Capítulo 1

Introdução Histórica

A Teoria dos Conjuntos nasceu na segunda metade do século XIX com a tentativa de incorporar na matemática o *infinito* como objeto acabado. Hoje em dia, já estamos acostumados a falar de conjunto dos números reais, de espaço de funções, e diversos outros conceitos que envolvem essa ideia. Seu começo como teoria foi muito turbulento e cheio de *inconsistências*, que foram sendo sanadas paulatinamente por diversos matemáticos.

Vamos apresentar sucintamente aqui um pouco dessa história, começando com os fundadores da teoria: os matemáticos alemães Georg Cantor e Richard Dedekind. Esses matemáticos tentaram iniciar uma fundamentação da teoria, mas não começaram do nada. Havia trabalhos de de outros matemáticos que tocavam nessa problemática: tratar de coleções de números reais em conexão com o problema de convergência de *séries de Fourier*.

Recomendamos a obra *Georg Cantor - His Mathematics and Philosophy of the Infinite* [1] escrita por Joseph Warren Dauben, em especial o seu Capítulo 1, em que são apresentados maiores detalhes do que expomos aqui sobre Cantor, seus precursores e contemporâneos. Recomendamos também os artigos de Akihiro Kanamori:

1. *The Mathematical Development of Set Theory from Cantor to Cohen*, The Bulletin of Symbolic Logic, Vol. 2 (1996), No. 1, pp. 1-71. Um artigo que detalha o desenvolvimento da Teoria dos Conjuntos desde George Cantor (década de 1870 em diante) até Paul Cohen (1963).

[1] Princeton University Press, Princeton, NJ, EUA, 1979.

2. *Zermello and Set Theory*, The Bulletin of Symbolic Logic, Vol. 10 (2004), No. 4, pp. 487-553. Detalha a contribuição de Ernst Zermello, o primeiro a axiomatizar a Teoria dos Conjuntos e a ressaltar o papel do Axioma da Escolha na Matemática.

3. *Gödel and Set Theory*, The Bulletin of Symbolic Logic, Vol. 13 (2007), No. 2, pp. 153-188. Fala da contribuição de Kurt Gödel à Teoria dos Conjuntos, com sua fixação da imortância da chamada *Lógica de Primeira Ordem.* Demonstrou que, se a teoria de Zermello e Fraenkel (na verdade outra axiomatização) for consistente (ou seja, não contraditória), então a adição do axioma da escolha e da Hipótese (Generalizada) do Contínuo não trará inconsistência.

4. *Bernays and Set Theory*, The Bulletin of Symbolic Logic, Vol. 15 (2009), No. 1, pp. 43-69. Trata da contribuição de Paul Bernays e sua formulação da teoria de classes e o uso de lógica de ordem superior.

5. *Cohen and Set Theory*, The Bulletin of Symbolic Logic, Vol. 14 (2008), No. 3, pp. 351-378. Trata de Paul Cohen, o descobridor do método do *Forcing*, demonstrando que nem a hipótese do Contínuo, nem o Axioma da Escolha podem ser demonstrados ou refutados na Teoria de Zermello e Fraenkel, ZF.

Uma boa coleção de artigos traduzidos em inglês, contendo vários daqueles originários da Teoria dos Conjuntos é a obra

- *From Frege to Gödel - A sourcebook in Mathematical Logic 1879-1931*, editado por J. van Heijenoort, Cambridge, Mass., 1967.

1.1 Precursores: Dirichlet, Riemann, Lipschitz e Hankel

No primeiro quarto do século XIX, Joseph Fourier (1768-1830) desenvolveu vários trabalhos [2] sobre a propagação do calor e descobriu que podia repre-

[2] Podemos citar seu livro *La théorie analytique de la chaleur*, publicado em Paris em 1822, em que compila vários de seus resultados.

sentar *todas* [3] as funções $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ como séries trigonométricas,

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \mathrm{sen}\,(nx)),$$

com as fórmulas para os coeficientes

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, dx,$$

e, para $n \geq 1$,

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx)\, dx,$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \mathrm{sen}\,(nx)\, dx,$$

chegando a *demonstrar*, muitas vezes usando intuição física, que a série convergia para a função, em cada x. Essas séries ganharam o nome de séries de Fourier.

Gustav Peter Lejeune Dirichlet (1805-1859), não satisfeito com a falta de rigor na apresentação dessas séries por Fourier e outros (incluindo tentativas frustradas de Cauchy), sentiu a necessidade de reformular a noção de função e de aprofundar o estudo da convergência de séries. Ele publicou em 1829 um artigo [4] em que tratava do problema da convergência dessas séries. Em particular, distinguiu dois tipos de séries (numéricas) convergentes: as *absolutamente convergentes*, ou seja, as séries $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$, tais que a série dos valores absolutos $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$ convergisse, e as séries *condicionalmente convergentes*, ou seja, as séries $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$, tais que a série dos valores absolutos $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$divergisse (por exemplo, $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n/(n+1)$). Seu famoso teorema de convergência de séries de Fourier (depois generalizado por outros) reduzia o problema da convergência da série de Fourier de uma função f para ao da convergência da seqüência de integrais

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\mathrm{sen}\,(nx)}{\mathrm{sen}\, x} f(x)\, dx$$

[3] Naquela época, só se consideravam funções que pudessem ser descritas explicitamente.

[4] "Sur la convergence des séries qui servent à représenter une foction arbitraire entre des limites données," *Journal für die reine und angewandte Mathematik 4*, 157-169.

em que permitia que as funções fossem descontínuas em uma quantidade finita de pontos, mas requeria que, dados $a < b$, $-\pi < a < b < \pi$, existissem r, s, tais que $a < r < s < b$ e a função fosse contínua no intervalo entre r e s. Além de suas contribuições à teoria das séries de Fourier, contribuiu com a definição de função como sendo *qualquer correspondência entre domínios dados.*

Bernhard Riemann (1826-1886), em seu *Habilitationschrift*[5] de 1854, continuou o estudo de Dirichlet sobre o problema de representação de funções por séries trigonométricas, definindo nesse trabalho o que ele entendia pelo símbolo $\int f(x)\,dx$, hoje estudado como a *integral de Riemman*, e também tratou do problema da convergência dessas séries e também o problema da unicidade de tal representação.

Dirichlet já havia estendido a questão de convergência de séries de Fourier às funções com uma quantidade finita de descontinuidades, e Riemann pretendia estender tais resultados, se não para todas as funções descontínus, pelo menos estender para alguma classe de funções com uma infinidade de descontinuidades. Para isso, teve que estender a noção de integral para poder integrar tais funções. Cauchy já havia definido em 1823 a integral de uma função contínua como *limite* de somas do tipo

$$\int_{x_0}^{x} f(t)\,dt = (\lim)(x_1 - x_0)f(x_0) + (x_2 - x_1)f(x_1) + \ldots + (x_{n-1} - x_n)f(x_{n-1}),$$

mas Riemann considerou somas do tipo $S = (x_1 - x_0)f(\bar{x}_0) + (x_2 - x_1)f(\bar{x}_1) + \ldots + (x_{n-1} - x_n)f(\bar{x}_{n-1})$, em que $\bar{x}_i$ poderia ser qualquer número entre x_i e x_{i+1}. Para que essas somas convergissem para um número, chegou ao conhecido critério de integrabilidade, que hoje anunciamos como: f é integrável no intervalo $[a, b]$ se, e somente se, o conjunto de descontinuidades de f tem medida nula. Com isso, pode generalizar os resultados de Dirichlet para funções com uma infinidade de pontos de descontinuidade e aprsentando uma infinidade de máximos locais.

O problema da unicidade da representação de uma função por séries

[5]Corresponde ao que hoje seria uma tese de doutorado, e era intitulada "Ueber die Darstellungbarkeit einer Function durch eine trigonometrische Reihe", publicado em *Abhandlungen der mathematischen Classe der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen 13* (1867), 87-131.

trigonométricas pode ser reduzido a perguntar se a série

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos(nx) + b_n \text{sen}\,(nx))$$

convergir para a função nula, então seus coeficientes serão todos nulos?

Esse problema, junto com o de definir o que é uma função, foi estudado também por outros grandes nomes da época, devendo-se salientar os nomes de Rudolph Otto Sigismund Lipschitz (1832-1904), um continuador da obra de Dirichlet (não tinha tido conhecimento da obra de Riemann, que só foi publicada em 1867), resolveu diversos problemas deixados por ele, em artigo [6] publicado em 1864, introduzindo aí os conceitos do que hoje chamamos de conjuntos densos e conjuntos raros. També citamos Hermann H. Hankel (1839-1973), que em 1870 apresentou sua monografia de conclusão de curso [7] em que sua preocupação principal era o de determinar o conceito de função em geral.

1.2 Origens: Cantor e Dedekind

A vida de George Cantor (1845-1918) sempre foi cercada de mitos, culpa em parte de historiadores da matemática. Importa-nos saber, apenas, sua contribuição científica. Começou sua carreira científica interessado na teoria dos números, mas logo voltou-se ao estudo do problema da unicidade de representação de funções por séries trigonométricas. Estudou os trabalhos de Hankel, Lipshitz, Riemann e Dirichlet, tentando generalizar cada vez mais seus resultados. Em 1870 publicou um artigo sobre a unicidade da série de Fourier, em que admitiu a possibilidade de um conjunto bem complexo de pontos de descontinuidade: a introduziu a noção de *derivação* de conjuntos, ou seja, se X for um conjunto fechado de números reais, definimos $D_0(X) = X$, e $D_{n+1}(X)$ como sendo o conjunto dos pontos de acumulação do conjunto $D_n(X)$, e provou que se X fosse o conjunto de pontos de descontinuidade de

[6] "De explicatione per series trigonometricas instituenda functionum unius variabilis arbitrarium, et praecipue earum, quae per variabilis spatium finitum valorum maximorum et minimorum numerum habet infinitum, disquisitio," *Journal für die reine und angewandte Mathematik, 63*, 296-308.

[7] Chamada de *Universitätsprogramm* e intitulada *Untersuchungen über die unendlich oft oszillierenden und unstetigen Functionen*

f, tal que para algum número inteiro $n > 0$, $D_n(X)$ fosse vazio, então valia o seu teorema de unicidade.

Continuou nessa linha de raciocínio e propôs continuar essas operações infinitas vezes, chegando ao desenvolvimento dos *ordinais* e *cardinais*, ou o que ele chamava de *números transfinitos*.

Essencialmente, raciocinou que as operações de derivação de conjuntos poderia ser estendida para o infinito, definindo-se $D_\infty(X)$ como sendo o conjunto dos elementos de X que estivessem em todos os $D_n(X)$. Mas daí, poderia começar a derivar mais ainda, obtendo o que ele chamou de $D_{\infty+1}(X)$, $D_{\infty+2}(X)$, etc, e, por que não, $D_{\infty+\infty}$, e assim por diante.

Em dois trabalhos[8] publicados em 1895 e 1897, expôs sua teoria de conjuntos bem-ordenados[9], ordinais[10] e cardinais (inclusive, com a notação ainda usada hoje em dia, representando ordinais por letras gregas minúsculas e cardinais infinitos pela letra hebraica *alef*, $\aleph_\alpha$).

Além dessas contribuições, devemos ressaltar sua demonstração de que o conjunto dos números reais (entre 0 e 1) não poderia ser enumerado como $\{x_n : x \in \mathbb{N}\}$, chegando em sucessivas simplificações ao seu famoso método de diagonalização, que consiste em criar uma nova expansão decimal x a partir da alteração do n-ésimo algarismo da expansão decimal de x_n. Demonstrou, também que o conjunto dos números algébricos (os números complexos que seriam raízes de polinômios de coeficientes inteiros) poderia ser enumerado.

Richard Dedekind (1831-1916) também preocupava-se com o problema da continuidade de domínios desde 1858, quando lecionava o Cálculo Diferencial e Integral em Zurique, na Suíça. Como a noção de *limite* é fundamental nessa disciplina, as ideias entaø prevalentes na época (intuições geométricas) não o satisfaziam. Passou a olhar de perto o conjunto dos números reais, como conjunto de números racionais e irracionais. A aritmética dos racionais não era tão problemática, mas os números irracionais eram de certo modo consid-

[8]Beitrage zur Begrundung der transfiniten Mengenlehre, Parte I, *Mathematische Annalen* 46 (1895), 481-512, e Parte II, *idem*, 49 (1897), 207-246; existe uma tradução para o inglês, *Contributions to the Founding of the Theory of Transfinite Numbers*, Open Court, Chicago, EUA, 1915.

[9]Conjunto linearmente ordenado e tal que cada subconjunto não vazio tem um elemento mínimo nessa ordem.

[10]Cantor considerava ordinal como a abstração de um conjunto ordenado, desconsiderando as particularidades de seus elementos.

erados como dados numericamente. Ele queria então descrever a criação de números irracionais, chegando à sua noção dos chamados *cortes de Dedekind* publicada no panfleto [11] "*Stetigkeit und irrationale Zahlen*" de 1872.

Manteve correspondência com Cantor, cada um expondo ao outro suas descobertas. Foi uma participação fundamental no esclarecimento das ideias de Cantor.

1.2.1 A Hipótese (Generalizada) do Contínuo

No ano de 1874, Cantor publicou o artigo *Sobre uma Propriedade da Totalidade dos Números Algébricos Reais*[12], no qual, além de demonstrar que esse conjunto (de todos os números reais que são raízes de polinômios de coeficientes inteiros) é enumerável, demonstrou o que hoje é conhecido como o *argumento diagonal*: *para cada seqüência de números reais, existe um número real fora dessa seqüência.* Em particular, mostrou que o conjunto dos números reais não é enumerável.

Em 1878 Cantor publicou o artigo *Ein Beitrag zur Mannigfaltigkeitslehre*[13] em que tratou de bijeções entre conjuntos em geral, e conjecturou no final desse artigo (na página 274) que *todo conjunto infinito de números reais ou é enumerável ou tem a potência do contínuo* (isto é, existe uma bijeção entre tal conjunto e o conjunto de todos os números reais). Essa é a famosa **Hipótese do Contínuo**.

Em 1908, Felix Hausdorff publicou o artigo *Fundamentos de uma Teoria dos Conjuntos Ordenados*[14], em que fez um estudo minucioso dos números transfinitos, e enunciu a *Hipótese Generalizada do Contínuo*: se X for um conjunto infinito e Y for o conjunto de todos os subconjuntos de X, então cada subconjunto infinito Z de Y, ou tem a potência de Y, ou tem potência de um subconjunto de X.

[11] Traduzido para o inglês como *Continuity and Irrational Numbers*, e publicado no livro *Contributions to the Theory of Numbers*, Open Court, Chicago, EUA, 1901. Existe reimpressão dessa obra pela editora Dover.

[12] *Über eine Eigneschaft des Inbegriffes aller reeller algebraischen Zahlen*, Journal für die reine und angewandte Mathematik, Vol. 77 (1874), pp. 258-262.

[13] Journal für die reine und angewandte Mathematik, Vol. 84 (1878), pp. 242-258.

[14] *Grundzüge einer Theorie der geordneten Mengen*, Mathematische Annallen, Vol. 65 (1908), pp. 435-505

1.2.2 O Paradoxo de Burali-Forti

Cesare Burali-Forti publicou em 1897 o artigo [15] *Uma questão sobre os números transfinitos*, em que apontou um paradoxo na teoria de Cantor.

Na época, Cantor considerava qualquer coleção (ou agragado) como conjunto que poderia ser manipulado. Burali-Forti considerou então a coleção de todos os ordinais, que, sendo bem ordenada, deveria também ser um ordinal e, portanto, pertencer a essa coleção. Mas, daí, existiriam ordinais maiores que ele na coleção, e portanto a coleção inteira seria menor que si mesma!

Concluiu (erroneamente) disso que a coleção dos ordinais seria apenas parcialmente ordenada.

O ponto crucial desse paradoxo, na verdade, seria o problema de considerar a coleção de todos os ordinais como um objeto sujeito às mesmas manipulações que cada um de seus elementos. Esse problema ficou bem mais claro com a contribuição de Frege e Russel.

1.3 Frege e Russell

Gottlob Frege (1848-1925) preocupou-se em criar uma nova linguagem formal para a ciência e filosofia, livre das imprecisões e ambiguidades da linguagem natural (em particular, do alemão, sua língua). Com isso, criou uma linguagem artificial, que nomeou de *conceitografia* [16], chegando ao sistema exposto em seus *Fundamentos da Aritmética* [17], em que expõe suas regras de dedução, e principalemnte, regras de tratamento de conjuntos. Essa obra que inspirou Bertrand Russell (1872-1970) a desenvolver sua teoria de tipos, depois de encontrar o seu famoso paradoxo.

[15] "Una questione sui numeri transfiniti", *Rendiconti del circolo matematico di Palermo*, 11 (1897), 154-164.

[16] Iniciou com a obra *Begriffscrhift*, de 1879, traduzida na coletânea de Jean van Heijenoort, *From Frege to Gödel. A Source Book in Mathematical Logic, 1879-1931*, Harvard University Press, Cambridge, Massachusetts, EUA, 1967.

[17] *Grundgesetze der Arithmetik, begriffschriftlich abgeleitet*, Vol. I, 1893.

1.3.1 O Axioma da Extensionalidade

Uma das primeiras regras de seu sistema era identificar um conceito (ou predicado) com sua *extensão*, que é a coleção dos elementos que pertenciam a esse conceito. Assim, postulou que dois conceitos seriam iguais se tiverem a mesma extensão. Na teoria dos conjuntos, ficou conhecido como o axioma da extensionalidade: duas coleções são iguais se tiverem a mesma extensão.

1.3.2 O Axioma da Coleção

Mas, Frege foi além. Postulou que qualquer conceito poderia fazer parte da extensão de outro conceito: uma coleção como elemento. Postulou (em outras palavras) que

> dado um predicado $A(x)$, existe um elemento Y, que é a extensão de $A(x)$.

1.3.3 O Paradoxo de Russell

Bertrand Russel percebeu que essa regra era problemática, expondo em uma carta a Frege o que hoje é conhecido como o paradoxo de Russell:

> "Seja w o predicado: *ser um predicado que não pode predicar a si mesmo*. Pode w ser predicado de si mesmo? De cada resposta [sim/não] sua oposta decorre. Portanto, devemos concluir que w não é um predicado. Do mesmo modo não existe uma classe (como totalidade) das classes que, cada uma tomada como totalidade, não pertençam a si mesmas." [18]

Frege reconheceu a dificuldade e tentou consertá-la, sem sucesso. Russel propôs então sua Teoria de Tipos, que não apresentava a possibilidade da formulação desse paradoxo.

[18] Veja essa carta na coletânea de Jean van Heijenoort, *From Frege to Gödel*, cit., p. 125.

1.4 Zermello e o Axioma da Escolha

Ernest Zermello[19] é considerado como o criador da Teoria Axiomática dos Conjuntos e, em particular, o que formulou explicitamente o Axioma da Escolha, usado implicitamente por muitos matemáticos anteriormente.

No artigo *Untersuchungen über die Grundlagen der Mengenlehre I*[20] de 1908 ele propôs a primeira axiomatização da Teoria dos conjuntos, que, com a adição de mais um axioma devido a Fraenkel, tornou-se a atual teoria chamada de ZF, em honra a esses dois grandes formuladores.

1.5 Hausdorff e o conceito de função

No artigo *Fundamentos de uma Teoria dos Conjuntos Ordenados*[21], já citado, Felix Hausdorff também definiu o conceito de uma função f como sendo o conjunto dos pares ordenados $(x, f(x))$ (que define o seu gráfico), e em seu livro *Fundamentos da Teoria dos Conjuntos*[22] estabeleceu a correspondência entre cada conjunto e sua função característica.

Nesse artigo também levantou a hipótese dos chamados *grandes cardinais*, (veja sobre este conceito mais adiante no capítulo 5).

[19]Veja o artigo de Akihiro Kanamori, *Zermello and Set Theoty* (1871-1953), The Bulletin of Symbolic Logic, Vol. 10 (2004), No. 4, pp. 487-553.

[20]Publicado no *Mathematische Annalen*, vol. 65 (1908), pp. 261-281, traduzido em *From Frege to Godel* van Heijenoort, pp. 199-215.

[21]*Grundzüge einer Theorie der geordneten Mengen*, Mathematische Annallen, Vol. 65 (1908), pp. 435-505

[22]***Grundzüge der Mnegenlehre***, deGruiter, 1914. Existe uma reimpressão pela editora Chelsea, N. Iorque, de 1965.

1.6 Fraenkel e Skolem: o Axioma da Substituição

Abraham Fraenkel[23] e, independentemente, Thoralf Skolem[24] decobriram que a teoria de Zermello era insuficiente para demonstrar a existência de um conjunto, a união enumerável

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{P}^n(\mathbb{N}),$$

onde $\mathcal{P}^0(\mathbb{N}) = \mathbb{N}$ e $\mathcal{P}^{n+1}(\mathbb{N}) = \mathcal{P}(\mathcal{P}^n(\mathbb{N}))$, sendo que $\mathcal{P}(X)$ é o conjunto de todos os subconjuntos de X.

Para sanar o problema, propuseram o que hoje se chama de axioma da substituição, que diz que a imagem de um conjunto por uma função também é um conjunto. Veja mais detalhes na seção 3.8, 52.

A axiomatização de Zermello, junto com o novo axioma da substituição é chamada de Teoria de Zermello-Fraenkel, denotada por suas iniciais ZF.

1.7 Axiomatização de von Neumann, Gödel e Bernays

John von Neumann[25] propôs uma axiomatização da Teoria dos Conjuntos, em que tornou explícita a diferença de tratamento das *classes* e conjuntos, que é, entretanto, bastante complicada. Sua formulação foi simplificada pos-

---

[23] *Zu den Grundlagen der Cantor-Zermelloschen Mengenlehre*, Math. Annalen Vol. 86 (1922), 230-237.

[24] *Einige Bemmerkungen zur axiomatischen Begrüdung der Mengenlehre*, Wiss. Vorträge gehalten auf dem 5. Kongress der skandinav Mathematik in Helsingfors 1922, publicado em 1923. Traduzido para o inglês em *From Frege to Gödel* de J. van Heijenoort, pp. 290-301.

[25] *Ein Axiomatisierung der Mengenlehre*, Journal für die reine und angewandte Mathematik, Vol. 154 (datado 1924, mas publicado em 1925), pp. 219-240, e Correção no mesmo jornal, Vol. 155 (1926), p. 128.

teriormente por Kurt Gödel[26] e por Paul Bernays[27].

Esse sistema de axiomas leva o nome desses três matemáticos, e chamado de forma abreviada pelas iniciais NGB.

1.7.1 O Axioma da Regularidade

A antinomia (ou paradoxo) de Russell depende, de certo modo, da possibilidade de um conjunto pertencer a si mesmo. Isto, em si, não gera paradoxo, mas um meio de prevenir o surgimento dessa antinomia seria impedir que conjuntos pertencessem a si mesmos.

Daí, matemáticos como Dimitri Mirimanoff[28], e, mais enfaticamente, John von Neumann, introduziram um axioma, chamado de Axioma da Regularidade ou, também, de Axioma da Fundação[29].

Esse axioma não tem aplicação imediata em outras áreas da matemática (pois todos os conjuntos que lá aparecem já tem essa propriedade), mas tem tido um papel importante na Teoria dos Conjuntos.

---

[26] Em seus trabalhos de 1938 e 1939 sobre a consistência da Hipótese Generalizada do Contínuo e do Axioma da Escolha. Esses trabalhos são expostos em seu livro de 66 páginas ***The Consistency of the Axiom of Choice and of the Generalized Continuum Hypothesis***, *Annals of Mathematical Studies 3*, Princeton University Press, Princeton, NJ, 1940.

[27] Numa série de sete artigos publicados no *The Journal of Symbolic Logic* (ou *JSL*), intitulados *A System of Axiomatic Set Theory I-VII*, *I*: *JSL* Vol. 2 (1937), 65-77; *II*: *JSL* Vol. 6 (1941), 1-17; *III*: *JSL* Vol. 7 (1942), 65-89; *IV*: *JSL* Vol. 7(1942), 133-145; *V*: *JSL* Vol. 8 (1943), 89-106; *VI*: *JSL* Vol. 13 (1948), 65-79; *VII*: *JSL* Vol. 19 (1954), 81-96.

[28] *Les Antinomies de Russel et de Burali-Forti et le Probléme Fondamental de la Théorie des Ensembles*, L'Enseignement Mathématique, Vol. 19 (1917), pp. 37-52.

[29] Esse axioma implica que toda cadeia decrescente de conjuntos, com a ordem dada pela relação de pertinência, tem que ser finita, ou seja, atinge a fundação da torre $X_1 \ni X_2 \ni \ldots \ni X_n$

1.8 Morse e Kelley

John Kelley, no apêndice de seu livro de topologia[30], publicou uma Teoria dos Conjuntos, baseada na teoria (impredicativa[31]) de A. Morse, que é útil para tratar de conjuntos e classes no mesmo contexto.

Essa teoria é chamada de Teoria de Kelley-Morse, ou simplesmente de KM.

1.9 Cohen: *Forcing*

Em 1963, Paul Cohen publicou sua demonstração de que a Hiótese do Contínuo e o Axioma da Escolha são *independentes* da teoria ZF, criando o método conhecido como *forcing*, palavra que foi incorporada aos textos sem ser traduzida.

Ele demonstrou como reduzir explicitamente uma possível dedução de uma contradição a partir de ZF, mais a negação da Hipótese do Contínuo, a uma dedução de contradição a partir de ZF apenas. O mesmo foi feito com a negação do Axioma da Escolha. Junto com o trabalho de Gödel, fechou o problema proposto por Hilbert em 1900.

Por esse trabalho, Paul Cohen ganhou a *Medalha Fields* em 1966, um dos mais prestigiosos prêmios que um jovem matemático pode receber.

---

[30] ***General Topology***, Van Nostrand, Princeton, NJ, 1955. Reimpressão pela Springer-Verlag, na série Graduate Texts in Mathematics, vol 27, sem data; apêndice, pp. 251-281.

[31] A noção de predicatividade tem sido discutida desde Henri Poincaré, não tendo ainda um consenso sobre o que seja. Mas, em Teoria dos Conjuntos, uma teoria impredicativa pressupõe a existência da totalidade dos conjunto e das classes de conjuntos.