Capítulo 2

Preliminares Lógicos

A Matemática, como em geral toda a ciência, é uma disciplina discursiva. Tanto a resolução de problemas, quanto a apresentação de suas proposições mais abstratas, são apresentados como um texto discorrendo sobre os passos da solução do problema ou argumentando acerca da validade de uma proposição.

A Teoria dos Conjuntos, assunto principal deste texto, como parte da Matemática, também é apresentada desse modo. Desta forma, faz-se necessário comentarmos acerca das *regras* desse discurso, sem pretensão de um estudo aprofundado das mesmas.

2.1 Linguagem Formal e Metalinguagem

Alfred Tarski (1901-1983), foi um lógico polonês que estudou o problema de se definir o que seria a *verdade* em um discurso, em particular, o discurso científico.

Essencialmente, dividiu seu contexto em duas linguagens, uma formalizada (ou *linguagem objeto*), para a qual se deseja definitr verdade e, portanto, não pode conter nenhuma noção interna de verdade, e uma linguagem mais expressiva, chamada de metalinguagem, com os seguintes requisitos:

1. ela deve conter a linguagem objeto;
2. deve interpretar os símbolos lógicos da linguagem objeto;

3. deve conter um mínimo necessário de Teoria dos Conjuntos.

Reduziu o problema de definição de verdade para a linguagem objeto à noção de *satisfação*, que relaciona a linguagem objeto com a linguagem da teoria dos conjuntos.

Como a Teoria dos Conjuntos é fundamental para a definição da verdade, para evitar circularidade de argumentação, não definiremos verdade para a teoria, mas apenas o que significa dedução formal e informal, preocupados apenas com a *validade* das argumentações.

Mas, mesmo tendo essa forte restrição, ainda faremos uso dessa dualidade linguagem objeto (a linguagem formal da teoria dos conjuntos) e a metalinguagem (no nosso caso, a língua portuguesa, mais alguns símbolos para representar ideias matemáticas).

As linguagens formais adotadas neste texto serão basicamente três: a linguagem da Teoria de Zermelo e Fraenkel (abreviada $\mathscr{L}_{\mathrm{ZF}}$), a linguagem de Gödel, Bernays e von Neumann (abreviada $\mathscr{L}_{GBN}$) e a linguagem de Kelley e Morse (abreviada $\mathscr{L}_{\mathrm{KM}}$).

2.1.1 O Paradoxo de Richard

Antes de prosseguirmos, devido ao fato de não termos especificado precisamente ainda nossas regras metalinguísticas, falemos sobre o Paradoxo de Richard [1], que não é considerado um problema matemático, mas linguístico.

Como apenas especificamos que nossa metalinguagem será o português, esse paradoxo serve como advertência para que tomemos cuidado com o que dissermos.

2.1.2 A Linguagem de ZF

A Linguagem de ZF é o que se chamaria hoje de típica linguagem de primeira ordem.

[1] Carta de Jules Richard, publicada em 1905, traduzida para o inglês na coletânea de Jean van Heijenoort, *From Frege to Gödel. A Source Book in Mathematical Logic, 1879-1931*

A linguagem contém uma infinidade de símbolos para variáveis x_n, $n \in \mathbb{N}$, um símbolo relacional binário $\in$ (pertinência) e os símbolos lógicos usuais (a conjunção $\wedge$, "*e*"; a disjunção $\vee$ – também chamada de "*ou não exclusivo*"; a negação $\neg$; a implicação $\rightarrow$; a igualdade $=$; o quantificador universal $\forall$, "*para todo*"; o quantificador existencial $\exists$, "*existe*").

Se x e y forem variáveis (não necessariamente distintas), então $x = y$ e $x \in y$ são fórmulas, cujas variáveis livres são x e y. Essas são chamadas de fórmulas atômicas. As variáveis x e y são chamadas de variáveis livres nestas fórmulas.

Fórmulas mais complexas são obtidas pela inclusão dos símbolos lógicos: se ϕ e ψ forem fórmulas, então $\phi \wedge \psi$, $\phi \vee \psi$ e $\phi \rightarrow \psi$ são fórmulas e uma variável será considerada livre em alguma delas se ela ocorrer como variável livre em pelo menos uma das fórmulas ϕ ou ψ; se ϕ for fórmula, então $\neg\phi$ será fórmula, com as mesmas variáveis livres que ϕ; se ϕ for fórmula e x uma variável qualquer, então $\exists x\, \phi$ e $\forall x\, \phi$ serão fórmulas contendo as mesmas variáveis livres que ϕ, com a exceção da variável x. Para evitar complicações posteriores, permitimos a possibilidade não intuitiva de que a variável x não seja livre, ou nem ocorra na fórmula ϕ.

2.1.3 A Linguagem de GBN

Esta linguagem é basicamente a mesma que a de ZF, mas com dois tipos de símbolos de variáveis, X_i e x_i, i um número natural. As variáveis indicadas por letras maiúsculas são as variáveis para *classes* e as minúsculas as de *conjuntos*.

As fórmulas atômicas são $x = y$, $X = Y$, $x \in y$, $x, \in X$. As demais fórmulas são definidas de modo análogo.

2.1.4 A Linguagem de KM

Apesar de ser visualmente mais intuitiva, a linguagem do sistema de Kelley e Morse é um pouco mais complicada para definir.

A linguagem contém uma infinidade de símbolos para variáveis x_n, $n \in \mathbb{N}$, uma símbolo mais complexo $\{\cdot : \cdot\}$ chamado de construtor de termos, um símbolo relacional binário $\in$ (pertinência) e os símbolos lógicos usuais ($\wedge$, $\vee$, $\neg$, $\rightarrow$, $=$, $\forall$, $\exists$).

Se x e y forem variáveis (não necessariamente distintas), então $x = y$ e $x \in y$ são fórmulas, cujas variáveis livres são x e y.

Se $\psi(x, y_1, \ldots, y_n)$ for uma fórmula, cujas variáveis livres estiverem entre as variáveis x, y_1, $\ldots$, y_n, ($n \geq 0$ – pode ocorrer a ausência de alguma outra variável livre, além da variável x, mas, para evitar transtornos, exigimos que a variável x realmente ocorra livre em ψ), então $\{x : \psi(x, y_1, \ldots, y_n)\}$ será um **termo**, em que a variável x deixará de ser livre. A intenção é entendê-la como se nomeasse *a classe dos elementos x que satisfazem a fórmula* $\psi(x, y_1, \ldots, y_n)$; aqui a variável x respresenta cada um dos elementos da classe e fica vinculada nessa definição. As outras variáveis, y_1, $\ldots$, y_n continuam sendo livres.

Se y for uma variável e $\{x : \psi\}$ for um termo em que a variável y não ocorra livre, então $y = \{x : \psi\}$ e $x \in \{x : \psi\}$ são fórmulas, cujas variáveis livres são aquelas que ocorrerem livres em ψ, com a exceção da variável x, e também a variável y será considerada livre nessas fórmulas. Essa restrição sobre a variável y (ou sobre a fórmula ψ) serve apenas para evitar perigosas circularidades, que poderiam fazer surgir algum dos famosos paradoxos.

Se t_1 e t_2 forem termos, então $t_1 = t_2$ e $t_1 \in t_2$ serão fórmulas.

Novamente, fórmulas mais complexas são obtidas pela inclusão dos símbolos lógicos: se ϕ e ψ forem fórmulas, então $\phi \wedge \psi$, $\phi \vee \psi$ e $\phi \rightarrow \psi$ são fórmulas e uma variável será considerada livre em alguma delas se ela ocorrer como variável livre em pelo menos uma das fórmulas ϕ ou ψ; se ϕ for fórmula, então $\neg\phi$ será fórmula, com as mesmas variáveis livres que ϕ; se ϕ for fórmula e x uma variável qualquer, então $\exists x\, \phi$ e $\forall x\, \phi$ serão fórmulas contendo as mesmas variáveis livres que ϕ, com a exceção da variável x. Para evitar complicações posteriores, permitimos a possibilidade não intuitiva de que a variável x não seja livre, ou nem ocorra na fórmula ϕ.

Essa definição pressupõe que essas fórmulas farão parte de termos, como acima definidos, os quais serão usados para construir fórmulas, etc, num processo iterativo de construção.

2.1.5 Metalinguagem

Formalizar também a metalinguagem é um trabalho hercúleo e, a essa altura, improdutivo. Como já dissemos acima, a metalinguagem será o português, com suas regras gramaticais, enriquecida com alguns símbolos matemáticos (por exemplo $\varnothing$, $\aleph$, $\cup$, $\cap$, etc), que serão introduzidos durante o desenvolvimento do texto.

Usaremos letras romanas e gregas, com ou sem subíndices, para denotarmos variáveis, que nomearão elementos da linguagem objeto (fórmula ϕ, variável x, etc), ou mesmo alguns elementos metalinguísticos (por exemplo, Γ, representando uma lista de hipóteses de uma proposição). Observe que uma variá vel tem a função gramatical de um pronome.

Quanto à palavras correspondentes aos símbolos lógicos, a única ressalva que faremos é o uso da palavra "*ou*", que será usada em seu sentido não exclusivo, contrário ao seu uso mais comum na linguagem não científica. Assim, se A e B forem frases [2], então A *ou* B é a frase declarando A *ou* B, *ou ambas* [3].

2.2 Dedução informal

Passemos, agora, às regras do discurso dedutivo informal (na metalinguagem) e sua correspondente formalização (na linguagem objeto). Uma dedução, seja informal (ou seja, na metalinguagem e em português), seja formal (na linguagem objeto) é um discurso (uma seqüência de frases) sujeito a regras específicas para a sua construção. Em geral, os que estudam matemática tem que aprender a entender e a escrever tais discursos por experiência, mas desde Aristóteles, foram escritos tratados em que se tentam explicitar tais regras. Mas existe uma distância grande entre a dificuldade de se ler um discurso matemático e descobrir o discurso que resolverá o problema desejado. Pode-se demonstrar que, formalizando a escrita e escrevendo algoritmos, estes rodam rapidamente se forem verificar se um texto respeita aquelas regras, mas a

[2] Veja um usos de letras como variáveis metalinguísticas, representando elementos metalinguísticos!

[3] Bom, acabamos de usar a palavra "*ou*" em seu sentido exclusivo, mas apenas para ilustrar seu uso não exclusivo.

busca de um texto que resolva a questão proposta pode até ser impossível. (Veja mais adiante o Teorema de Incompletude de Gödel).

Vamos, então discorrer sobre as regras do discurso informal e, concomitantemente, introduzir as regras do discurso formal, que deverão refletir o melhor possível as regras informais.

Primeiramente, observemos que toda teoria matemática é formada por uma lista de frases declarando as hipóteses (ou pressuposições – asserções tomadas *a priori*), que descrevem o contexto em que estejamos trabalhando. Assim, temos os postulados da geometria, do cálculo, da álgebra linear, etc.

O discurso matemático dispõe-se a obter novas asserções a partir dessas, segundo regras bem determinadas. Assim, podemos definir uma dedução como sendo uma lista (finita!) ordenada de frases, em que podemos citar alguma hipótese, talvez alguma *regra lógica* (seja lá o que isso seja!), e aplicar alguma regra que permite transformar asserções anteriores numa nova asserção.

Denotaremos $\Gamma \vdash \phi$ a asserção (metalinguística) de que podemos deduzir formalmente a fórmula ϕ usando a lista de fórmulas Γ como hipóteses. Uma *representação gráfica* de uma dedução é uma lista ordenada $\Gamma_1 : A_1, \ldots,$ $\Gamma_n : A_n$, em que $A_1, \ldots, A_n$ são frases (linguagem objeto) e cada Γ_j é uma lista de frases (que farão o papel de hipóteses, e podem, inclusive, não conter nenhuma frase – uma lista vazia), sujeita às regras a seguir descritas.

Regra 0. Podemos simplesmente declarar uma hipótese: "*suponhamos que A*". Formalmente, permitiremos, naquela lista ordenada, que algum de seus elementos seja $\Gamma : A$, sendo que A ocorra como uma frase da lista Γ.

Observemos que em uma frase podemos declarar uma grande lista de hipóteses implícitas. Por exemplo, quando declaramos uma hipótese do tipo "*seja E um espaço vetorial real*", estamos carregando com ela todas as frases que definem o conceito de espaço vetorial real, frases estas que podem ser consideradas como pertencentes à lista de hipóteses representada pela letra grega Γ.

Vamos tratar dessas regras.

2.2.1 Parte Proposicional

Tratemos primeiramente da parte *proposicional* da linguagem. Isso corresponde às palavra *e*, *ou*, *não* e a implicação *se ..., então ...*, que, na gramática da língua portuguesa são chamadas de conjunções (que conectam frases), embora a palavra *não* seja um advérbio.

Observamos que a implicação pode ser escrita de diversas maneiras distintas em português. Nas frases abaixo, indique o que é premissa e o que é conclusão da implicação:

1. se A, então B;
2. A implica B;
3. B, sempre que A (sempre que A ocorre, então B também deve ocorrer);
4. B, se A;
5. A, somente se B (se B não ocorre, então A não pode ocorrer);
6. A e, portanto, B;
7. A é condição suficiente para B (supondo a implicação verdadeira, basta que A seja verdadeira para que possamos concluir que B é verdadeira);
8. B é condição necessária para A (supondo a implicação verdadeira, se B for verdadeira, A tem que necessariamente ser verdadeira).

Passemos às *regras de inferência*, ou seja, às regras do discurso discursivo, que determinam as frases que podem ser declaradas (ou asseridas) e como podem ser declaradas em cada parte do texto dedutivo.

Regra 1. Da asserção prévia de uma frase do tipo "*A e B*", podemos declarar (ou, se preferir, *asserir*) a frase "A". Podemos também asserir a frase "B". Graficamente, podemos representá-las pelos diagramas

$$\frac{\Gamma : A \wedge B}{\Gamma : A}, \quad \frac{\Gamma : A \wedge B}{\Gamma : B},$$

entendendo-se que o que aparece acima da linha horizontal seja(m) frase(s) que tenha(m) aparecido antes, no texto, e o que aparece abaixo da linha é a nova frase que poderemos acrescentar ao texto naquele ponto.

Regra 2. Podemos também juntar duas frases asseridas separadamente: se já foram asseridas as frases "A"e a frase "B", então poderemos asserir a frase "A *e* B". Graficamente

$$\frac{\Gamma_1 : A \qquad \Gamma_2 : B}{\Gamma_1, \Gamma_2 : A \wedge B},$$

entendendo que as frases escritas acima da linha horizontal já tenham sido declaradas anteriormente e a frase abaixo da linha poderá ser declarada neste ponto do discurso.

Regra 3. De uma asserção "A", podemos declarar "A *ou* B"e também podemos declarar "B *ou* A":

$$\frac{\Gamma : A}{\Gamma : A \vee B}, \quad \frac{\Gamma : A}{\Gamma : B \vee A},$$

Regra 4. Uma regra que envolve tanto a palavra "*ou*"quanto a implicação é a que, se já tivermos declarado as frases "*se A, então C*"e "*se B, então C*", poderemos declarar "*se A ou B, então C*":

$$\frac{\Gamma_1 : A \to C \qquad \Gamma_2 : B \to C}{\Gamma_1, \Gamma_2 : (A \vee B) \to C},$$

sendo que Γ_1 e Γ_2 representam duas listas de hipóteses e Γ_1, Γ_2 a lista obtida juntando-se aquelas.

Para a implicação, temos três regras.

Regra 5. De uma asserção "B", podemos asserir "*se A, então B*". A ideia atrás dessa regra é que se aceitarmos a conclusão da implicação, deveremos aceitar também a implicação:

$$\frac{\Gamma : B}{\Gamma : A \to B}.$$

Regra 6. Se já declaramos que "*se A, então B*"e que "*se B, então C*", poderemos declarar também que "*se A, então C*". Ou seja, a implicação é *transitiva*:

$$\frac{\Gamma : A \to B \qquad \Delta : B \to C}{\Gamma, \Delta : A \to C}.$$

Esta regra também é conhecida como *regra do corte* (podemos cortar a frase intermediária B). Na parte de cima da linha horizontal temos duas frases que devem ter ocorrido anteriormente no texto, e abaixo da linha a frase que podemos acrescenter ao texto naquele ponto.

Regra 7. Se já asserimos "A"e "*se* A*, então* B", poderemos asserir também "B". Essa é a famosa regra do *modus ponens* ou do destacamento, que permite destacar a conclusão de uma implicação se aceitarmos ela e sua hipótese:

$$\frac{\Gamma : A \qquad \Delta : A \to B}{\Gamma, \Delta : B}.$$

Passemos a tratar da negação.

Regra 8. Essa é a regra da *redução ao absurdo*, e diz que se já tivermos declarado as frases "*se não* A*, então* B"e também "*se não* A*, então não* B", então podemos declarar "A", ou seja, se da hipótese negando A conseguirmos obter as duas implicações com conclusões contraditórias, podemos declarar a frase A:

$$\frac{\Gamma : \neg A \to B \quad \Delta : \neg A \to \neg B}{\Gamma, \Delta : A}.$$

Regra 9. Essa regra é a da *trivialização*, que diz que de duas frases contraditórias poderemos concluir qualquer coisa:

$$\frac{\Gamma : A \qquad \Delta : \neg A}{\Gamma, \Delta : B},$$

sendo que a frase B pode ser qualquer coisa (aceitável ou não).

Regra 10. Essa regra caracteriza uma dualidade entre o "*e*"e o "*ou*" por meio da negação:

$$\frac{\neg(A \vee B)}{(\neg A) \wedge (\neg B)} \qquad \frac{(\neg A) \wedge (\neg B)}{\neg(A \vee B)};$$

$$\frac{\Gamma : \neg(A \wedge B)}{\Gamma : (\neg A) \vee (\neg B)} \qquad \frac{\Gamma : (\neg A) \vee (\neg B)}{\Gamma : \neg(A \wedge B)}.$$

2.2.2 Quantificação

Vamos tratar agora da parte mais sensível da noção de dedução: a quantificação. Quantificação refere-se a asserir acerca de quantidade de elementos que devam satisfazer certa asserção. trataremos aqui apenas de dois tipos de quantificação:

1. **quantificação existencial:** essas são asserções do tipo *existe (pelo menos um elemento) x que satisfaz a asserção $A(x)$*;

2. **quantificação universal:** essas são asserções do tipo *para todos os elementos x, a asserção $A(x)$ é satisfeita (ou declarada)*; essas asserções podem ser escritas de outras maneiras: *para todo elemento x, a asserção $A(x)$ é satisfeita (ou declarada)*; *para cada elemento x, a asserção $A(x)$ é satisfeita (ou declarada)*; essas diferentes frases serão consideradas como tendo o mesmo sentido.

Para as regras a seguir, precisamos definir corretamente o que significa substituir uma variável x que ocorra na asserção $A(x)$ por um termo t, denotada $A(t)$: a substituição será legítima se o termo t não contiver em si nenhuma variável y que fique quantificada se forçarmos sua substituição em A. E mais, essa substituição somente poderá ser feita nos lugares em que a veriável x não seja quantificada.

Na linguagem formal $\mathscr{L}_{\mathrm{ZF}}$, os únicos termos são as variáveis e definimos $A(t)$ da seguinte maneira, por *recursão*:

1. se $A(x)$ for uma fórmula $x = z$ ou $x \in z$, então $A(t)$ é $t = z$ ou $t \in Z$, respectivamente;

2. $(A \circ B)(t)$ é $A(t) \circ B(t)$, sendo que $\circ$ representa cada um dos símbolos $\wedge$, $\vee$ ou $\rightarrow$;

3. $(\neg A)(t)$ é $\neg(A(t))$;

4. $(\mathsf{Q}y\, A)(t)$ é $\mathsf{Q}y\,(A(t))$ se y não for a variável x e nem a variável t;

5. $(\mathsf{Q}y\, A)(t)$ é $\mathsf{Q}y\,(A)$ (sem nenhuma substituição) se y for a variável x, ou a variável t.

Para $\mathscr{L}_{GBN}$ e para $\mathscr{L}_{\mathrm{KM}}$ a definição é análoga.

Regra 11. Sendo já declarada a frase "*para cada x $A(x)$*", sendo t um *termo*, poderemos declarar "$A(t)$". Se vale para cada elemento uma asserção A, então vale em particular para t:

$$\frac{\Gamma : \forall x\, A(x)}{\Gamma : A(t)}.$$

A recíproca dessa regra é:

REGRA 12. Se a frase "$A(x)$"(envolvendo, ou não, a variável x) já tviver sido asserida, e não houver nenhuma frase considerada como hipótese que contenha a variável x como livre (hipótese acerca de algum objeto nomeado pela variável x), então podemos asserir "*para cada* x $A(x)$". É a chamada *regra da generalização*: "*se asserirmos* $A(x)$ *e, sendo* x *elemento genérico, então poderemos asserir, para cada* x, $A(x)$:

$$\frac{\Gamma : A(x)}{\Gamma : \forall x\, A(x)},$$

sendo que Γ representa a lista de hipóteses.

A quantificação universal também deverá satisfazer as seguintes duas regras.

REGRA 13. Se a frase "*se* A, *então* $B(x)$" for declarada e a variável x indicada não ocorrer livre na asserção A e nem na lista de hipóteses Γ, então poderemos declarar a frase "*se* A, *então, para todo* x, $B(x)$":

$$\frac{\Gamma : A \to B(x)}{\Gamma : A \to \forall x\, B(x)}.$$

REGRA 14. Se já tiverem sido declaradas as frases "*para todo* x, $A(x)$ *implica* $B(x)$" e "*para todo* x $A(x)$", então poderemos declarar a frase "*para todo* x $B(x)$":

$$\frac{\Gamma : \forall x\,(A(x) \to B(x)) \qquad \Delta : \forall x\, A(x)}{\Gamma, \Delta : \forall x\, B(x)}.$$

De certo modo, podemos considerar que a quantificação existencial é *dual* da universal, no sentido em que suas regras são parecidas, mas com algumas inversões. Pensando em seu significado, essa dualidade pode ser expressa da seguinte maneira:

REGRA 15. Da asserção "*para todo* x $A(x)$" podemos inferir "*não vale que existe* x, *tal que não valha* $A(x)$" e vice-versa, ou seja, da segunda asserção podemos inferir a primeira. Também de cada uma das duas asserções"*existe* x $A(x)$" e "*não é válido que para todo* x *não valha* $A(x)$" podemos inferir a outra. Diagramaticamente, essas quatro situaçõespodem ser expressas como:

$$\frac{\Gamma : \forall x\, A(x)}{\Gamma : \neg\exists x\, \neg A(x)} \qquad \frac{\Gamma : \neg\exists x\, \neg A(x)}{\Gamma : \forall x\, A(x)}$$

$$\frac{\Gamma : \exists x\, A(x)}{\Gamma : \neg\forall x\, \neg A(x)} \qquad \frac{\Gamma : \neg\forall x\, \neg A(x)}{\Gamma : \exists x\, A(x)}$$

Essas regras também serão refletidas na dadução formal e delas poderemos obter outras regras derivadas dessas, que mais adiante serão discutidas, inclusive a justificação da seguinte regra, bastante usada, mas de difícil formalização:

Regra para usar Hipóteses Existenciais: podemos trocar uma hipótese "*existe x A(x)*" pela hipótese "*seja x, tal que* $A(x)$", desde que a variável x não ocorra livra na lista de hipóteses Γ (ou seja, não há nenhuma outra hipótese sobre o elemento representado por x).

Veja o Teorema 4, na página 36, em que demonstramos que essa regra é válida no sistema de dedução formal, exposto mais adiante.

2.2.3 Regras puramente metalinguísticas

Algumas regras serão aplicadas apenas na metalinguagem. Isso não significa que elas não possam ocorrer ao nível da linguagem objeto, mas ocorrerão como *regras derivadas*, no sentido que a teoria dos conjuntos pode codificar de certa maneira essas rgras metalinguísticas. No entanto, precisamos explicitá-las, pois serão usadas com freqüência.

Regra Metalinguística da Implicação: para deduzirmos na metalinguagem uma asserção que seja uma implicação "*se A, então B*", sendo A e B duas frases em português, assumiremos como hipótese a frase A e deduziremos com as outras regras a frase B. Ou seja, estamos equiparando na metalinguagem a implicação "*se A, então B*" com a asserção de que podemos deduzir a asserção "B", partindo da premissa "A".

Regra Metalinguística da Contrapositiva: consideraremos também deduzida a implicação "*se A, então B*", caso for deduzida a implicação "*se não B, então não A*".

Regra da Redução ao absurdo: consideraremos também deduzida a implicação "*se A, então B*" caso, partindo da hipótese "*A e não B*", deduzirmos uma contradição "*C e não C*".

2.2.4 O Princípio da Indução Finita

Uma regra muito importante, que será usada em quase todo este texto é o:

PRINCÍPIO DA INDUÇÃO FINITA: Suponhamos que $A(n)$ represente uma asserção que dependa da variável n, cujo significado seja a de ser um número natural $n = 1, 2, 3$, etc. Suponhamos que tenham sido demonstradas as asserções $A(1)$ e "*se* $A(n)$*, então* $A(n+1)$" (o que, pela regra da generalização, podemos dizer que "*para todo número natural* $n \geq 1$*, se* $A(n)$*, então* $A(n+1)$"). Podemos, então declarar que "*para todo número natural* $n \geq 1$*,* $A(n)$".

Veremos mais adiante que essas regras também ocorrem (como regras derivadas) formalmente.

2.3 O método axiomático

David Hilbert propôs um método de dedução formal, em que temos poucas regras de inferência e algumas fórmulas que chamamos de *axiomas*, que codificam em si as regras de dedução formal discutidas anteriormente.

Aqui, uma dedução formal da fórmula A a partir de uma lista de hipóteses Γ é uma lista ordenada de fórmulas $A_1, \ldots, A_n$, em que cada uma das fórmulas A_i satisfaz uma das condições:

1. ou A_i é uma das hipóteses da lista Γ;

2. ou A_i é um dos axiomas a serem listados a seguir;

3. ou A_i foi obtida de duas fórmulas anteriormente listadas A_j e A_k, com $j, k < i$ pela regra do destacamento (*modus ponens*): digamos que A_j seja uma fórmula B e A_k uma fórmula $B \to C$ e a conclusão A_i seja C;

4. ou A_i foi obtida pela regra da generalização de uma variável x em alguma fórmula A_j anteriormente listada, ou seja, A_i será a fórmula $\forall x\, A_j$; para que não haja futuras contradições, imporemos que a variável x não apareça como variável livre em nenhuma das fórmulas de Γ.

Por uma questão de simplicidade técnica, restringimos a ocorrência de variáveis livres nas fórmulas de Γ a uma quantidade finita.

Exercício 1 *Suponha que* $A_1, \ldots, A_n$ *seja uma dedução formal (de* A_n *a partir de uma lista de hipóteses* Γ*). Convença-se de que, para cada* j, $1 \leq j \leq n$, *a lista* $A_1, \ldots, A_j$ *também é uma dedução formal de (*A_j *a partir de uma lista de hipóteses* Γ*).*

A lista de axiomas a seguir é finita *na metalinguagem*, pois, na verdade, listamos uma lista finita de *esquemas de axiomas*. Descreveremos apenas o formato das fórmulas que comporão essa lista. Mais adiante, descreveremos listas de hipóteses Γ dessa forma, sendo uma descrição finitária na metalinguagem, descrevendo esquemas de hipóteses, com possibilidades ilimitadas.

Façamos a lista dos axiomas:

Comecemos com os axiomas proposicionais (os que descrevem as propriedades dos símbolos lógicos proposicionais). Cada um é um esquema de axiomas, sendo que as letras A, B e C que aparecem são variáveis metalinguísticas, que devem ser entendidas como tomando o lugar de qualquer fórmula (um *pronome*!).

1. $A \to (B \to A)$
2. $(A \to (B \to C)) \to ((A \to B) \to (A \to C))$
3. $(\neg A \to B) \to ((\neg A \to \neg B) \to A)$
4. $A \wedge B \to A$
5. $A \wedge B \to B$
6. $(A \to B) \to ((A \to C) \to (A \to (B \wedge C)))$
7. $A \to (A \vee B)$
8. $B \to (A \vee B)$
9. $(A \to C) \to ((B \to C) \to ((A \vee B) \to C))$
10. $\neg(A \wedge B) \to (\neg A \vee \neg B)$

Agora passemos à quantificação. Por uma questão de comodidade técnica, daremos ênfase ao quantificador universal, deixando ao existencial apenas dois axiomas que o relacionam com o primeiro.

11. $(\forall x\, A(x)) \to A(y)$ (para $\mathscr{L}_{\mathrm{ZF}}$, sendo y uma variável) ou $(\forall x\, A(x)) \to (A(x) \wedge (x = t))$, sendo t um $\mathscr{L}_{\mathrm{KM}}$ termo, caso seja essa a linguagem objeto do momento;

12. $\forall x\,(A \to B) \to (\forall x\, A \to \forall x\, B)$

13. $\forall x\,(A \to B) \to (A \to \forall x\, B)$, sendo que a variável x não deve ocorrer livre na fórmula designada por A;

14. $\forall x\, A \to \exists x\, A$

15. $(\neg(\forall x\, A)) \to (\exists x\,(\neg A))$

16. $\forall x\, A \to \neg(\exists x\, \neg A)$.

17. $\forall y\, A(y) \to \forall x\, A(x)$

Para facilitar as deduções futuramente, vamos demonstrar o:

Teorema 1 ***(Teorema da Dedução para o Sistema Axiomático)*** *Suponhamos que* $\Gamma, A \vdash B$. *Então* $\Gamma \vdash (A \to B)$.

Demonstração: Na verdade, deveríamos chamar este enunciado de metateorema, uma vez que faz uma asserção acerca de um conceito metalinguístico: dedução. Mas devemos por um limite ao pedantismo científico.

Essa é uma demonstração *por indução* no comprimento da dedução de B a partir das hipóteses Γ e A.

O Passo Inicial é aquele em que a dedução de B a partir de Γ, A tenha somente uma fórmula (a própria B). Neste caso, as únicas possibilidades são:

a) A fórmula B é um axioma, ou é uma hipótese da lista Γ. Neste caso, temos a seguinte dedução de $A \to B$ (com hipóteses apenas da lista Γ):

1. B – listamos uma hipótese de Γ ou um axioma, conforme o caso;

2. $B \to (A \to B)$ – listamos o axioma 1;

3. $(A \to B)$ – aplicamos a regra do destacamento às duas fórmulas anteriores.

b) A fórmula B é a própria fórmula A; deduzamos a implicação $A \to A$:

1. $A \to ((A \to A) \to A)$ – listamos uma forma do axioma 1;

2. $(A \to ((A \to A) \to A)) \to ((A \to (A \to A)) \to (A \to A))$ – listamos o axioma 2;

3. $(A \to (A \to A)) \to (A \to A)$ – aplicamos o destacamento às duas fórmulas anteriores;

4. $A \to (A \to A)$ – listamos outra forma do axioma 1;

5. $(A \to A)$ – novamente o destacamento aplicado às dus fórmulas anteriores.

Agora passemos ao PASSO DE INDUÇÃO.

Hipótese de Indução: para toda dedução a partir de Γ, A, contendo no máximo n fórmulas, $A_1, \ldots, A_m$ $(m \leq n)$, vale que $\Gamma \vdash (A \to A_m)$.

Tese a ser Demonstrada: para toda dedução a partir de Γ, A, contendo no máximo $n+1$ fórmulas, $A_1, \ldots, A_m$ $(m \leq n+1)$, vale que $\Gamma \vdash (A \to A_m)$.

Na verdade, basta considerar uma dedução $A_1, \ldots, A_{n+1}$.

Agora temos quatro possibilidades, sendo que as duas do passo inicial ainda podem ocorrer e sofrerão o mesmo tratamento dado naquele passo, sendo desnecessária sua repetição. As novidades surgem das possibilidades de que A_{n+1} tenha sido obtida pela regra do destacamento ou da generalização.

Caso a regra aplicada para obter A_{n+1} tenha sido o destacamento, digamos de duas fórmulas anteriores A_j e A_k, com $j, k \leq n$, digamos que uma delas seja $C \to B$ e a outra seja C, então A_j e A_k tem deduções contendo menos de $n+1$ fórmulas e, portanto, podemos usar a hipótese de indução para concluir que $\Gamma \vdash A \to C$ e $\Gamma \vdash A \to (C \to B)$. A seguinte dedução comprova que $\Gamma \vdash A \to B$:

1. "$\Gamma \vdash A \to C$-- listamos essa dedução;

2. "$\Gamma \vdash A \to (C \to B)$" – listamos, a seguir, essa dedução;

3. $(A \to (C \to B)) \to ((A \to C) \to (A \to B))$ – listamos o axioma 2;

4. $((A \to C) \to (A \to B))$ – destacamento de duas fórmulas anteriores;

5. $(A \to B)$ – novamente, destacamento de duas fórmulas anteriores.

Caso a regra aplicada tenha sido a generalização da variável x na fórmula A_j, $j \leq n$, a hipótese de indução nos garante que $\Gamma \vdash (A \to A_j)$. Observemos que a variável x não pode ocorrer livre nem em A e nem em nenhuma fórmula de Γ. A seguinte dedução documenta a demonstração da asserção $\Gamma \vdash A_{n+1}$:

1. "$\Gamma \vdash A \to A_j$-- listamos essa dedução;

2. $\forall x\,(A \to A_j)$ – generalização da variável x (que não ocorre livre em nenhuma fórmula de Γ);

3. $\forall x\,(A \to A_j) \to (A \to \forall x\, A_j)$ – listamos o axioma 13 (lembrando que x não ocorre livre em A);

4. $(A \to \forall x\, A_j)$ – destacamento de duas fórmulas anteriores.

Assim, com o princípio da indução, demonstramos este teorema.$\Box$

Modo de Usar: Para demonstrarmos que $\Gamma \vdash A \to B$, demonstremos que $\Gamma, A \vdash B$, que em geral é mais fácil, e apelamos ao Teorema da Dedução para garantir que também vale a asserção de que $\Gamma \vdash A \to B$.

Teorema 2 *Sejam Γ e Δ duas listas de fórmulas, tais que a quantidade total de variáveis que porventura ocorram livres em suas fórmulas seja finito. Se $\Gamma \vdash A$, então $\Gamma, \Delta \vdash A$.*

Demonstração: A inclusão de novas hipóteses à lista Γ pode tornar ilegítima uma dedução $A_1, \ldots, A_n$ a partir de Γ, caso tenha sido usada a regra de generalização de uma variável que possa ocorrer de forma livre em alguma fórmula de Δ. Por isso chamamos o enunciado acima de *teorema*, palavra que carrega em si a ameaça de dificuldades.

Demonstraremos este teorema por indução na quantidade de fórmulas usadas na dedução, ou seja, demonstraremos por indução em n, que se $\Gamma \vdash A$ com uma dedução com n fórmulas, então $\Gamma, \Delta \vdash A$.

O passo inicial da indução aqui é bem simples: $n = 1$ – uma dedução contendo apenas uma fórmula pode ser apenas a listagem de um axioma ou de uma hipótese de Γ. Assim, acrescentar mais a lista Δ às hipóteses, não cria problemas e a mesma dedução serve em ambos os casos.

Agora fazemos a **Hipótese de Indução:** para toda fórmula A, se $\Gamma \vdash A$, com uma dedução formal contendo uma lista de no máximo n fórmulas, também vale que $\Gamma, \Delta \vdash A$. Queremos demonstrar que essa asserção também vale se trocarmos n por $n + 1$.

Assim, suponhamos que $\Gamma \vdash A$ com a dedução formal $A_1, \ldots, A_{n+1}$.

Se A_{n+1} for axioma ou hipótese de Γ, a dedução de uma fórmula A_{n+1} será uma dedução de A a partir de Γ e também a partir de Γ, Δ.

Se A_{n+1} tenha sido obtida pela regra do destacamento aplicada às fórmulas A_j, A_k, com $j, k < n + 1$, então

1. "$\Gamma, \Delta \vdash A_j$-- listamos essa dedução, que existe, devido à hipótese de indução;
2. "$\Gamma, \Delta \vdash A_j$-- idem;
3. A_{n+1} – regra do destacamento aplicada às duas fórmulas acima,

é dedução de A_{n+1} a partir de Γ, Δ.

Caso a fórmula A_{n+1} tenha sido obtida pela aplicação da regra da generalização da variável x na fórmula A_j, para algum $j < n+1$, então temos que considerar duas posiibilidades: a) x não ocorre livre em nenhuma fórmula de Δ (e certamente em nenhuma fórmula de Γ); b) x ocorre livre em alguma fórmula de Δ (mas certamente em nenhuma fórmula de Γ).

No primeiro caso,

1. "$\Gamma, \Delta \vdash A_j$-- listamos essa dedução, que existe, devido à hipótese de indução;
2. $\forall x\, A_j$ – generalização,

é uma dedução de A_{n+1} a partir de Γ, Δ.

No segundo caso, esse raciocínio não se aplica. Aqui, precisamos mexer em toda a dedução novamente, para trocar a variável x por uma outra variável

y que não ocorra livre nem em Γ e nem em Δ. Examinando a definição de uma dedução formal a partir de Γ apenas, vemos que a variável x somente poderia aparecer em alguma fórmula como variável livre se originasse de algum axioma. Se y for uma nova variável, que não tenha ainda ocorrido em nenhuma fórmula da dedução, basta trocarmos todas as ocorrências de x como variável livre pela variável y, que ainda teríamos uma dedução, não de $A(x)$, mas de $A(y)$ (trocando as ocorrências de x, como livre, por y), a partir de Γ (veja o exercício abaixo). Daí,

1. "$\Gamma, \Delta \vdash A_j(y)$-- listamos essa dedução, que existe, devido à hipótese de indução;
2. $\forall y\, A_j(y)$ – generalização, agora legítima;
3. $\forall y\, A(y) \to \forall x\, A(x)$ – axioma 17;
4. $\forall x\, A_j(x)$,

seria uma dedução de A_{n+1} a partir de Γ, Δ.□

Exercício 2 *Demonstre que, se $A_1(x)$, ..., $A_n(x)$ for uma dedução de $A_n(x)$ a partir de uma lista de hipóteses Γ e y for uma nova variável, que não apareça nem livre e nem quantificada em $A_1(x)$, ..., $A_n(x)$, e também não ocorra livre em Γ, então $A_1(y)$, ..., $A_n(y)$ (substituindo as ocorrências de x como livre, pela variável y) é uma dedução de $A_n(y)$ a partir de Γ. Faça isso por indução em n.*

Uma conseqüência imediata da definição de dedução é a sequinte.

Teorema 3 ***(Compacidade)*** *Sejam Γ uma lista de fórmulas, cuja quantidade de variáveis que possam ocorrer livres em suas fórmulas seja finito, e A uma fórmula. Então $\Gamma \vdash A$ se, e somente se, existir alguma lista finita Γ_0 de fórmulas que ocorram na lista Γ, tal que $\Gamma_0 \vdash A$.*

Demonstração: A definição de uma dedução implica que a quantidade de hipóteses realmente usadas em uma dedução é finita. Chamando a lista dessas hipóteses de Γ_0, certamente teremos que $\Gamma_0 \vdash A$.

A recíproca decorre do teorema anterior, que permite acrescentar mais hipóteses à lista original.□

Exercício 3 *A recíproca do Teorema da Dedução diria que se* $\Gamma \vdash (A \to B)$*, então* $\Gamma, A \vdash B$*. Porque* ***não*** *podemos afirmar que, se* $A_1, \ldots, A_n$ *for uma dedução de* $(A \to B)$ *a partir de* Γ*, então* $A_1, \ldots, A_n, A, B$ *(simples aplicação da regra do destacamento ao final) seria uma dedução de* B *a partir de* Γ*,* A*?*

Exercício 4 *Usando o axioma 17, demonstre a recíproca do Teorema da Dedução.*

Exercício 5 *Demonstre que se* $\Gamma \vdash D$*, para cada* D *na lista* Δ*, e se* $\Delta \vdash A$*, então* $\Gamma \vdash A$*.*

Lema 1 *Denotando* $\vdash A$ *a asserção de que* A *pode ser deduzida sem usar hipótese, temos:*

1. $\vdash A \to A$
2. $\vdash (A \to B) \to ((B \to C) \to (A \to C))$
3. $\vdash (\neg\neg A) \to A$
4. $\vdash A \to (\neg\neg A)$
5. $\Gamma, A \vdash B$ *se, e somente se* $\Gamma, \neg B \vdash \neg A$
6. *se* $\Gamma, A \vdash B$ *e* $\Gamma, \neg A \vdash B$*, então* $\Gamma \vdash B$
7. *se* $\Gamma \vdash A$ *e* $\Gamma \vdash B$*, então* $\Gamma \vdash (A \wedge B)$
8. *se* $\Gamma, A \vdash C$ *e* $\Gamma, B \vdash C$*, então* $\Gamma, (A \vee B) \vdash C$
9. *se* $\Gamma, A \vdash B$ *e* $\Gamma, A \vdash \neg B$*, então* $\Gamma \vdash \neg A$
10. $(\neg A) \vee B \vdash (A \to B)$
11. $(A \to B) \vdash (\neg A) \vee B$
12. $\neg A \vee \neg B \vdash \neg(A \wedge B)$
13. $\neg A \wedge \neg B \vdash \neg(A \vee B)$

14. $\neg(A \vee B) \vdash \neg A \wedge \neg B$

Demonstração: Vamos aplicar o Teorema da Dedução, quando for necessário:

1. Já fizemos na demonstração do Teorema da Dedução.

2. Aplicando duas vezes a regra do destacamento, vemos que $(A \to B), (B \to C), A \vdash C$.

3. Por 1, temos que $\vdash (\neg A) \to (\neg A)$; usando $\neg\neg A$ como hipótese, temos que $\neg\neg A \vdash (\neg A) \to (\neg\neg A)$ e que $\neg\neg A \vdash (\neg A) \to (\neg A)$. Portanto, listando as duas deduções e usando o axioma 3, temos que $\neg\neg A \vdash A$. O Teorema da Dedução faz o resto do trabalho.

4. Por 3, temos que $\vdash \neg\neg\neg A \to \neg A$ e usando A como hipótese, $A \vdash (\neg\neg\neg A) \to A$. Assim, como em 3, chegamos a $A \vdash \neg\neg A$.

5. Como é fácil ver que $(A \to B), \neg B \vdash \neg A$ (usando o axioma 3) e que $(\neg B) \to (\neg A), A \vdash B$, temos que $(A \to B) \vdash (\neg B) \to (\neg A)$ e $(\neg B) \to (\neg A) \vdash (A \to B)$. Daí, fica fácil fazer o que é demandado.

6. Por 5, temos que $\Gamma, \neg B \vdash \neg A$ e $\Gamma, \neg B \vdash \neg\neg A$. Usando o axioma 3 e o item 3 acima, temos que $\Gamma \vdash B$.

7. Basta ver que $\vdash A \to (B \to (A \wedge B))$, ou $A, B \vdash A \wedge B$; mas $A, B \vdash (A \to A)$, $A, B \vdash (A \to B)$ e, portanto, usando o axioma 6, obtemos que $A, B \vdash (A \wedge B)$. Daí, o exercício acima resolve o nosso caso.

8. Pelo Teorema da Dedução, $\Gamma \vdash (A \to C)$ e $\Gamma \vdash (B \to C)$. Basta aplicarmos agora o axioma 9 e a recíproca do Teorema da Dedução.

9. Parecido com o item 8.

10. Usamos o item 8 acima com $A, \neg A \vdash B$ (exercício: verifique isto) e $A, B \vdash B$.

11. Usamos o item 6 acima com $(A \to B), A \vdash (\neg A) \vee B$ e $(A \to B), \neg A \vdash (\neg A) \vee B$.

12. Pelo item 5 acima e os axiomas 4 e 5, temos que $\neg A \vdash \neg(A \wedge B)$ e $\neg B \vdash \neg(A \wedge B)$; basta usar agora o item 8, acima.

13. Parecido com o item 12.

14. Parecido com o item 12, usando agora os axiomas 7 e 8.□

2.3.1 Hipóteses Existenciais

Ao usarmos uma hipótese existencial "*existe* X*, tal que* $A(X)$", declaramos na dedução uma frase do tipo "*seja* X *tal que* $A(X)$" e passamos a utilizá-la nesta forma. Observemos que nesta última frase a *quantificação existencial* desapareceu, tornando livre a ocorrência da variável X.

Aparentemente, não temos nenhuma regra formal de dedução que nos permita fazer tal coisa, mas essa transformação é perfeitamente legítima, tomando-se, é claro, os devidos cuidados.

Teorema 4 ***(Uso de Hipóteses Existenciais)*** *Seja* x *uma variável que não ocorra livre em nenhuma fórmula de* Γ*. Então*

$$\Gamma, \exists x\, A(x) \vdash B \textit{ se, e somente se } \Gamma, A(x) \vdash B.$$

Demonstração: As seguintes asserções são equivalentes:

1. $\Gamma, \exists x\, A(x) \vdash B$;
2. $\Gamma, \neg\forall x \neg A(x) \vdash B$, pelo uso dos axiomas 15 e 16;
3. $\Gamma, \neg B \vdash \neg forallx \neg A(x)$, pela contrapositiva (Lema acima);
4. $\Gamma, \neg B \vdash \neg A(x)$, usando o axioma 11 e também a regra da generalização;
5. $\Gamma, A(x) \vdash B$, novamente a contrapositiva.$\square$

2.3.2 Axiomas da igualdade

O símbolo "=" representa a *igualdade*. Seu significado está expresso nos seguintes axiomas:

18. $\forall x (x = x)$ (a igualdade é reflexiva)
19. $\forall x\, \forall y\, (x = y \rightarrow y = x)$ (a igualdade é simétrica)
20. $\forall x\, \forall y\, \forall z\, ((x = y \wedge y = z) \rightarrow x = z)$ (transitividade da igualdade)

21. para cada fórmula $A(x)$, $\forall x\, \forall y\, ((x = y \wedge A(x)) \to A(y))$ (indiscernibilidade da igualdade)

Os axiomas 18, 19 e 20 definem que a igualdade é uma *relação de equivalência*, enquanto o axioma 21 diz que não podemos discernir por nenhuma outra propriedade elementos que são iguais, ou, em outras palavras, a relação de igualdade é a mais fina entre todas as relações equivalência.