Capítulo 3

Axiomatização de ZF

Neste capítulo vamos apresentar os axiomas da Teoria dos Conjuntos nomeada de ZF (Zermello-Fraenkel), na linguagem de primeira ordem $\mathscr{L}_{\mathrm{ZF}}$, que contém apenas o símbolo não lógico $\in$ (pertinência).

Essa teoria foi desenvolvida por Ernest Zermello, Abraham Fraenkel e Thoralf Skolem, sendo que este último a apresentou em uma linguagem de primeira ordem.

Poderíamos desenvolver a teoria de modo puramente sintático (manipulação de símbolos), sem qualquer referência a intuições que tenhamos sobre o assunto. Na verdade, em última análise, isso é o que realmente fazemos, mas o apelo à intuição e às ideias já aprendidas ajudam no entendimento do tema.

Por isso, chamaremos de conjuntos os elementos a que as variáveis da teoria de ZF se refereriam. Para facilitar a compreensão, numa situação em que tenhamos $x \in y$, diremos que x é um elemento do conjunto y, embora x também seja um conjunto.

3.1 Extensionalidade e o Conjunto Vazio

Gottlob Frege, em sua formulação da aritmética, postulou queos conceitos são determinados por sua extensão, ou seja, pela classe de elementos para os quais podemos julgar que o conceito se aplica. Em outras palavras, as classes eram distinguidas pelos seus elementos.

3.1.1 Extensionalidade

O primeiro axioma de nossa lista é, então a formulação atual desse postulado de Frege.

Axioma da Extensionalidade: $\forall x \forall y \forall z[((z \in x \to z \in y) \wedge (z \in y \to z \in x)) \to (x = y)]$ – se dois conjuntos quaisquer tiverem os mesmos elementos, então eles serão iguais.

Os axiomas lógicos (e da igualdade) garantem que vale também a recíproca.

Lema 2 *É dedutível, sem hipóteses*

$$\forall x \forall y \forall z[(x = y) \to ((z \in x \to z \in y) \wedge (z \in y \to z \in x))].$$

Demonstração: Usando o Teorema da Dedução e a regra de generalização, basta demonstrar que

$$x = y \vdash (z \in x \to z \in y) \wedge (z \in y \to z \in x).$$

Para isso, basta mostar que $x = y \vdash (z \in x \to z \in y)$ e $x = y \vdash (z \in y \to z \in x)$, ou melhor, $x = y, z \in x \vdash z \in y$ e $x = y, z \in y \vdash z \in x$.

Lembrando que o Axioma 21 da lógica declara que *para cada fórmula* $A(x)$, $\forall x \forall y\, ((x = y \wedge A(x)) \to A(y))$, então, aplicando esse axioma à fórmula $z \in x$, temos que $x = y, z \in x \vdash z \in y$.

Agora, repetimos o mesmo tipo de argumentação para "*trocar x por y*"e obtermos $x = y, z \in y \vdash z \in x$. O axioma 19 declara que $\forall x \forall y\, (x = y \to y = x)$. Assim, $x = y \vdash y = x$ e, como $y = x, z \in y \vdash z \in x$, obtemos o desejado. $\square$

Exercício 6 *Detalhe os passos dessa demonstração, indicando os axiomas e resultados do capítulo anterior que foram usados aqui.*

3.1.2 Conjunto Vazio

O axioma da extenmsionalidade, por si só, não pode garantir que exista algum conjunto. Por isso, precisaremos postular a existência de alguns conjuntos, para construirmos outros a partir deles.

Comecemos com o mais simples, a existência de um conjunto que não tenha elementos.

Axioma do Conjunto Vazio: Existe um conjunto que não tem nenhum elemento: $\exists x\, \forall y\, \neg(y \in x)$.

Lema 3 *Existe um único conjunto vazio, ou seja, assumindo os axiomas da Extensionalidade e da do Conjunto Vazio, podemos deduzir*

$$\forall x\, \forall y\, [\forall z\, (\neg(z \in x) \wedge \neg z \in y) \rightarrow x = y].$$

Demonstração: Basta tomarmos a forma contrapositiva do Axioma da Extensionalidade, ou seja,

$$x \neq y \rightarrow \exists z(z \in x \vee z \in y).$$

Supondo que a variável x refira-se ao conjunto vazio, ou seja,

$$\forall z\, (z \notin x),$$

obteremos, como conclusão que $\exists z(z \in y)$, ou seja, que y não pode representar o conjunto vazio. $\square$

Exercício 7 *Detalhe essa demonstração, levando em conta o descarte das quantificações universais $\forall x\, \forall y \ldots$, e fazendo uso do Teorema da Dedução, se necessário.*

Costumamos usar o símbolo (metalinguístico) $\varnothing$ para nomear tal conjunto.

3.1.3 Elementos primitivos

Uma teoria dos conjuntos em que valha o axioma da extensionalidade é chamada de teoria extensional.

Entretanto, em aplicações específicas, é interessante termos os chamados *elementos primitivos*, ou átomos (ou, como é usado na literatura estrangeira, a palavra alemã *Urelemente*), que consistem em aumentarmos a linguagem objeto com dois símbolos de constantes, $\varnothing$ e A (que tem o valor de "*termos*"da linguagem) que nomeiam elementos especiais. A linguagem estendida será denotada por $\mathscr{L}_{\mathrm{ZF}}(A)$, cujas fórmulas seriam obtidas das fórmulas $x = y$, $x = a$, $a = x$, $x \in a$, $a \in x$, $a \in b$, pelos processos descritos no capítulo anterior, sendo que as letras a e b são (variáveis metalinguísticas) aqui usadas para denotar cada um dos símbolos A ou $\varnothing$.

No lugar do axioma da extensionalidade, introduzem-se esses três axiomas:

1. $\forall x \,\neg(x \in \varnothing)$; ou seja, este símbolo representa o conjunto vazio;
2. $\forall x\,(x \in A \leftrightarrow (\neg(x = \varnothing) \wedge \forall z \,\neg(z \in x)))$; todo átomo é distinto do conjunto vazio, mas, mesmo assim, não tem nenhum elemento;
3. **(Extensionalidade)** $\forall x\, \forall y\, [(\neg(x \in A) \wedge \neg(y \in A)) \to \forall z(((z \in x \to z \in y) \wedge (z \in y \to z \in x)) \to x = y)]$; ou seja, a extensionalidade vale para todos os conjunto que não forem átomos.

Se juntarmos também um axioma dizendo que existe pelo menos um átomo em A, $\exists x\,(x \in A)$, podemos demonstrar que exitem mais de um conjunto sem elementos.

3.2 O Axioma do Par

Vamos postular um axioma que permite obter novos conjuntos a partir de outros já obtidos. É o Axioma do Par (não ordenado).

Axioma do Par: $\forall x \forall y \exists z \forall t (t \in z \leftrightarrow (t = x \vee t = y))$. Para cada x e y, existe um conjunto contendo exatamente esses dois elementos. Intuitivamente, podemos denotar esse conjunto pela notação $\{x, y\}$. Mais adiante tornaremos essa notação num sistema formal (o sistema KM).

Vamos extrair algumas conseqüências desse axioma, junto com os anteriores.

Lema 4 *Existe um conjunto contendo um único elemento.*

Demonstração: Um conjunto em questão poderia ser $\{\varnothing\}$. Mas precisamos usar apenas o axioma do par e axiomas lógicos.

1. usando o axioma do par, junto com o axioma lógico que permite passar do geral ao particular $(\forall x\, A(x) \to A(t))$, podemos declarar $\exists z \forall t(t \in z \leftrightarrow (t = x \vee t = x))$;
2. por axiomas lógicos (exercício: quais?), podemos declarar $\exists z \forall t(t \in z \leftrightarrow (t = x))$;
3. por axioma lógico (exercício: qual?), podemos quantificar existencialmente essa fórmula, obtendo $\exists x\, \exists z \forall t(t \in z \leftrightarrow (t = x))$.

Assim terminamos a demonstração do lema. $\square$

3.2.1 Pares ordenados

Dados os conjuntos x e y, usando o axioma do par duas vezes, definimos o **par ordenado** como sendo o conjunto $\{x, \{x, y\}\}$, ou seja, é o conjunto formado pelo par, cujos elementos são o conjunto x e o par não ordenado $\{x, y\}$. Denotaremos esse par pela notação[1] (metalinguística) (x, y).

Lema 5 *Dados os conjuntos x, y, z, e w, a igualdade $(x, y) = (z, w)$ é válida se, e somente se, $x = z$ e $y = w$.*

Demonstração: A cláusula "*se*"(ou seja, a implicação $\Leftrightarrow$) decorre do axioma da igualdade. A cláusula "*somente se*"decorre do axioma da extensionalidade. $\square$

[1]Fugimos da notação $\langle x, y\rangle$,comum nos livros de Teoria dos Conjuntos, por mera conveniência. Mas estamos de acordo com a notação adotada em livros de Cálculo, por exemplo.

Exercício 8 *Preencha os detalhes da argumentação.*

Podemos definir (recursivamente) n-uplas ordenadas assim:

1. $n = 1$, $(x_1) = \{x_1\}$;
2. suponhamos definida $(x_1, \ldots, x_n)$ (observe que já conhecemos o caso $n + 2$); definimos $x_1, \ldots, x_{n+1}) = (x_1, (x_2, \ldots, x_{n+1}))$.

Por exemplo, triplas ordenadas $(x, y, z) = (x, (y, z))$, ou em termos de conjuntos, $\{x, \{x, \{y, \{y, z\}\}\}\}$.

3.3 O axioma da União

Comecemos a fazer um pouco de álgebra de conjuntos.

O Axioma da União: $\forall x \exists y \forall t(t \in y \leftrightarrow \exists w(w \in x \wedge t \in w))$. Dado um conjunto x, existe um conjunto y contendo todos os elementos de cada conjunto pertencente a x. Denotamos $y = \bigcup x$.

No caso em que $x = \{a, b\}$, denotaremos a união $\bigcup x$ por $a \cup b$..

Exercício 9 *Mostre que:*

1. $\bigcup \varnothing = \varnothing$
2. $a \cup b = b \cup a$
3. $a \cup a = a$
4. $a \cup (b \cup c) = (a \cup b) \cup c$
5. *o que é* $\bigcup(a, b)$*?*

Para podermos desenvolver melhor essa álgebra de conjuntos precisamos do axioma da separação.

3.4 O Axioma da Separação

Vimos que Frege havia proposto um sistema formal para a aritmética, em que postulou o:

Axioma da Coleção: (Frege, 1893) para cada fórmula $A(x)$, em que a variável livre possa ser x, a fórmula:

$$\exists y\, \forall x\, (x \in y \leftrightarrow A(x)).$$

Vimos que tal sistema era inconsistente, pois dava azo ao Paradoxo de Russel

Teorema 5 ***(O Paradoxo de Russel)*** *No sistema de Frege, pode-se demonstrar a existência do conjunto dos elementos x, tais que $x \notin x$, que é paradoxal.*

Demonstração: Tomando $A(x)$ como a fórmula $x \notin x$, obtemos pelo axioma da coleção, o conjunto y daqueles elementos x, tais que $x \notin x$. Perguntamos: $y \in y$?

Se $y \in y$, então deve satisfazer a condição $y \notin y$, uma contradição.

Mas, se $y \notin y$, vemos que y satisfaz a condição que define y e, portanto $y \in y$, outra contradição.

Assim, tal conjunto y não poderia existir e o axioma da coleção traz contradições. □

Como o problema desse axioma é uma autorreferência, Zermello postulou[2].

Dado um conjunto x, cada conjunto y que satisfaça $\forall z\, (z \in y \rightarrow z \in x)$ é chamado de **subconjunto** de x, e denotaremos $y \subset x$, ou também $x \supset y$. Trivialmente, temos que $x \subset x$.

O Axioma da Separação: Para cada fórmula $A(\bar{x}, y)$, em que $\bar{x}$ é uma n-upla de variáveis, temos um axioma $\forall \bar{x} \forall u \exists z \forall y (y \in z \leftrightarrow (y \in u \wedge \varphi(\bar{x}, y)))$. Ou seja, $z = \{y \in u : \varphi(\bar{x}, y)\}$. Ou seja, a fórmula $A(\bar{x}, y)$ separa o subconjunto de u, cujos elementos satisfazem àquela fórmula.

Podemos agora definir mais operações sobre conjuntos:

[2] Que ele chamou de *Aussonderongsaxiom*, ou axioma da separação.

1. $\bigcap x = \{z \in \bigcup x \, \forall w \, (w \in x \rightarrow z \in w)\}$ (interseção)
2. $a \cap b = \bigcap\{a, b\}$
3. $a \setminus b$ definido por $x \in a \wedge x \notin b$ (diferença de conjuntos)
4. $a \triangle b$ definido por $(a \setminus b) \cup (b \setminus a)$ (diferença simétrica)

Algumas propriedades admitem demonstrações simples:

Exercício 10 *Mostre que*

1. $\bigcap \varnothing = \varnothing$
2. $a \cap b = b \cap a$
3. $a \cap a = a$
4. $a \cap (b \cap c) = (a \cap b) \cap c$
5. *o que é* $\bigcap(a, b)$*?*
6. $a \triangle \varnothing = a$
7. $a \triangle a = \varnothing$
8. $a \triangle b = (a \cup b) \setminus (a \cap b)$

Aquelas demonstrações mais elaboradas são feitas a seguir.

Lema 6 *Sejam* a*,* b *e* c *conjuntos*[3] *quaisquer. As seguintes propriedades são demonstráveis, a partir dos axiomas já listados.*

1. $a \cap (b \cup c) = (a \cap b) \cup (a \cap c)$
2. $a \cup (b \cap c) = (a \cup b) \cap (a \cup c)$
3. $a \triangle (b \triangle c) = (a \triangle b) \triangle c$
4. $a \cap (b \triangle c) = (a \cap b) \triangle (a \cap c)$

[3] Se quiserem ser mais formais, considerem a, b e c como variáveis da teoria ZF.

Demonstração: Mostremos is itens 1 e 3.

1. O lado esquerdo da equação é definido pela fórmula

$$(x \in a) \wedge ((x \in b) \vee (x \in c)),$$

que é logicamente equivalente à fórmula

$$((x \in a) \wedge (x \in b)) \vee ((x \in a) \wedge (x \in c)),$$

que define o lado direito da mesma.

3. Seja x um elemento do lado esquerdo da equação. Temos que $x \in a \cup (b \triangle c)$, mas $x \notin a \cap (b \triangle c)$. Se $x \in a$, então$x \notin ((b \cup c) \smallsetminus (b \cap c))$. Se $x \notin (b \cup c)$, então $x \in (a \triangle b)$ e $x \notin c$, donde concluímos que $x \in (a \triangle b) \triangle c$. Temos que considerar o caso em que $x \in (b \cap c)$ (e $x \in a$). Como, neste caso, $x \in b$, temos que $x \notin (a \triangle b)$ e, portanto, $x \in (a \triangle b) \triangle c$.

Precisamos considerar o caso em que $x \notin a$. Então $x \in b$ ou $x \in c$ e, portanto $x \in (a \triangle b) \triangle c$. $\square$

Exercício 11 *Demonstre os itens 2 e 4 do lema.*

Exercício 12 *Mostre que*

1. $a \smallsetminus (b \cup c) = (a \smallsetminus b) \cap (a \smallsetminus c)$
2. $a \smallsetminus (b \cap c) = (a \smallsetminus b) \cup (a \smallsetminus c)$

3.5 Axioma das Partes

Vimos que, dado um conjunto x, podemos definir subconjuntos de x usando o axioma da separação. O próximo axioma, o das partes, permite-nos coletar todos os subconjuntos de x num só conjunto.

$\forall x \exists y \forall t (t \in y \leftrightarrow \forall z (z \in t \rightarrow z \in x))$. Existe um conjunto y cujos elementos são todos os subconjuntos de x, e denotamos $y = \mathcal{P}(x)$.

Exercício 13 *Mostre que o conjunto* $\{\varnothing\} = \mathcal{P}(\varnothing)$ *não depende do axioma das partes para existir! (Basta usar o axioma do par.)*

3.6 Relações binárias e Funções

Com todos os axiomas listados até aqui podemos falar de relações, funções e produtos de conjuntos.

Observemos que, dado o conjunto x, os pares ordenados de elementos de x estão em $\mathcal{P}(\mathcal{P})(x)$. Pelo axioma da separação, podemos definir o **produto (cartesiano)** de x por x como sendo o subconjunto de $\mathcal{P}(\mathcal{P})(x)$, cujos elementos são os pares ordenados de elementos de x, e denotado por $x \times x$.

Dados os conjuntos x e y, definimos de forma análoga o produto $x \times y$, como sendo o conjuntos dos pares ordenados de elementos de $x \cup y$, tais que o primeiro elemento do par seja elemento de x e o segundo de y. Aqui usamos o axioma da separação para extrair $x \times y$ de $(x \cup y) \times (x \cup y)$.

Dados os conjuntos x e y, um subconjunto $r \subset x \times y$ é chamado de **relação binária**. O conjunto dos elementos $z \in x$, tais que existe algum elemento $w \in y$, tal que $(z, w) \in r$ é chamado de **domínio** da relação, e denotamo-lo por $\mathrm{Dom}\,(r)$; o conjunto dos elementos $z \in y$, tais que existe algum elemento $w \in x$, tal que $(w, z) \in r$ é chamado de **imagem** da relação, e denotamo-la por $\mathrm{Im}\,(r)$. O conjunto y é chamado de **contradomínio** da relação r.

Dado o conjunto x, uma relação $r \subset x \times x$ é chamada de **reflexiva** se para todo $y \in x$, $(y, y) \in r$. Ela é chamada de **simétrica** se para todos $y, z \in x$, se $(y, z) \in r$, então $(z, y) \in r$. Ela é chamada de **transitiva** se para todos $y, z, w \in x$, se $(y, z) \in r$ e $(z, w) \in r$, então $(y, w) \in r$.

Dado o conjunto x, uma relação $r \subset x \times x$ é chamada de **relação de ordem parcial** se for transitiva e se satisfizer

$$\forall u, v((u, v \in x \wedge (u, v) \in r \wedge (v, u) \in r) \rightarrow u = v).$$

Em geral denotamos essa relação como $u \leq v$, no lugar de $(u, v) \in r$.

Se a relação de ordem parcial $r \subset x \times x$ também satisfizer $\forall u, v(u, v \in x \rightarrow ((u, v) \in r \vee (v, u) \in r))$, então chamamo-la de **ordem total** ou de **ordem linear**.

Dado o conjunto x, uma relação $r \subset x \times x$ é chamada de **relação de equivalência** se for reflexiva, simétrica e transitiva.

Dados os conjuntos x e y, uma relação $r \subset x \times y$ é chamada de **função** se para todos os pares $(t, z), (t, w) \in r$ valer que $z = w$. Neste caso usaremos a notação $r : \mathrm{Dom}\,(r) \to y$ para referir ao fato de que r é função, cujo domínio é $\mathrm{Dom}\,(r)$ e sua imagem $\mathrm{Im}\,(r)$ é subconjunto de y. Denotaremos por $r(t)$ o único elemento $w \in y$, tal que $(t, w) \in r$.

Uma função $f : x \to y$ é dita **injetora** se para todo $t, s \in x$, se $f(t) = f(s)$, então $t = s$. Ela é dita **sobrejetora** se $\mathrm{Im}\,(f) = y$. Finalmente, uma função é **bijetora** se for injetora e bijetora.

Exercício 14 *Pode $\varnothing$ ser uma relação binária? Pode ser função? Pode ser função injetora, sobrejetora, bijetora?*

Teorema 6 ***(Cantor)*** *Dados o conjunto x e a função $f : x \to \mathcal{P}(x)$, então f não pode ser sobrejetora.*

Demonstração: Suponhamos, por absurdo, que exista uma função $f : x \to \mathcal{P}(x)$ que seja sobrejetora.

Considere o seguinte subconjunto y de x, cujos elementos são todos os $t \in x$, tais que $t \notin f(t)$. Como supusemos que f seria sobrejetora, existe um elemento $w \in x$, tal que $y = f(w)$. Perguntamos: $w \in y$?

Se a resposta fosse sim, então w deveria satisfazer à condição que define y, ou seja, $w \notin f(w) = y$, uma contradição.

Se a resposta fosse não, então $w \notin f(w)$ força $w \in y$, novamente uma contradição.

Concluímos que tal f não pode ser sobrejetora. $\square$

3.7 O Axioma do Infinito

Até agora, só podemos afirmar a existência [4] de alguns conjuntos que tenham uma quantidade finita de elementos. Para podermos tratar dos fundamentos da matemática, é certamente necessário podermos falar de conjuntos infinitos. Por isso postulamos a existência de conjuntos infinitos.

[4] Demonstraremos, mais adiante que somente com os axiomas anteriormente enunciados, não podemos demonstrara a existência de nenhum conjunto infinito.

O Axioma do Infinito: $\exists x[\exists y(y \in x \wedge \forall z(z \notin y)) \wedge \forall y(y \in x \rightarrow \exists z(z \in x \wedge \forall t(t \in z \leftrightarrow (t \in y \vee t = y))))]$. Ou seja, existe um conjunto x tal que $\varnothing \in x$, e se $y \in x$ então $y \cup \{y\} \in x$.

Lema 7 ***(O Conjunto dos Números Naturais)*** *Denotando $\varnothing$ pelo número $\mathbf{0}$ (zero), e, se definimos os conjunto denotado por $\mathbf{n}$, definimos o conjunto $\mathbf{n} \cup \{\mathbf{n}\}$ por $\mathbf{n} + \mathbf{1}$, para cada número natural n, existe o conjunto ω contendo todos os elementos $\mathbf{n}$, e somente esses elementos.*

Demonstração: Intuitivamente *é claro que existe tal conjunto*, mas precisamos demonstrar sua existência a partir dos axiomas dados.

O axioma do infinito prevê a existência de um conjunto y contendo todos os elementos $\mathbf{n}$ (e talvez outros elementos).

O axioma das partes nos dá o conjunto $\mathcal{P}(y)$.

O axioma da separação nos dá o subconjunto w de $\mathcal{P}(y)$ dos subconjuntos $z \subset y$, tais que $\varnothing \in z$, $\forall x\,(x \in z \rightarrow x \cup \{x\} \in z$, e também $\forall x\,(x \in z \wedge x \neq \varnothing \rightarrow \exists t\,(t \in z \wedge x = t \cup \{t\})))$.

O axioma da separação, novamente, nos dá o conjunto $\bigcap w$. Chamemos tal conjunto de ω.

Pela definição de w e de ω, temos que $\ltimes \in \omega$, para todo número natural n. Por outro lado, suponhamos que $x \in y$ fosse diferente de todos os conjuntos $\mathbf{n}$, então teríamos que $y \smallsetminus \{x\} \in w$ e, portanto, $x \notin \omega$. $\square$

Observemos que $\mathbf{0} = \varnothing$, $\mathbf{1} = \{\mathbf{0}\}$, $\mathbf{n} + \mathbf{1} = \{\mathbf{0}, \mathbf{1}, \ldots, \mathbf{n}\}$.

Exercício 15 *Mostre que se $n < m$ forem números naturais, então:*

1. $\mathbf{n} \subset \mathbf{m}$
2. $\mathbf{n} \in \mathbf{m}$
3. $\mathbf{n} \subset \omega$

Exercício 16 *Mostre que $\in$ é uma relação de ordem linear em ω, isto é, definindo a relação $x < y$ em ω se $x \in y$, mostre que para todo $x, y, z \in \omega$,*

1. $x \not< x$
2. $(x < y \wedge y < z) \rightarrow x < z$
3. $x < y \rightarrow y \not< x$
4. *ou* $x < y$ *ou* $x = y$, *ou* $y < x$.

Observe que essa ordem reproduz a ordem dos números naturais e, portanto, tem a propriedade de que todo subconjunto $x \subset \omega$ não vazio tem um elemento mínimo.

Lema 8 *O conjunto* ω *tem as seguintes propriedades, dedutíveis dos axioma já listados.*

1. $\forall x, y\,(x, y \in \omega \rightarrow (y \in x \cup \{x\} \rightarrow (y \in x \vee y = x)))$, *ou seja, para todo* $x, y \in \omega$, *se* $y \in x \cup \{x\}$, *então, ou* $y = x$, *ou* $y \in x$.
2. $\forall x\,(x \in \omega \rightarrow (x = \varnothing \vee \exists y\,(y \in \omega \wedge x = y \cup \{y\})))$, *ou seja, com a exceção do conjunto vazio, todos os elementos de* ω *são da forma* $y \cup \{y\}$.

Demonstração: O item 1 decorre imediatamente dos axiomas da união e da extensionalidade (exercício: como?) e o item 2 decorre da definição de ω. $\square$

Com isso, podemos mostrar que vale o princípio da indução finita em ω.

3.7.1 Indução em ω

Mas antes, vamos definir uma função em ω, a função *sucessor*.

Lema 9 ***(Função Sucessor)*** *Seja* $y = S(x)$ *a fórmula*

$$x \in \omega \wedge y \in \omega \wedge x \in y \wedge \forall z((z \in y \leftrightarrow (z = x \vee z \in x))).$$

Então, S *é uma função e para todo número natural* n, *podemos deduzir dos axiomas já citados que* $\mathbf{n} + \mathbf{1} = S(\mathbf{n})$. *Ou seja,* S *define a função sucessor em* ω, *que reproduz a função sucessor dos números naturais.*

Demonstração: Temos que mostrar que $y = S(x)$ define função, ou seja, $\forall x, y_1, y_2 \in \omega\,((y_1 = S(x) \wedge y_2 = S(x)) \rightarrow y_1 = y_2)$. Observe que essa fórmula define uma relação binária $S \subset \omega \times \omega$.

Assim, suponhamos que $y_1 = S(x)$ e $y_2 = S(x)$, ou seja,

$$x \in \omega \wedge y_k \in \omega \wedge x \in y_k \wedge \forall z((z \in y_k) \leftrightarrow (z = x \vee z \in x)),$$

para $k = 1, 2$.

Aplicando o axioma da extensionalidade, obtemos que $y_1 = y_2$.

Observemos que $\mathrm{Dom}(S) = \omega$. Diretamente da definição de S, temos que $S(\mathbf{n}) = \mathbf{n+1}$. $\square$

Exercício 17 *Usando os axiomas já listados, mostre que*

$$\forall x\,(x \in \omega \rightarrow (x = \varnothing \vee \varnothing \in x)).$$

Para isso, considere a definição de ω*, levando em conta o conjunto* w *definido por*

$$\varnothing \in w \wedge \forall z\,(z \in w \rightarrow z \cup \{z\} \in w) \wedge \forall z(z \in w \rightarrow (z = \varnothing \vee \varnothing \in z)).$$

Lema 10 *Com os axiomas já listados, podemos deduzir que*

$$\forall x\,(x \in \omega \rightarrow \exists y\,(y \in x \wedge \forall z\,(z \in y \rightarrow z \notin x))),$$

ou seja, para todo $x \in \omega$*, existe* $y \in x$*, tal que* $x \cap y = \varnothing$*. Na verdade, tal elemento* y *é o conjunto vazio.*

Demonstração: Imediato, a partir do exercício acima (exercício: detalhar!). $\square$

O próximo resultado diz que todo subconjunto não vazio de ω possui um menor elemento na ordem dada pela pertinência. Essa propriedade será estudada mais adiante com mais detalhes e em maior generalidade. Só para registrar, dizemos que a relação $\in$ em ω é uma **relação bem fundada**.

Teorema 7 *A partir dos axiomas já listados, podemos deduzir que*

$$\forall z(z \subset \omega \to (z \neq \varnothing \to \exists w(w \in z \wedge w \cap z = \varnothing))).$$

Ou seja, para todo subconjunto não vazio $z \subset \omega$, existe um elemento $w \in z$, tal que $w \cap z = \varnothing$.

Demonstração: Basta olharmos para a definição de ω e considerar o conjunto w definido por

$$\varnothing \in w \wedge \forall t(t \in w \to t \cup \{t\} \in w) \wedge \forall u\,(u \subset w \to (u \neq \varnothing \to \exists v\,(v \in u \wedge v \cap u = \varnothing))).$$

Observe que, para cada número natural n, $\ltimes \in w$. □

Com isto, podemos deduzir a partir dos axiomas já expostos que vale o princípio da indução finita [5].

Teorema 8 ***(Princípio da Indução Finita)*** *Seja $A(x, y_1, \ldots, y_n)$ uma fórmula. Suponha que, com os axiomas já listados, possamos deduzir*

1. $A(0, \bar{y})$

2. $\forall x\,(x \in \omega \to \exists z(z \in \omega \wedge (x \in z) \wedge \forall w((w \in \omega \wedge x \in w) \to ((z = w \vee z \in w) \wedge (A(x, \bar{y}) \to A(z, \bar{y}))))))$.

Então desses mesmos axiomas poderemos deduzir que $\forall x(x \in \omega \to A(x\bar{y}))$.

Demonstração: Antes de mais nada, vamos entender o que está escrito nas hipóteses: a propriedade dada pela fórmula $A(x, \bar{y})$ vale para $x = \varnothing$; se valer para x, então também vale para $S(x)$, para todo x. Conclusão: vale para todo x.

Se a conclusão não valesse, o conjunto $w \subset \omega$ definido por $\neg A(x, \bar{y})$ seria não vazio e, portanto, teria um mínimo t. Assim, ou $t = \varnothing$, contrário à primeira hipótese, ou $t \neq \varnothing$ e, por conseguinte $t = u \cup \{u\}$, para algum $u \in \omega$, obtendo que $A(u, \bar{y})$, mas $\neg A(S(u), \bar{y})$, contrário à segunda hipótese. □

---

[5] Ou seja, internalizamos na Teoria dos Conjuntos o princípio metamatemático da indução finita.

3.7.2 Recursão em ω

Frequentemente deparamo-nos com definições recursivas em matemática. Essas são da forma $f(0) = a_0$ e $f(n+1) = g(n, f(n))$, definindo a função $f : \mathbb{N} \to A$, usando iterativamente uma função g dada. Por exemplo, podemos definir a soma dos números naturais a partir da função sucessor por

$$\begin{aligned} x + 0 &= x \\ x + (n+1) &= S(x+n). \end{aligned}$$

Para usarmos esse tipo de definição em Teoria dos Conjuntos, precisamos de um modo de mostrar a existência dessa função soma, uma relação binária $+ \subset \omega \times \omega$.

Teorema 9 ***(Teorema da Recursão Finita)*** *Podemos deduzir a partir dos axiomas já listados que*

$$\forall a, a_0, g\, (a_0 \in a \wedge \text{“}g : \omega \times a \to a\text{”} \to \exists f\, (\text{“}f : \omega \to a\text{”} \wedge (f(0) = a_0) \wedge$$

$$\wedge\ \forall z\, (z \in \omega \to f(S(z)) = g(x, f(x))))).$$

Demonstração: Considere o conjunto w definido por

$$w \subset \mathcal{P}(\omega \times a) \wedge \forall z\, (z \in w \to \exists n\, (n \in \omega \wedge \text{“}z : n \to a\text{”} \wedge (0, a_0) \in z \wedge$$

$$\wedge\ \forall t, b, c\, ((t \in \omega \wedge b \in a \wedge c \in a \wedge (t, b) \in z \wedge (S(t), c) \in z) \to c = g(t, a)))).$$

Em palavras, w é o conjunto de todas as funções $f_n : n \to a$, satisfazendo $f_n(0) = a_0$ e $f_n(k+1) = g(k, f_n(k))$, desde que $k < n$ e $k+1 < n$. Ou seja, cada uma delas é a computação de f até $n-1$.

Observemos que, para demonstrar que esse conjunto existe, que para cada n, existe $f_n \in w$, cujo domínio é $\mathbf{n}$ e que, se $m < n$, então $f_m \subset f_n$, usamos apenas os axiomas já listados. (Exercício: detalhar!)

Seja $f = \bigcup w$. Então $f : \omega \to a$ é função procurada.

De fato, que f é uma função, decorre de que cada f_n é função e que se $m < n$, então $f_m \subset f_n$: se $(t, b), (t, c) \in f$, existe n, tal que $(t, b), (t, c) \in f_n$ e, portanto $b = c$. Da definição de w, segue que f satisfaz as condições do enunciado. $\square$

Podemos enunciar uma forma um pouco mais fraca do teorema da recursão.

Teorema 10 ***(Teorema da Recursão Finita: Forma Fraca)*** *Para cada fórmula $G(x,y,z)$, tal que dos axiomas já listados podemos deduzir que $\forall x,y,z,w\,((G(x,y,z)\wedge G(x,y,w))\to z=w)$ e $\forall x,y\,(x\in\omega\wedge\exists z\,G(x,y,z)\to \exists w\,G(S(x),z,w))$ (G define "função" $z=g(x,y)$ que pode ser iterada) e $\forall x,y\,(x\in\omega\to\exists z\,G(x,y,z))$, e para cada conjunto y_0, existe uma fórmula $F(x,y)$ ("função" $y=f(x)$), tal que podemos deduzir a partir dos axiomas já listados que $F(0,y_0)$ e $\forall x\,(x\in\omega\to\forall t\,(F(S(x),t)\leftrightarrow\exists u\,(G(x,u,t)\wedge F(x,u))))$.*

Demonstração: Tomemos da demonstração do Teorema da Recursão Finita (Teorema 9) a definição do conjunto w. Daí, podemos obter a fórmula $F(x,y)$ por $x\in\omega\wedge\forall z\,((z\in\omega\wedge x\in z)\to$ "$y=f_z(x)$").

Como exercício, termine a demonstração. □

Exercício 18 *Mostre que podemos deduzir a existência das funções soma e produto em ω.*

3.7.3 O Conjunto dos Números reais

Já temos o conjunto ω, que representa o conjunto dos números naturais. Podemos chamá-lo também de $\mathbb{N}$, como é usual em matemática. A partir desse conjunto, definiremos o conjunto dos números inteiros $\mathbb{Z}$, o dos números racionais $\mathbb{Q}$ e o dos números reais $\mathbb{R}$.

Comecemos com o conjunto dos números inteiros $\mathbb{Z}$. Definimos a relação binária $z\subset(\omega\times\omega)\times(\omega\times\omega)$, dada por

$$((a,b),(c,d))\in z\leftrightarrow(a+d=b+c),$$

ou seja, pensamos no par (a,b) como representante da diferença $a-b$ e a relação z iguala $a-b=c-d$, ou, $a+d=b+c$. Como já temos em mãos a função soma em ω, podemos deduzir a existência do conjunto z.

Exercício 19 *Mostre que z é uma relação de equivalência, que satisfaz*

$$((a_0, b_0), (a_1, b_1)), ((c_0, d_0), (c_1, d_1)) \in z \to ((a_0+c_0, b_0+d_0), (a_1+c_1, b_1+d_1)) \in z,$$

ou seja, se (a_0, b_0) for equivalente a (a_1, b_1) e se (c_0, d_0) for equivalente a (d_1, d_1), então $(a_0 + c_0, b_0 + d_0)$ será equivalente a $(a_1 + c_1, b_1 + d_1)$.

Seja $\mathbb{Z}$ o conjunto das classes de equivalência da relação z. Sua existência é garantida, sabendo-se que $\mathbb{Z} \subset \mathcal{P}(\mathcal{P}(\omega\times\omega))$. A soma de duas classes $u, v \in \mathbb{Z}$ é dada por $(e, f) \in u + v \leftrightarrow \exists(a, b) \in u \land \exists(c, d) \in v(e = a + c \land f = b + d)$. O produto já é um pouco mais complicado. Pensemos que $(a - b)(c - d) = (ac + bd) - (ad - bc)$, ou seja, a classe do produto das classes de (a, b) e (c, d) é a classe de $(ab + cd, ad + bc)$. A relação de ordem em $\mathbb{Z}$ é dada por $a - b < c - d$ se, e somente se $a + d < b + c$, esta última sendo a ordem de ω.

Exercício 20 *Detalhe as fórmulas que definem a soma, o produto e a ordem em $\mathbb{Z}$. Qual é a classe correspondente ao número zero?*

Passemos ao conjunto dos números racionais. Agora usaremos pares de números inteiros (a, b), com $b \neq 0$, representando a fração a/b.

Exercício 21 *Imite os passos da definição de $\mathbb{Z}$, com as devidas modificações, para definir o conjunto $\mathbb{Q}$, como conjunto das classes de equivalência da relação apropriada. Defina também como ficam as operações de soma e produto, e a ordem em $\mathbb{Q}$. Mostre que são dedutíveis as seguintes propriedades:*

1. $\forall x \in \mathbb{Q}\,(x + 0 = x)$
2. $\forall x, y \in \mathbb{Q}\,(x + y = y + x)$
3. $\forall x, y, z \in \mathbb{Q}\,(x + (y + z) = (x + y) + z)$
4. $\forall x \in \mathbb{Q}\,(x \cdot 0 = 0)$
5. $\forall x, y \in \mathbb{Q}\,(x \cdot y = y \cdot x)$
6. $\forall x, y, z \in \mathbb{Q}\,(x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z)$
7. $\forall x, y, z \in \mathbb{Q}\,(x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z)$

8. $\forall x, y, z \in \mathbb{Q}\,(x < y \to x + z < y + z)$

9. $\forall x, y, z \in \mathbb{Q}\,(x < y \wedge 0 < z \to x \cdot z < y \cdot z)$

Por fim definiremos o conjunto $\mathbb{R}$ dos números reais, pelo método dos *Cortes de Dedekind* [6] Para chegar a seu método, ele partiu da comparação do conjunto dos números racionais, que contêm muitas lacunas (correspondente aos números irracionais), com a reta, que não contém tais lacunas. A partir dessa comparação, chegou à essência da noção do contii nuo na negação da existência dessas lacunas:

> Se todos os pontos da reta caem em duas classes, tais que cada ponto da primeira está à esquerda de todo ponto da segunda, então existe um, e somente um, ponto que produz essa divisão de todos os pontos em duas classes, esse corte da reta em duas porções.[7]

A ideia é identificar cada número real α, com o par de conjuntos (A, B) de números racionais, sendo que [8] $x \in A \leftrightarrow x < \alpha$ e $x \in B \leftrightarrow \alpha \leq x$. Só que não podemos assumir a existência de $\mathbb{R}$ para definir $\mathbb{R}$.

Seja $\mathbb{R}$ o conjunto definido por

$$x \in \mathbb{R} \leftrightarrow \exists A, B \subset \mathbb{Q}\,(x = (A, B) \wedge (\forall y, z\,(y \in A \wedge z \in B \to y < z)) \wedge$$

$$\wedge\ \forall y\,(y \in A \to \exists z\,(z \in A \wedge y < z)) \wedge \mathbb{Q} = A \cup B).$$

Para definirmos a ordem, observamos que se $\alpha < \beta$ são números reais, com cortes (A_1, B_1) e (A_2, B_2), respectivamente, então $A_1 \subset A_2$ e $B_2 \subset B_1$. Isto é, definimos a ordem entre dois cortes por uma dessas condições, pois a outra pode ser deduzida dela. Denotaremos tal relação por $(A_1, B_1) < (A_2, B_2)$.

[6] Que expôs em seu texto *Continuity and Irrational Numbers*, já citado.

[7] *If all points of the straight line fall into two classes such that every point of the first class lies to the left of every point of the second class, then there exists one and only one point which produces this division of all points into two classes, this severing of the straight line into two portions.* Na página 5 da obra citada.

[8] Usamos uma definição um pouco diferente daquela de Dedekind, para evitar ambiguidades no caso de $\alpha \in \mathbb{Q}$. Ele chama de corte qualque par de conjuntos de números racionais tais que todos os elementos do primeiro estejam à esquerda (ou seja, menores que) os da direita; assim, se $\alpha \in \mathbb{Q}$, poderíamos ter tanto $\alpha \in A$, como $\alpha \in B$.

Lema 11 ***(Continuidade da Reta)*** *Sejam X e Y dois conjuntos não vazios de $\mathbb{R}$, tais que $\forall x, y\,((x \in X \land y \in Y) \to x < y)$. Então existe um único elemento $\gamma \in \mathbb{R}$, tal que, $\forall x, y((x \in X \land y \in Y) \to (x \le \gamma \land \gamma \le y))$.*

Demonstração: O elemento γ será dado pelo corte (A, B), tal que A será a união de todos os primeiros elementos dos cortes pertencentes a Y. □

O corte correspondente ao número racional $\rho \in \mathbb{Q}$ tem A como sendo o conjunto dos números racionais $r \in \mathbb{Q}$, tais que $r < \rho$ e B, o conjunto dos $r \in \mathbb{Q}$, tais que $\rho < r$, ou $\rho = r$ (ou, resumidamente, $\rho \le r$).

Podemos definir a soma de dois cortes (A, B) e (C, D) por $(A, B) + (C, D) = (E, F)$, sendo que E é o conjunto de todas as somas $x + y$ com $x \in A$ e $y \in C$ e, analogamente, F é o conjunto de todas as somas $x + y$, com $x \in B$ e $y \in D$.

Exercício 22 *Mostre que (E, F) também é um corte (use as propriedades da soma e da ordem em $\mathbb{Q}$).*

Exercício 23 *Mostre que o oposto do corte (A, B) é o corte $(-B, -A)$, sendo que $x \in -B \leftrightarrow -x \in B$, etc. Mostre que $(A, B) + (-B, -A)$ é o corte referente ao zero. Denotaremos o corte $(-B, -A)$ por $-(A, B)$.*

Como o sinal produto de dois números racionais depende dos sinais destes últimos, temos que ter mais cuidado com a definição do produto de dois números reais (vistos, é claro, como cortes).

Sejam $\alpha = (A, B)$ e $\beta = (C, D)$, dois números reais (ou cortes). Queremos definir o produto $\gamma = (E, F) = \alpha \cdot \beta$. Se $\alpha \ge 0$ e $\beta \ge 0$, então F é o conjunto dos produtos $x \cdot y$,de todos os pares de elementos $x \in B$ e $y \in D$, e E é o complemento de F em $\mathbb{Q}$. Se $\alpha \ge 0$ e $\beta < 0$, então definimos $\gamma = -(\alpha \cdot (-\beta))$. Se $\alpha < 0$ e $\beta \ge 0$, então $\gamma = -((-\alpha) \cdot \beta)$. Finalmente, se $\alpha < 0$ e $\beta < 0$, então $\gamma = (-\alpha) \cdot (-\beta)$.

Exercício 24 *Mostre que valem as seguintes propriedades:*

1. $\forall x \in \mathbb{Q}\,(x + 0 = x)$
2. $\forall x, y \in \mathbb{Q}\,(x + y = y + x)$

3. $\forall x, y, z \in \mathbb{R}\,(x + (y + z) = (x + y) + z)$

4. $\forall x \in \mathbb{R}\,(x \cdot 0 = 0)$

5. $\forall x, y \in \mathbb{R}\,(x \cdot y = y \cdot x)$

6. $\forall x, y, z \in \mathbb{R}\,(x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z)$

7. $\forall x, y, z \in \mathbb{R}\,(x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z)$

8. $\forall x, y, z \in \mathbb{R}\,(x < y \to x + z < y + z)$

9. $\forall x, y, z \in \mathbb{R}\,(x < y \wedge 0 < z \to x \cdot z < y \cdot z)$

Para definir o inverso de um número real $\alpha = (A, B) \neq 0$, definimos $\alpha^{-1} = (C, D)$, sendo que: se $\alpha > 0$, D é o conjunto dos inversos (em $\mathbb{Q}$) dos elementos de B, e A o seu complemento; se $\alpha < 0$, C é o conjunto dos inversos dos elementos de A, e D o seu complemento.

Exercício 25 *Mostre que, para todo $\alpha \in \mathbb{R}$, se $\alpha \neq 0$, então $\alpha \cdot \alpha^{-1} = 1$, sendo que 1 é o número real correspondente ao corte (A, B), onde B é o conjunto dos $x \in \mathbb{Q}\,(x \geq 1)$ e A o seu complemento.*

3.8 Axioma da Substituição

Com os axiomas já listados (extensionalidade, vazio, par, união, separação, partes e infinito), podemos construir (ou, mais precisamente, demonstrar a existência) de diversos conjuntos. No entanto, consideremos a seguinte situação.

Seja X a união de $\mathcal{P}^n(\omega)$, para todo número natural n, definindo $\mathcal{P}^0(\omega)$ como sendo o próprio ω, e $\mathcal{P}^{n+1}(\omega) = \mathcal{P}(\mathcal{P}^n(\omega))$. Observemos que cada conjunto $\mathcal{P}^n(\omega)$ pode ser construído a partir daqueles axiomas. No entanto:

Exercício 26 *Mostre que se $A(x, \bar{y})$ for uma fórmula, com parâmetros $\bar{y} = (y_1, \ldots, y_n)$ em X, e tal que desses axiomas deduzimos $\exists x\, A(x, \bar{y})$, então existe x em X, tal que podemos deduzir que $A(x, \bar{y})$.*

Ou seja, não conseguiremos nem deduzir a existência do conjunto X. Observe que a dificuldade de obter X é poder escrever algo como $X = \bigcup_{n\in\omega}\mathcal{P}^n(\omega)$, usando o axioma da união. Precisaríamos ter obtido o conjunto Y, cujos elementos sejam $\mathcal{P}^n(\omega)$, para cada $n \in \omega$.

Essa observação levou Abraham Fraenkel e, independentemente, Thoralf Skolem, a postular um novo axioma.

O Axioma da Substituição: Para cada fórmula $\varphi(x, y, \bar{u})$ temos um axioma $\forall u[\forall x\forall y\forall z((\varphi(x, y, \bar{u}) \wedge \varphi(x, z, \bar{u})) \rightarrow y = z) \rightarrow \forall s\exists t\forall y(y \in t \leftrightarrow \exists x(x \in s \wedge \varphi(x, y, \bar{u})))]$. Se φ define uma função (com parâmetros $\bar{u}$) então a imagem de um conjunto também é um conjunto.

Definimos os conjunto de axiomas listados até este ponto (extensionalidade, vazio, par, união, partes, separação, infinito e substituição) de ZF^-, usando as iniciais de Zermello e Fraenkel, com o índice $^-$ indicando que ainda falta o axioma da regularidade, que será introduzido posteriormente.

Para podermos definir a união $X = \bigcup_{n\in\omega}\mathcal{P}(\omega)$, usando o axioma da substituição, precisamos definir uma função, que a cada $n \in \omega$ associe o conjunto $\mathcal{P}^n(\omega)$. Na verdade, precisamos definir na linguagem da Teoria dos Conjuntos a regra:

1. $\mathcal{P}^0(\omega) = \omega$
2. $\mathcal{P}^{n+1}(\omega) = \mathcal{P}(\mathcal{P}^n(\omega))$

Pelo Teorema da Recursão Finita (Teorema 10), usando a função $g(n, x) = \mathcal{P}(x)$, com $a_0 = \omega$, obtemos a fórmula $\varphi(x, y)$, dizendo que $x \in \omega$ e $y = \mathcal{P}^x(\omega)$. Daí:

Exercício 27 *Mostre que, juntando esse novo axioma, podemos deduzir a existência do conjunto* $X = \bigcup_{n\in\omega}\mathcal{P}^n(\omega)$.

3.9 O Axioma da Regularidade

O axioma que vamos introduzir agora não é realmente necessário para aplicações às outras áreas da matemática, mas tem um papel importante em teoria dos conjuntos e nos permite demonstrar uma versão do princípio da indução finita mais geral em sobre qualque rconjunto, não apenas sobre os números naturais.

A propriedade de ω que usamos para demonstar o princípio da indução finita foi a de que todo subconjunto não vazio de ω possui um menor elemento, na ordem natural de ω dada pela relação de pertinência.

Para generalizar essa ideia, dizemos que a fórmula $A(x_0, x_1)$ define uma **relaçãoregular** ou, também chamada de **relação bem fundada**[9], se satisfizer as duas condições a seguir:

1. $\forall x\,(x \neq \varnothing \rightarrow \exists v\,(v \in x \wedge \forall w\,(w \in x \rightarrow \neg A(w, v))))$, ou seja, para cada $x \neq \varnothing$, existe um elemento $v \in x$ que é A-mínimo;

2. $\exists u(x \subset u \wedge \forall v, w\,(v \in u \wedge A(w, v) \rightarrow w \in u))$; existe um conjunto u contendo x, que é A-fechado (para baixo).

Axioma da Regularidade ou da Fundação: $\forall x(\exists z(z \in x) \rightarrow \exists z(z \in x \wedge \forall y(y \in z \rightarrow y \notin x)))$. Ou seja, se $x \neq \varnothing$ então existe um $y \in x$ tal que $x \cap y = \varnothing$.

Exercício 28 *Mostre que a relação de pertinência $\in$ é bem fundada. Quais axiomas são necessários para demonstrar essa afirmação?*

Exercício 29 *Seja $A(x_0, x_1)$ uma fórmula definindo uma relação regular. Mostre que, para todo conjunto não vazio x, não existe seqüência $v_n \in x$, $n \in \omega$, tal que, para todo $n \in \omega$, $A(v_{n+1}, v_n)$. Também não existe $v \in x$, tal que $A(v, v)$.*

3.9.1 Recursão e Indução em Relações Regulares

Podemos copiar a demonstração do princípio da indução finita e o Teorema da Recursão Finita e obter *versões transfinitas* desses resultados.

[9]Bem fundada no sentido de fundação de uma construção. Intuitivamente, uma construção bem fundada é aquela que podemos ver logo as fundações ao descer ao subsolo.

Exercício 30 ***(Indução Transfinita)*** *Seja $A(x, y)$ uma fórmula definindo uma relação regular. Seja $B(x, \bar{v})$ uma fórmula, com as variáveis livres x e $\bar{v} = (v_1, \ldots, v_n)$ (essas funcionam como parâmetros), tal que possamos deduzir*

$$B(\varnothing, \bar{v}) \wedge \forall x\,((\forall y\, A(y, x) \wedge B(y, \bar{v})) \rightarrow B(x, \bar{v})).$$

Mostre que podemos deduzir $\forall x\, B(x, \bar{v})$. Tome cuidado com a definição de relação regular. Que axiomas são realmente necessários aqui?

Exercício 31 ***(Recursão Transfinita)*** *Seja $A(x, y)$ uma fórmula que defina uma relação regular. Seja $G(x, y, z, \bar{v})$ uma fórmula com as variáveis livres x, y, z e $\bar{v} = (v_1, \ldots, v_n)$ (essas funcionam como parâmetros), tal que possamos deduzir*

$$\forall x, y\, \exists z\, G(x, y, z, \bar{v}) \wedge \forall x, y, z_1, z_2\, ((G(x, y, z_1, \bar{v}) \wedge G(x, y, z_2, \bar{v})) \rightarrow z_1 = z{+}2)$$

(ou seja, G define uma função, em qualquer conjunto que impusermos como domínio). Seja y_0 um conjunto. Mostre que existe uma fórmula $F(x, z, \bar{v})$ tal que podemos deduzir

1. *$\forall x\, \exists y\, F(x, y, \bar{v}) \wedge \forall x, y_1, y_2\, ((F(x, y_1, \bar{v}) \wedge F(x, y_2, \bar{v})) \rightarrow y_1 = y_2)$ (ou seja F define uma função em qualquer conjunto que impusermos como domínio);*

2. *$F(\varnothing, y_0, \bar{v})$ (o valor de F em $\varnothing$ é y_0);*

3. *$\forall x\, \exists y\, (F(x, y, \bar{v}) \leftrightarrow (\exists t\, (\forall w\, (w \in t \leftrightarrow \exists u(A(u, x) \wedge F(u, w)))) \wedge G(x, t, y, \bar{v})))$, ou seja, o valor de F em x é o valor de G em x e em t, o conjunto dos valores de F em todo w que satisfaz $A(w, x)$.*

Quais axiomas são necessários aqui? Por que t é um conjunto?

3.10 O Axioma da Escolha

Historicamente, o axioma da escolha já era usado intuitivamente antes de ser enunciado por Ernest Zermello [10]

[10] Ele mesmo o enunciou e deu esse nome, nas suas demonstrações de que todo conjunto pode ser bem ordenado, *Beweis, dass jede Menge wohlgeordnet werden kann*, Math. An-

O AXIOMA DA ESCOLHA: $\forall u[[\forall x\,(x \in u \to \exists y(y \in x)) \wedge \forall y, y \in u\,(x = y \vee x \cap y = \varnothing)] \to \exists v \forall x \in u\, \exists! y(y \in x \wedge y \in v)]$. Ou seja, se u é uma família de conjuntos não vazios e dois a dois disjuntos, então existe um conjunto v contendo exatamente um elemento de cada $x \in u$.

Esse axioma, devido à sua importância, será estudado no próximo capítulo, todo dedicado a ele.

Exercício 32 *Mostre que o axioma da escolha implica que, dado um conjunto u, cujos elementos sejam não vazios, então exists uma **função de escolha** $\phi : u \to \bigcup u$, tal que $\phi(x) \in x$, para cada $x \in u$. Sugestão: considere o conjunto v dos pares ordenados $(\{x\}, x)$, $x \in u$.*

3.11 Axiomatização de KM

O topólogo John Kelley publicou no apêndice de seu livro *General Topology* [11] sua versão da Teoria dos Conjuntos, fortemente baseada em textos da A. Morse, levando em conta a Teoria dos Conjuntos de von Neumann, Bernays e Gödel.

A Teoria de Conjuntos de Kelley-Morse tem o aspecto positivo de usar a notação de conjuntos mais intuitiva $\{x : A(x)\}$ (o conjunto dos x, tais que $A(x)$), mas sua formalização é um pouco complexa.

A linguagem formal contém símbolos não lógicos $\in$ (um símbolo relacional binário para a pertinência) e $\{\cdots : \cdot\}$ (este é novidade: formador de termos).

Definiremos indutivamente termos e fórmulas:

1. variáveis são termos e essas variáveis são consideradas livres nos termos;

2. sejam u e t dois termos; então $u = t$ e $u \in t$ são fórmulas;

nalen, Vol. 59 (1904), pp. 514-516; *Neuer Beweis für die Wohlordnung*, Math. Annalen, Vol. 65 (1908), pp. 107-128; *Untersuchungen über die Grundlagen der Mengenlehre*, Math. Annalen, Vol. 65 (1908), pp. 261-281; todos com tradução em inglês em *From Frege to Gödel*, já citada.

[11] Editora Van Nostrand, EUA, 1955. Reimpresso pela Springer-Verlag em 1975. Veja as páginas 250 a 281.

3. se $A(x, y_1, \ldots, y_n)$ for uma fórmula, cujas variáveis livres estejam entre as listadas, então $\{x : A(x, y_1, \ldots, y_n)\}$ é um termo, em que x não é mais variável livre [12]

4. se A e B forem fórmulas, então $A \wedge B$, $A \vee B$, $A \rightarrow B$ são fórmulas, cujas variáveis livres são aquelas que ocorrerem livres em pelo menos um das fórmulas A ou B; $\neg A$ também é fórmula, com as mesmas variáveis livres que A;

5. se A for uma fórmula, então $\forall x\, A$ e $\exists x\, A$ serão fórmulas em que a variável x deixa de ser livre.

Listaremos os seus axiomas. Por conveniência chamaremos os objetos designados pelas variáveis ou por termos de **classes**.

(KM) Axioma da extensionalidade:

$$\forall x, y\, (x = y \leftrightarrow \forall z, (z \in x \leftrightarrow z \in y)).$$

Duas classes são iguais se, e somente se, possuírem os mesmos elementos.

(KM) Axioma da Classificação: para cada fórmula $A(x)$, com essa variável livre,

$$y \in \{x : A(x)\} \leftrightarrow \exists z\, (y \in z \wedge A(y)).$$

um elemento y pretence à classe $\{x : A(x)\}$ se, e somente se, existir uma classe z cà qual y pertença e que satisfaça $A(y)$. Aqui supomos que a variável y possa ser substituída na fórmula $A(x)$.

Uma classe x, tal que pertença a uma classe y, é chamada de **conjunto**.

(KM) Axioma dos Subconjuntos:

$$\forall x\, (\exists z\, x \in z \rightarrow \exists y\, \exists u\, (y \in u \wedge \forall t\, (t \subset x \rightarrow t \in y))).$$

Para cada *conjunto* x, existe um *conjunto* y que contém todos os subconjuntos de x.

[12] Para entender isso, leia-se *o conjunto dos x, tais que* $A(x, \bar{y})$. Quando falamos no *conjunto dos x*, a variável x tem um papel diferenciado nessa expressão: chamamos essa limitação da variável x de **abstração**.

(KM) Axioma da União:

$$\forall x, y\,(\exists z, w\,(x \in z \wedge y \in w) \to \exists u\,\{t : t \in x \vee t \in y\} \in u).$$

Para enunciá-lo em português, seja $x \cup y = \{z : z \in x \vee z \in y\}$. Este axioma diz que se x e y forem conjuntos, então sua união $x \cup y$ também será um conjunto.

A definição de relação binária e de função segue as mesmas linhas de ZF.

(KM) Axioma da substituição:

$$\forall f\,((\text{“}f \text{ é função”} \wedge \exists x\,\mathrm{Dom}(f) \in x) \to \exists y\,\mathrm{Im}(f) \in y).$$

Toda função cujo domínio seja um conjunto terá como imagem um conjunto.

(KM) Axioma da Amalgamação:

$$\forall x\,((\exists y\, x \in y) \to \exists z\,\{t : \exists w\,(w \in x \wedge t \in w)\} \in z).$$

Para todo conjunto x, a classe $\bigcup x = \{t : \exists w\,(w \in x \wedge t \in w)\}$ também será conjunto.

(KM) Axioma da Regularidade:

$$\forall x\,((\exists y\, y \in x) \to \exists y\,(y \in x \wedge \forall t\,(t \in y \to t \notin x))).$$

Toda classe x tem um elemento y, tal que $y \cap x = \varnothing$.

(KM) Axioma do Infinito:

$$\exists x\,\exists y\,(x \in y \wedge \varnothing \in x \wedge \forall z\,(z \in x \to z \cup \{z\} \in x)).$$

Existe um conjunto x que tem o vazio como elemento e, para cada elemento $z \in x$, $z \cup \{z\} \in x$.

Para enunciarmos o axioma da escolha, introduziremos alguma notação para torná-lo legível. Seja $\mathcal{U} = \{x : x = x\}$ (a classe universal). Diremos que uma classe f, cujos elementos sejam pares ordenados de conjuntos, é uma função, se satisfizer $\forall (x, y), (x, z) \in f(y = z)$. Seu domínio é classe $\mathrm{Dom}(f) = \{x : \exists y\, (x,y) \in f\}$ e sua imagem é a classe $\mathrm{Im}(f) = \{y : \exists x\, (x,y) \in f\}$.

(KM) Axioma da Escolha:

$$\exists f\, (\text{“}f \text{ é função”} \wedge \forall x\, ((x \in \mathcal{U} \wedge x \neq \varnothing) \rightarrow f(x) \in x)).$$

Existe uma função f que escolhe um elemento $f(x)$ de cada conjunto não vazio x.

Exercício 33 *Mostre que cada axioma sobre conjuntos de ZF pode ser demonstrado em KM.*

3.11.1 Conjuntos e classes próprias

A teoria KM diferencia classes de conjuntos. Uma classe que não seja conjunto será designada como **classe própria**.

Exercício 34 *Mostre que as seguintes classes são próprias. Você deve argumentar por contradição, supondo que cada uma delas seja um conjunto e obter uma contradição.*

1. *a classe* $\mathcal{U} = \{x : x = x\}$*;*
2. *a classe* $\{x : x \notin x\}$
3. *a função*f *do axioma da escolha.*

3.11.2 Críticas

Observe que KM é uma extensão de ZF, no sentido que podemos deduzir todos os axiomas (e, por conseguinte, todos os teoremas) de ZF.

O lógico matemético Joseph Shoenfield postou na *Internet*[13], em 14 de fevereiro de 2000, suas críticas ao sistema KM. Ele observou que essa teoria não é extensão conservativa de ZF, pois existem resultados expressíveis na

[13]http://www.cs.nyu.edu/pipermail/fom/2000-February/003740.html

linguagem de ZF, que são deduzíveis de KM, mas não de ZF. Não podemos expor ainda esse resultado aqui, pois demandaria muitas páginas. Como ZF é a Teoria dos Conjuntos mais usada, não aceita que qualquer extensão que introduzisse classes próprias também fizessem surgir novos teoremas na linguagem de ZF (portanto, referindo-se apenas a conjuntos).

A Teoria KM permite a quantificação sobre classes, pressupondo, assim, uma totalidade de todas as classes. Em ZF, não se pressupõe a totalidade dos conjuntos, apresentando um certo aspecto de construtividade. Por isso, dizemos que ZF é uma teoria *predicativa*, em que os conjuntos são construídos partir de poucos que foram postulados (o axioma do vazio e do infinito), usando axiomas que permitem tais construções (todos os outros, exceto o da extensionalidade). No caso em que se pressupõe a totalidade das classes próprias sem construí-las, chamamos a teoria de *impredicativa*. Vários estudiosos da Teoria dos Conjuntos não gostam de teorias impredicativas.