como tentativa de fundamentar a Matemática.

Desenvolveu seu sistema notacional primeiramente na obra *Begriffsschrift* (1879) (*Conceitografia*). A notação[12] que introduziu are gráfica, diagramática. Estava preocupado com a estrutura das inferências, e não tanto com o *conteúdo*

[11] Ou *refletem*, como num espelho.

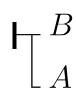
[12] Foi possível escrevermos esta notação graças ao pacote *begriff.sty*, desenvolvido por by Josh Parsons – josh@coombs.anu.edu.au – que detém os direitos autorais do pacote.

do que era demonstrado. Assim, nessa obra, não especificou toda a linguagem, mas apenas aquela parte que poderíamos chamar de lógica.

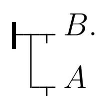
Uma *proposição* (ou *julgamento*) era denotada por

$$\vdash A$$

sendo que A denota o conteúdo da asserção. Se apenas quiser referir-se ao conteúdo, sem que se afirma ser uma proposição, usa apenas uma barra horizontal antes do conteúdo: $-A$. No entanto, não é qualquer conteúdo A que se torna uma proposição escrevendo o símbolo $\vdash A$ (por exemplo, o conteúdo A expressando o conceito *casa*). A *implicação* "*se A. então B*"era denotada por

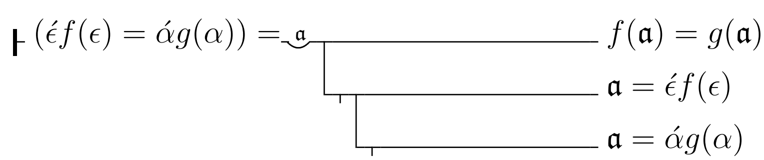


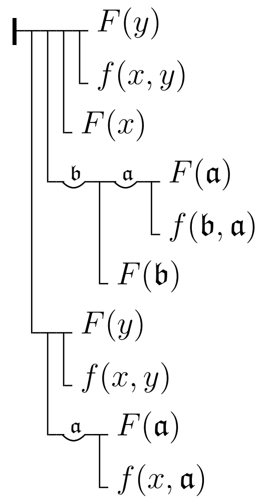
e a negação "*não A*"por $\vdash\!\!\top A$. Combinando com a implicação, teríamos, por exemplo, "*se não A, então não B*", dado por



Um conteúdo pode ter alguma elemento indeterminado, que pode ser substituído por outros conteúdos – ou seja, uma variável. Podemos considerar tais conteúdos como *funções*: $\vdash \Phi(A)$ seria a proposição que "*A tem a propriedade* Φ"; $BGassert\Psi(A, B)$ seria a proposição "*A e B são relacionados por* Ψ". Com isto, temos a possibilidade da *quantificação* (universal), sendo que a proposição "*para todo* $\mathfrak{a}$, $\Phi(\mathfrak{a})$"tomaria a forma $\vdash\!\smile^{\mathfrak{a}}\!\!- \Phi(\mathfrak{a})$.

Frege também considerou a possibilidade da letra Φ em $\Phi(A)$ ser considerada uma variável (proposicional), que poderia também ser quantificada: $\vdash\!\smile^{\mathfrak{f}}\!\!- \mathfrak{f}(\mathfrak{a})$. Esta liberalidade, junto com a noção de extensão (discutida a seguir) é que permitiu a possibilidade do chamado paradoxo de Russel. Vejamos como isso ocorreu.





1.2.3 Russel: o Paradoxo e a Teoria dos Tipos

1.2.4 O Programa de Hilbert

David Hilbert Preocupou-se desde cedo em sua carreira de matemático co o problema de fundamentar corretamente a matemática. Seu primeiro grande sucesso foi sua axiomatização da geometria em 1889, reduzindo a questão de sua consistência (ou impossibilidade de se deduzir contradições) à da dos números reais. Por isso, considera o próximo passo importante de sua pesquisa, a busca de uma axiomatização da análise matemática, com a demonstração de sua consistência.

Por um método simples de construção (cortes de Dedekind, etc), o grande problema de consistência da análisa matemática reduz-se ao da consistência da aritmética (de *segunda ordem.*

> Todas essas questões de princípios, que eu caracterizei acima e das quais a questão que acabamos de discutir, qual seja, a questão da decidibilidade em uma quantidade finita de operações, foi apenas a última delas, parecem-me que formam um importante novo campo de pesquisa que ainda precisa ser desenvolvido. Para conqauistar esse campo, estou convencido de que devemos tornar o conceito de demonstração especificamente matemática em um

> objeto de investigação, assim como o astrônomo considera o movimento de sua posição, o físico estuda a teoria de seus instrumentos, e o filósofo critica a razão em si mesma.
>
> David Hilbert, 1922.

Propôs um programa de investigação do próprio método de argumentação lógica da matemática, dividindo-o em três grandes objetivos:

1. *axiomatizar* cada área da matemática;
2. demonstrar que tal axiomatização seja completa (todos os enunciados podem ser deduzidos ou refutados) e consistente (não se poderá deduzir uma contradição a partir desses axiomas);
3. demonstrar a decidibilidade de cada teoria (a possibilidade de decidir mecanicamente de um enunciado é ou não um teorema).

1.2.5 Gödel: Completude e Incompletude da Lógica de Primeira Ordem

Em 1931, o matemático lógico austríaco Kurt Gödel publicou um artigo que mostrou a impossibilidade de se implementar, em toda a sua força, o programa de Hilbert.

Ele mostrou que a aritmética não admite nenhuma axiomatização que satisfaça aos três requisitos de Hilbert.

Ele mostrou que, dada uma axiomatização (mecanicamente reconhecível como tal) da aritmética, é possível criar (mecanicamente!) um enunciado da aritmética que não é demonstrável nem refutável a partir desses axiomas. Sua demonstração usa uma codificação engenhosa de conceitos metamatemáticos.

Mostrou também como codificar a ideia de consistência de uma axiomatização e mostrou que, se a axiomatização de parte da aritmética for forte o suficiente para expressar certas ideias metamatemáticas, pode expressar também a ideia de consistência. Com isto, mostrou que se tal axiomatização for forte o suficiente para se demonstrar a sua própria consistência, então tal axiomatização já é inconsistente.