Capítulo 4

Ordinais e Recursão Transfinita

Vamos entrar agora em um assunto de muita aplicação em matemática, que são os ordinais e a recursão transfinita sobre ordinais.

Boa parte do capítulo pode ser desenvolvida em ZF, sem o axioma da escolha. Para tornar isso evidente, toda vez que enunciarmos um resultado, explicitaremos se vale em ZF ou se necessitamos do axioma da escolha (ou de ZFE).

4.1 Conjuntos Transitivos

Uma das propriedades interessantes dos ordinais, como veremos mais adiante, é a transitividade.

Um **conjunto transitivo** x é aquele que satisfaz $\forall y \forall z\,((y \in x \wedge z \in y) \rightarrow z \in x)$, ou seja, para todo $y \in x$, temos que $y \subset x$.

Já conhecemos diversos exemplos de conjuntos transitivos: cada $\mathbf{n} \in \omega$ e o próprio ω (exercício: verifique).

O que vamos provar é que cada conjunto pode ser incluído em um menor conjunto transitivo.

Lema 12 *(ZF) Para todo conjunto x, existe um conjunto y, tal que y é transitivo, $x \subset y$ e para todo conjunto transitivo z, tal que $x \subset z$, temos que $y \subset z$. Esse conjunto y é chamado de **fecho transitivo de** x.*

Demonstração:

Obteremos esse conjunto por recursão em ω, usando a função união: $y = \bigcup_{n\geq 0} \cup^n x$, sendo que $\cup^0 x = x$ e $\cup^{n+1} x = \bigcup \cup^n x$.

Por recursão, criamos uma fórmula $F(n, t, z)$ dizendo que $z = \cup^n t$. O axioma da substituição diz que existe o conjunto $\{x, \cup x, \cup^2 x, \ldots\}$, imagem da função dada por F.

Por fim, usamos o axioma da união, obtendo y.

Claramente $x \subset y$. Agora, seja $t \in y$ e $w \in t$. Então exists $n \in \omega$, tal que $t \in \cup^n x$. Daí, temos que $w \in \bigcup t = \cup^{n+1} x$, ou seja, $t \in y$, demonstrando que y é um conjunto transitivo.

Por fim, suponhamos que z seja um conjunto transitivo e que $x = \cup^0 x \subset z$. Supondo que $\cup^n x \subset z$ e sabendo que z é transitivo, concluímos que $\cup^{n+1} x \subset z$. Portanto, pelo princípio da indução finita, temos que $y \subset z$, como queríamos. $\square$

O próximo resultado será usado posteriormente.

Lema 13 *Se x for um conjunto transitivo, então $\mathcal{P}(x)$ também será transitivo.*

Demonstração: Suponhamos que $y \in \mathcal{P}(x)$ e que $t \in y$. Então $y \subset x$ e $t \in y$ implica $t \in x$. Como x é transitivo, temos que $t \subset x$ e, portanto, $t \in \mathcal{P}(x)$. $\square$

Exercício 35 *Mostre que se x for um conjunto, cujos elementos sejam conjuntos transitivos, então $\bigcup x$ será também um conjunto transitivo.*

4.2 Boa Ordem

Ordinais medem o que chamamos de boa ordem.

Dado um conjunto x, uma relação de ordem $<\subset x \times x$ é uma **boa ordem** se satisfizer $\forall z\,((z \subset x \wedge z \neq \varnothing) \rightarrow \exists w\,(w \in z \wedge \forall t\,(t \in z \rightarrow (t = w \vee w < t))))$. Ou seja. todo subconjunto não vazio de x possui um elemento mínimo em relação à ordem. Chamamos x, nesse caso, de **conjunto bem ordenado**.

Já encontramos anteriormente conjuntos bem ordenados: cada $\mathbf{n} \in \omega$ e o próprio ω.

Um resultado que depende do axioma da escolha[1] é o seguinte.

Teorema 11 ***(Zermello[2])*** *(ZFE) Todo conjunto pode ser bem ordenado (ou seja, para todo x, existe uma relação de boa ordem $r \subset x \times x$).*

Demonstração: Vamos apresentar aqui a demonstração de 1908 de Ernst Zermello.

Dado um conjunto M, seja $\phi : \mathcal{P}(M) \to M$ uma função que escolhe um elemento $\phi(X) \in X$, para cada $X \subset M$. Chamaremos de Θ-cadeia (em M) a todo subconjunto $\Psi \subset \mathcal{P}(M)$, tal que:

1. $M \in \Psi$;
2. para todo $A \in \Psi$, temos $A' = A \setminus \{\phi(A)\} \in \Psi$;
3. para todo $W \subset \Psi$, temos $\bigcap W \in \Psi$.

Em particular, $\mathcal{P}(M)$ é uma Θ-cadeia e o conjunto Ξ de todas as Θ-cadeias é um subconjunto bem definido (pelo axioma da separação) de $\mathcal{P}(\mathcal{P}(M))$.

Seja $\Omega = \bigcap \Xi$, a interseção de todas as Θ-cadeias. Então Ω também é uma Θ-cadeia (exercício:verifique).

Vamos mostrar a seguir como obter uma relação de boa ordem em M a partir de Ω.

Afirmação 1: Ω tem a propriedade de que, para cada $A, B \in \omega$, ou $A \subset B$, ou $B \subset A'$.

Observemos que $A = M \in \Omega$ tem a propriedade da afirmação. Suponha que $A \in \omega$ tenha aquela propriedade, para todo $B \in \Omega$. Tal conjunto existe, pois M tem essa propriedade. Então, dado $B \in \Omega$, se $B \neq A$, então ou $A \subset B$, ou $B \subset A' = A \setminus \{\phi(A)\}$. Seja Ω_A o subconjunto de Ω formado

[1] Na verdade, veremos mais adiante que é equivalente ao axioma da escolha, assumindo apenas ZF.

[2] Zermello publicou mais de uma demonstração de que todo conjunto pode ser bem ordenado. Veja, por exemplo, seus artigos publicados na obra *From Frege to Gödel*, já citada, originalmente publicadas em 1904 e 1908.

pelos $B \in \Omega$, tais que ou $A \subset B$, ou $B = A$, ou $B \subset A'$. Temos que $M \in \Omega_A$; se $B \in \Omega_A$, então $B' = B \setminus \{\phi(B)\} \in \Omega_A$, pois, se $B \subset A'$, então $B' \subset A'$, e se $A \subset B$, mas $A \neq B$, então $A \subset B'$, dado que $B' \in \Omega$ e a definição de Ω_A garante que $A \subset B'$; por fim, se $W \subset \Omega_A$, então $\bigcap W \in \Omega_A$, pois podemos dividir W em dois subconjuntos, W_1 consistindo dos conjuntos $B \in \Omega$, tais que $A \subset B$, e W_2, dos conjuntos $B \in \Omega_A$, tais que $B \subset A'$. Então $\bigcap W = (\bigcap W_1) \cap (\bigcap W_2)$, e $A \subset \bigcap W_1$ (que, por isso, pertence a Ω_A), e $\bigcap W_2 \subset A'$ (ou seja, $\bigcap W_2 \in \Omega_A$). Portanto, ou $A \subset \bigcap W$, ou $\bigcap W \subset A'$. Isso significa que Ω_A também é uma Θ-cadeia. Cocnluímos, assim, que $\Omega_A = \Omega$ e, consequentemente, para todo $B \in \Omega$, ou $A \subset B$ (incui-se aí o caso $A = B$), ou $B \subset A'$.

Agora, repetindo o mesmo tipo de argumento, obtemos que se A possuir a propriedade de que todo $B \in \Omega$, ou $A \subset B$, ou $B \subset A'$, então A' também tem a mesma propriedade. Também que, se $W \subset \Omega$ for um conjunto, cujos elementos tem essa propriedade, então $\bigcap W$ também a tem.

Isso demonstra a afirmação 1.

Afirmação 2: para cada $A, B \in \Omega$, se $A \neq B$, $A \neq \varnothing$ e $B \neq \varnothing$, então $\phi(A) \neq \phi(B)$.

De fato, se A e B forem distintos elementos de Ω, ou $A \subsetneq B$, ou $B \subsetneq A$. No primeiro caso, $A \subset B'$, e no segundo, $B \subset A'$. Em ambos os casos, teremos que $\phi(A) \neq \phi(B)$.

Afirmação 3: para cada $P \subset M$, existe um único elemento $P_0 \in \Omega$, tal que $P \subset P_0$ e $\phi(P_0) \in P$. No caso em que $P = \{a\}$, tal conjunto P_0 será denotado $\mathfrak{R}(a)$.

Seja $P_0 = \bigcap W$, sendo que W é o conjunto de todos os elementos $A \in \Omega$ e $P \subset A$. Observe que $W \neq \varnothing$, pois $M \in W$. Seja $p_0 = \phi(P_0)$. Observemos que $p_0 \in P$, pois, senão, $P_0' \in W$ e P_0 não poderia ser aquela interseção. Pela definição de Ω, se $\tilde{P}_0 \in \Omega$ também satisfizesse $P \subset \tilde{P}_0$ e $\phi(\tilde{P}_0) \in P$, pela afirmação 1, ou $P_0 \subsetneq \tilde{P}_0$, caso em que $\phi(\tilde{P}) \notin \tilde{P}_0' \supset P_0 \supset P$, uma contradição; ou $\tilde{P}_0 \subset P_0$, caso em que $P \not\subset \tilde{P}_0$, devido à definição da coleção W, outra contradição. Sobrou apenas o caso em que $\tilde{P}_0 = P_0$, ou seja, a unicidade desejada.

Afirmação 4: a relação $a \prec b$ em M, definida por $b \in \mathfrak{R}(a)$ e $a \neq b$, é uma ordem linear em M.

Precisamos mostrar que

1. se $a \prec b$, então $b \not\prec a$, pois, como $b \neq a$ e $b \in \mathfrak{R}(a)$, então $b \in \mathfrak{R}(a)'$ e, portanto, $a \notin \mathfrak{R}(a)$, por causa da definição da função $\mathfrak{R} : M \to \Omega$;

2. se $a \prec b$ e $b \prec c$, então $a \prec c$, pois se a, b e c forem elementos distintos, $b \in \mathfrak{R}(a)$ e $c \in \mathfrak{R}(b)$, então, $\mathfrak{R}(c) \subset \mathfrak{R}(b) \subset \mathfrak{R}(a)$, donde segue que $c \in \mathfrak{R}(a)$;

3. para todo $a, b \in M$, ou $a \prec b$, ou $a = b$, ou $b \prec a$, pois, se $a \neq b$, considerando o conjunto P_0, correspondente a $P = \{a, b\}$, e a definição da função $\mathfrak{R}$, temos que, se $\phi(P_0) = a$, então $P_0 = \mathfrak{R}(a)$, pela afirmação 2; analogamente, se $\phi(P_0) = b$, então $P_0 = \mathfrak{R}(b)$.

Afirmação 5: a relação de ordem $\prec$ em M é uma boa ordem.

Seja $P \subset M$ um subconjunto não vazio, e seja P_0 o elemento de Ω correspondente. Então $p_0 = \phi(P_0) \in P$, pela definição de P_0, e $P_0 = \mathfrak{R}(p_0)$. Portanto, todo elemento $a \in P \subset P_0$ é elemento de $\mathfrak{R}(p_0) = P_0$, ou seja, ou $a = p_0$ ou $p_0 \prec a$.$\square$

4.3 Ordinais

Os ordinais foram criados por G. Cantor em 1895 e 1897 [3] como a abstração da ideia de conjunto bem ordenado.

John von Neumann [4] introduziu a noção atual de ordinal, evitando a vagueza das ideias de Cantor.

Resumidamente, um ordinal é um conjunto transitivo, bem ordenado pela relação de pertinência, $\in$. Já conhecemos alguns exemplos: cada $n \in \omega$ e o próprio ω.

---

[3] Beitrage zur Begrundung der transfiniten Mengenlehre, Parte I, *Mathematische Annalen* 46 (1895), 481-512, e Parte II, *idem*, 49 (1897), 207-246; existe uma tradução para o inglês, *Contributions to the Founding of the Theory of Transfinite Numbers*, Open Court, Chicago, EUA, 1915.

[4] Publicada no artigo de 1923, *Zur Einfürung der transfiniten Zahlen*, com tradução em inglês na obra *From Frege to Gödel*, já citada.

Lema 14 *Cada ordinal x é o conjunto de todos os ordinais menores do que x.*

Demonstração: Seja x um ordinal e $y \in x$. Então $y \subset x$ e y também é transitivo e bem ordenado por $\in$. Ou seja, y também é um ordinal. $\square$

Lema 15 *Se x for um ordinal, então $x \cup \{x\}$ também será um ordinal, chamado de* ***ordinal sucessor*** *de x.*

Demonstração: Como x é conjunto transitivo, $x \cup \{x\}$ também o é. A relação $\in$ é claramente uma ordem linear em $x \cup \{x\}$. Se $a \subset x \cup \{x\}$ for não vazio, ou $a = \{x\}$ e x é o seu menor elemento, ou $a \cap x \neq \varnothing$, e $a \cap x$ tem um menor elemento, pois x é bem ordenado. Assim, $x \cup \{x\}$ é bem ordenado e, portanto, um ordinal. $\square$

Lema 16 *Se x e y forem ordinais, então ou $x \in y$, ou $x = y$, ou $y \in x$.*

Demonstração: Suponhamos que $x \neq y$. Então, ou $a = x \setminus y \neq \varnothing$, ou $b = y \setminus x \neq \varnothing$, pelo axioma da extensionalidade.

Consideremos o caso $a = x \setminus y \neq \varnothing$. Como $a \subset x$ e x é bem ordenado, então existe $z \in a$ que é mínimo, em relação à ordem dada pela pertinência, $\in$. Neste caso, $z = x \cap y$ (exercício: por que?).

Afirmamos que $z = y$ e, portanto $y \in x$. De fato, se tivéssemos $z \neq y$, então o conjunto $b = y \setminus x$ seria não vazio e, assim, possuiria um mínimo $w \in b$. Novamente, teríamos que $w = x \cap y = z \in x$, contradizendo a hipótese de que $w \in y \setminus x$. Consequentemente, $y \in x$.

Analogamente, da hipótese que $b = y \setminus x \neq \varnothing$, concluímos que $x \in x$. $\square$

Lema 17 *Seja x um conjunto de ordinais. Então $\bigcup x$ é um ordinal.*

Demonstração: Seja $y \in x$, um ordinal. Então $y \subset \bigcup x$, pela definição de união. Se $t \in \bigcup x$, então existe $y \in x$, tal que $t \in y$. Como y é transitivo, concluímos que $t \subset \bigcup x$, ou seja, $\bigcup x$ é um conjunto transitivo.

Agora, sejam $y, z \in \bigcup x$, tais que $x \neq y$. Então y e z são ordinais (exercício: por que?). Então, ou $y \in z$, ou $z \in x$. Junto com a transitividade de $\bigcup x$, concluímos que $\in$ é uma ordem linear em $\bigcup x$.

Para mostrarmos que $\in$ define uma boa ordem em $\bigcup x$, seja $w \subset \bigcup x$ um conjunto não vazio. Seja $y \in w$. Então, se $y \cap w = \varnothing$, concluímos que y é o mínimo de w (exercício: por que?). Caso $y \cap w \neq \varnothing$, então o mínimo de $w \cap y$ em y é o mínimo de w em $\bigcup x$.

Isso termina a demonstração de que $\bigcup x$ é um ordinal. $\square$

Seja $x \in \mathsf{Ord}$ a fórmula dizendo que x é um ordinal; seja Ord a classe definida por essa fórmula. O paradoxo de Burali-Forti pode ser expresso no seguinte resultado.

Teorema 12 *A classe* Ord *não é um conjunto.*

Demonstração: Se fosse um conjunto, seria um ordinal e, portanto, teríamos que $\mathsf{Ord} \in \mathsf{Ord}$, o que é rejeitado pelo axioma da regularidade. $\square$

NOTAÇÃO: usaremos doravante letras gregas minúsculas α, β, etc. para denotar ordinais. No caso dos elementos de ω, usaremos a notação usual $0 = \varnothing$, e $n + 1 = \{0, 1, \ldots, n\}$. A relação de pertinência usada como ordem nos ordinais será denotada pelo símbolo $<$: $\alpha < \beta$ significa $\alpha \in \beta$.

Vimos que se α for um ordinal, então $\alpha \cup \{\alpha\}$ também é ordinal, que será denotado $\alpha + 1$, e este é chamado de **ordinal sucessor**.

Lema 18 *Seja x um conjunto de ordinais, tal que* $\forall \alpha \in x \, \exists \beta \in x \, (\alpha \in \beta)$. *Então o ordinal* $\lambda = \bigcup x$ *não é sucessor.*

Demonstração: Seja $\alpha \in \lambda$. Então existe $\beta \in x$, tal que $\alpha \in \beta$ e existe $\gamma \in x$, tal que $\beta \in \gamma$. Daí, $\alpha + 1 \in \gamma \subset \bigcup x$. Assim, não existe $\alpha \in \lambda$, tal que $\gamma = \alpha + 1$. $\square$

O ordinal $\lambda \neq 0$ que não for sucessor será chamado de **ordinal limite**.

Exercício 36 *Mostre que o ordinal* λ *é limite se, e somente se,* $\lambda = \bigcup \lambda$.

Um ordinal α é dito **enumerável** se existir uma função $f\omega \to \alpha$ bijetora. Essa função é dita uma **enumeração** de α.

Seja $\omega_1 = \{\alpha \in \mathsf{Ord} : \alpha \text{ é enumerável}\}$. Então ω_1 é uma classe de ordinais.

Exercício 37 *(ZF) Mostre que se $\alpha \in \omega_1$, então $\alpha \subset \omega_1$.*

Exercício 38 *(ZF) Mostre que se ω_1 for um conjunto, então será um ordinal. Mostre também que, nesse caso, $\omega_1 = \bigcup \omega_1$.*

Exercício 39 *(ZFE) Mostre que ω_1 é o menor ordinal não enumerável.*

No exercício anterior fizemos uso do axioma da escolha para bem ordenar o conjunto $\mathcal{P}(\omega)$, que não pode ser enumerável:

Lema 19 *(ZF) O conjunto $\mathcal{P}(\omega)$ não é enumerável.*

Demonstração: Suponhamos, por absurdo, que $\mathcal{P}(\omega)$ fosse enumerável, por uma função bijetora $f : \omega \to \mathcal{P}(\omega)$. Seja $X = \{W \in \mathcal{P}(\omega) : f^{-1}(W) \notin W\}$ (sendo que $f^{-1} : \mathcal{P}(\omega) \to \omega$ seria a função inversa da f).

Daí, obteríamos que $f^{-1}(X) \in X \leftrightarrow f^{-1}(X) \notin X$, uma contradição.

Isso mostra que $\mathcal{P}(\omega)$ não é enumerável. $\square$

Exercício 40 *(ZFE) Mostre que se X for um conjunto enumerável de ordinais enumerável, então $\bigcup X$ é um ordinal enumerável.*

4.3.1 Recursão e Indução Transfinita

Já enunciamos resultados para indução e recursão transfinitas em geral, mas é bom termos em mãos suas versões sobre os ordinais.

Teorema 13 ***(Recursão nos Ordinais)*** *(ZF ou ZFE) Seja $G(x, y, z, v_1, \ldots, v_n)$, uma fórmula, tal que de ZF (ou ZFE) se deduz que*

$$\forall x, y, z, v_1, \ldots, v_n \, (x \in \mathsf{Ord} \to \exists! w \, G(x, y, z, w, v_1, \ldots, v_n)),$$

ou seja, G define uma função, cuja primeira variável percorre Ord. *Seja a um conjunto. Então existe uma fórmula $F(x, y, v_1, \ldots, v_n)$, tal que de ZF deduzimos*

$$\forall v_1, \ldots, v_n \, (F(0, a, v_1, \ldots, v_n) \wedge \forall \alpha \, (\alpha \in \mathsf{Ord} \rightarrow \exists ! y, z \, (F(\alpha, z, \bar{v}) \wedge$$

$$\wedge \; F(\alpha + 1, y, \bar{v}) \wedge G(\alpha, z, y, \bar{v}))) \wedge$$

$$\wedge \; \forall \lambda \, (\lambda \in \mathsf{Ord} \wedge \text{“}\lambda \textit{ limite”} \rightarrow \exists ! y \, (F(\lambda, y, \bar{v}) \wedge \exists w \, (y = \bigcup w \; \wedge$$

$$\wedge \; \forall t \, (t \in w \leftrightarrow \exists \alpha < \lambda \, (F(\alpha, t, \bar{v}))))))).$$

Isto significa que F define uma função f dos ordinais a valores conjuntos, tal que $f(0) = a$, $f(\alpha + 1) = g(\alpha, f(\alpha))$ e $f(\lambda) = \bigcup_{\alpha<\lambda} f(\alpha)$, sendo que $g(x, y)$ é a função dada pela fórmula g.

Exercício 41 *Escreva uma demonstração para este teorema.* □

Teorema 14 ***(Indução nos Ordinais)*** *Seja $F(x, \bar{v})$ uma fórmula, tal que de ZF (ou ZFE) deduz-se*

$$\forall \bar{v} \, (f(0, \bar{v}) \wedge \forall \alpha \in \mathsf{Ord} \, ((\forall \beta \in \mathsf{Ord} \, \beta < \alpha \wedge F(\beta)) \rightarrow F(\alpha))).$$

Então podemos deduzir $\forall \alpha \in \mathsf{Ord} \, F(\alpha, \bar{v})$.

Exercício 42 *Escreva uma demonstração para este teorema.* □

Esses dois resultados serão muito usados no que se segue. Para facilitar as aplicações, usamos os dois teoremas na forma:

1. caso inicial: $\alpha = 0$
2. caos do sucessor: de α para $\alpha + 1$
3. caso limite: de todo $\beta < \lambda$ para λ.

4.3.2 Operações com Ordinais

Por recursão nos ordinais (feita em ZF), definimos a operação de **soma de ordinais** por:

1. $\alpha + 0 = \alpha$
2. $\alpha + (\beta + 1) = (\alpha + \beta) + 1$
3. se λ for ordinal limite, $\alpha + \lambda = \bigcup_{\beta<\lambda} \alpha + \beta$.

Observe-se que essa operação não é comutativa, pois $1 + \omega = \omega \neq \omega + 1$.

Exercício 43 *Mostre que se λ for ordinal limite e $x \subset \lambda$ for um conjunto, tal que $\forall \alpha < \lambda \, \exists \beta \, (\beta \in x \wedge \alpha < \beta)$, então $\bigcup x = \lambda$.*

Exercício 44 *Mostre que se β for ordinal limite, então para cada ordinal α, $\alpha + \beta$ também será um ordinal limite.*

Lema 20 *(ZF) A soma de ordinais é associativa.*

Demonstração: Mostraremos por indução em γ que $(\alpha + \beta) + \gamma = \alpha + (\beta + \gamma)$. O caso inicial, $\gamma = 0$ é imediato da definição.

Suponhamos que $(\alpha + \beta) + \gamma = \alpha + (\beta + \gamma)$. Então $(\alpha + \beta) + (\gamma + 1) = ((\alpha + \beta) + (\gamma) + 1 = (\alpha + (\beta + \gamma)) + 1 = \alpha + (\beta + (\gamma + 1)))$.

Se γ for ordinal limite, a hipótese de indução é

$$\forall \delta < \gamma \, ((\alpha + \beta) + \delta = \alpha + (\beta + \delta)).$$

Daí, é só aplicar a definição de soma: $(\alpha + \beta) + \gamma = \bigcup_{\delta<\gamma} (\alpha + \beta) + \delta$. Por outro lado, $\alpha + (\beta + \gamma) = \bigcup_{\delta<\gamma} \alpha + (\beta + \delta) = \bigcup_{\delta<\gamma} (\alpha + \beta) + \delta$.

Com isso, por Indução nos Ordinais, temos a associatividade da soma. $\square$

Tendo a soma, podemos agora definir por recursão (em ZF) o **produto de ordinais**:

1. $\alpha \cdot 0 = 0$

2. $\alpha \cdot (\beta + 1) = (\alpha \cdot \beta) + \alpha$

3. se λ for ordinal limite, $\alpha \cdot \lambda = \bigcup_{\beta<\lambda} \alpha \cdot \beta$.

Novamente temos a não comutatividade: $2 \cdot \omega = \omega \neq \omega + \omega = \omega \cdot 2$.

Lema 21 *(ZF) O produto de ordinais é associativo.*

Demonstração: Uma imitação do caso da soma. Exercício:escreva-a. □

Exercício 45 *Mostre que se β for ordinal limite, então para cada ordinal α, $\alpha \cdot \beta$ também será um ordinal limite.*

Lema 22 *Para cada tripla de ordinais α, β e γ, vale a distributiva (à esquerda) $\alpha \cdot (\beta + \gamma) = (\alpha \cdot \beta) + (\alpha \cdot \gamma)$.*

Demonstração: Por indução em γ, sendo o caso inicial $\gamma = 0$ imediato da definição.

Suponhamos que $\alpha \cdot (\beta + \gamma) = (\alpha \cdot \beta) + (\alpha \cdot \gamma)$. Então, usando a associatividade da soma e as definições de soma e produto, $\alpha \cdot (\beta + (\gamma + 1)) = \alpha \cdot ((\beta+\gamma)+1) = \alpha \cdot (\beta+\gamma)+\alpha = ((\alpha \cdot \beta)+(\alpha \cdot \gamma))+\alpha = (\alpha \cdot \beta)+((\alpha \cdot \gamma)+\alpha) = (\alpha \cdot \beta) + (\alpha \cdot (\gamma + 1)) = \alpha \cdot (\beta + (\gamma + 1))$.

Agora suponhamos que γ seja um ordinal limite e, como hipótese de indução, suponhamos que, para todo $\delta < \gamma$, valha $\alpha \cdot (\beta+\delta) = (\alpha \cdot \beta)+(\alpha \cdot \delta)$. Então, usando essa hipótese e a associatividade da soma, obtemos o resultado desejado (exercício: escreva os detalhes, imitando, com as modificações cabíveis, o caso da associatividade). □

Definimos **exponenciação de ordinais** por recursão (em ZF), a partir do produto:

1. $\alpha^0 = 1$

2. $\alpha^{\beta+1} = (\alpha^\beta) \cdot \alpha$

3. se λ for ordinal limite, $\alpha^\lambda = \bigcup_{\beta<\lambda} \alpha^\beta$.

Exercício 46 *(ZF) Mostre, por indução em γ, que a exponenciação de ordinais goza das seguintes propriedades:*

1. $(\alpha^\beta)^\gamma = \alpha^{\beta\cdot\gamma}$;
2. $\alpha^\beta \cdot \alpha^\gamma = \alpha^{(\beta+\gamma)}$.

Terminamos essa seção com um resultado importante.

Teorema 15 *(ZF) Seja a um conjunto bem ordenado (pela ordem $\prec \subset a\times a$). Então exists um único ordinal α e função $f : a \to \alpha$ crescente (isto é, se $x \prec y$, então $f(x) < f(y)$) e bijetora. Esse ordinal é dito o* ***tipo de ordem*** *de a.*

Demonstração: Construímos f por recursão na relação $\prec$ em a, que é bem fundada (ou regular). Suponhamos já definida f para todo $y \prec x$, para um dado $x \in a$. Definimos $f(x)$ como sendo o menor ordinal ainda não atingido por f, $f(x) = \alpha \leftrightarrow (\forall \beta < \alpha\, \exists y \in a\, (f(y) = \beta) \wedge \forall y \prec x\, f(y) < \alpha)$.

Os detalhes da construção ficam como exercício. $\square$.

Terminemos essa seção com uma nova demonstração de que todo conjunto pode ser bem ordenad, usando agora recursão.

Teorema 16 ***(Zermello)*** *(ZFE) Todo conjunto pode ser bem ordenado.*

Demonstração: Se $x = \varnothing$, então x já é bem ordenado pela relação de pertinência. Suponhamos que $x \neq \varnothing$. Mostraremos que existe uma função bijetora $f : x \to \alpha$, para um $\alpha \in \mathsf{Ord}$. Daí, x herdará a boa ordem de α por meio da função f.

Seja $\phi : \mathcal{P}(x) \smallsetminus \{\varnothing\} \to x$ uma função de escolha. Definimos, por recursão em Ord uma função (no sentido de classes) $g : \mathsf{Ord} \to x \cup \{x\}$ pela regra

$$g(\alpha) = \begin{cases} \phi(x \smallsetminus \{g(\beta) : \beta < \alpha\}) & \text{se } \{g(\beta) : \beta < \alpha\} \neq \varnothing \\ x & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Sejam $\beta, \gamma \in \mathsf{Ord}$, tais que $\beta < \gamma$ e $g(\beta), g(\gamma) \in x$. Pela definição de g, $g(\gamma) \in g(\beta)$ e, assim, $g(\beta) \neq g(\gamma)$. Ou seja, g é injetora, se restrita aos ordinais levados a elementos de x (e não ao próprio x). Isso premite definir um inversa f de g, cujo domínio é um subconjunto de x, e, usando o axioma da substituição, a imagem de f é um conjunto de ordinais, contido em um ordinal α. Pela definição de g, vemos que a imagem de f tem que ser um ordinal (não pode haver lacunas), que chamaremos de α. Ou seja, $\alpha = \{\beta \in \mathsf{Ord} : g(\beta) \in x\}$.

Como a imagem de α pela função g é um subconjunto de x, se esse subconjunto fosse próprio, chegaríamos a uma contradição, devido à definição de g (exercício: qual?).

Assim, $g\restriction_\alpha : \alpha \to x$ é função bijetora e, por meio dela, trazemos a boa ordem de α ao conjunto x. $\square$

4.4 A classe V

Nesta seção apresentaremos a estratificação da universo dos conjuntos, devida a John von Neumann.

Comecemos definindo, por recursão (em ZF) na relação bem fundada $\in$ a seguinte função, chamada de **posto** do conjunto x

$$\rho(x) = \bigcup\{\rho(y) + 1 : y \in x\}.$$

Teorema 17 *(ZF) A função posto goza das seguintes propriedades:*

1. $\forall x\, \rho(x) \in \mathsf{Ord}$
2. $\forall \alpha \in \mathsf{Ord}\, \rho(\alpha) = \alpha$
3. $y \in x \to \rho(y) < \rho(x)$.

Demonstração:

1. Por indução na relação bem fundada $\in$. Suponhamos que, para todo $y \in x$, $\rho(y) \in \mathsf{Ord}$. Isto é certamente válido para $x = \varnothing$. Então, $\rho(x) \in \mathsf{Ord}$, pois já vimos que união de um conjunto de ordinais é um ordinal.

2. Agora faremos indução em $\alpha \in \mathsf{Ord}$. Claramente, $\rho(0) = 0$. Suponhamos que $\rho(\beta) = \beta$, para todo $\beta < \alpha$ e calculemos $\rho(\alpha) = \bigcup\{\rho(\beta)+1 : \beta \in \alpha\} = \bigcup\{\beta + 1 : \beta < \alpha\} = \alpha$, pois se $\beta < \alpha$, então $\beta + 1 \leq \alpha$ e, portanto, $\bigcup\{\beta + 1 : \beta < \alpha\} \leq \alpha$. Por outro lado, como $\beta < \beta + 1$, $\alpha = \bigcup\{\beta : \beta < \alpha\} \leq \bigcup\{\beta + 1 : \beta < \alpha\}$.

3. Pela definição de ρ, se $y \in x$, então $\rho(y) < \rho(y) + 1 \leq \rho(x)$.

Com isso, terminamos essa demonstração. $\square$

Por recursão em Ord, usando a função (de classes) $F(x) = \mathsf{P}(x)$, definimos a função (de classes) $\alpha \in \mathsf{Ord} \mapsto V_\alpha$, dada por

1. $V_0 = \varnothing$
2. $V_{\alpha+1} = \mathsf{P}(V_\alpha)$
3. $V_\lambda = \bigcup_{\beta<\lambda} V_\beta$, se λ for ordinal limite.

Definimos a classe $V = \bigcup_{\alpha\in\mathsf{Ord}} V_\alpha$. Na verdade, definimos uma fórmula "$x \in V$" por $\exists\alpha \in \mathsf{Ord}\, x \in V_\alpha$. A fórmula $x \in V_\alpha$ já foi definida, usando recursão em α.

Lema 23 *(ZF)*

1. *Cada V_α é conjunto transitivo.*
2. *Para cada $\beta < \alpha$ em Ord, $V_\beta \in V_\alpha$ e, portanto, $V_\beta \subset V_\alpha$.*
3. *Para cada $\alpha \in \mathsf{Ord}$, $V_\alpha = \bigcup_{\beta<\alpha} \mathcal{P}(V_\beta)$.*
4. *Para cada $\alpha \in \mathsf{Ord}$, $x \in V_\alpha \leftrightarrow \rho(x) < \alpha$.*

Demonstração:

1. Por indução em α. Sabemos que $\varnothing$ é transitivo; que se x for transitivo, então $\mathcal{P}(x)$ também será transitivo; que se x for um conjunto, cujos elementos sejam transitivos, então $\bigcup x$ será transitivo. Daqui, os detalhes são simples.

2. Como cada V_α é transitivo, de sua definição, segue que se $\beta < \alpha$, então $V_\beta \in V_\alpha$.

3. Isto segue do item anterior e indução em α (exercício: detalhar).

4. Por indução na relação $\in$. Suponhamos que $x \in V_\alpha$. Do item anterior, temos que, para cada $y \in x$, existe $\beta < \alpha$, tal que $y \in V_\beta$. A hipótese de indução diz que $\rho(y) < \beta$ e, portanto, $\rho(y) + 1 \leq \beta < \alpha$ e, portanto, $\rho(x) = \bigcup\{\rho(y) + 1 : y \in x\} < \alpha$. A recíproca segue por indução em α e pela definição e propriedades de ρ (exercício: detalhar).

Com isto terminamos a demonstração. □

Teorema 18 *(ZF)* $\forall x \, \exists \alpha \in \mathsf{Ord} \, x \in V_\alpha$.

Demonstração: Este resultado segue imediatamente do último item do lema anterior. □

A classe V aqui definida é na verdade a classe de todos os conjuntos. Mas ela tem uma estrutura hierárquica, dada pela função ρ. Essa estratificação do universo é chamada de **hierarquia cumulativa** (a cumulatividade vem do fato que cada nível V_α contém todos os níveis anteriores).

4.5 Conjuntos Borelianos da Reta

Como uma aplicação dos ordinais e da recursão sobre os ordinais, vamos descrever os chamados conjuntos borelianos de $\mathbb{R}$.

Um conjunto $X \subset \mathbb{R}$ é **aberto** se ele for uma união de intervalos $]a, b[= \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$, com $a < b$ em $\mathbb{R}$, ou se for vazio. As propriedades desses conjuntos que usaremos são sumarizadas no

Exercício 47 *1. Mostre que se $X, Y \subset \mathbb{R}$ forem conjuntos abertos, então $X \cap Y$ será conjunto aberto.*

2. Mostre que $\mathbb{R}$ é conjunto aberto.

3. Mostre que se $A \subset \mathcal{P}(\mathbb{R})$ for um conjunto, cujos elementos sejam conjuntos abertos, então $\bigcup A$ será conjunto aberto.

4. *Mostre que cada intervalo* $]a, b[$ *de* $\mathbb{R}$ *pode ser escrito como a união de intervalos* $]u, v[$, *com* $u, v \in \mathbb{Q}$.

5. *Mostre que* $X \subset \mathbb{R}$ *é conjunto aberto se, e somente se, para cada* $x \in X$, *existir um intervalo* $]a, b[$, *tal que* $x \in]a, b[$ *e* $]a, b[\subset X$.

6. *Mostre que, para cada conjunto aberto* $X \subset \mathbb{R}$ *(não vazio), existe uma função* $f_X : W \to \mathcal{P}(\mathbb{R})$, *sendo que* $W \in \omega$ *ou* $W = \omega$, *cuja imagem seja intervalos da forma* $]a, b[$, *com* $a < b$ *em* $\mathbb{R}$, *ou* $]-\infty, a[= \{x \in \mathbb{R} : x < a\}$, *ou* $]a, \infty[= \{x \in \mathbb{R} : a < x\}$, *tal que* $X = \bigcup \mathrm{Im}(f_X)$, *e tal que, se* $I, J \in \mathrm{Im}(f_X)$ *forem distintos, então* $I \cap J = \varnothing$.

Uma σ-**álgebra** em $\mathbb{R}$ é um conjunto $A \subset \mathcal{P}(\mathbb{R})$, tal que

1. $\mathbb{R} \in A$;

2. para todo $X \in A$, $\mathbb{R} \setminus X \in A$;

3. para toda $f : \omega \to A$, $\bigcup \mathrm{Im}(f) \in A$.

Exercício 48 *Mostre que*

1. $\{\varnothing, \mathbb{R}\}$ *é uma* σ*-álgebra;*

2. $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ *é uma* σ*-álgebra;*

3. *se* A *for uma* σ*-álgebra e* $f : \omega \to A$ *for uma função, então* $\bigcap \mathrm{Im}(f) \in A$.

Dado $X \subset \mathcal{P}(\mathbb{R})$, a interseção de todas as σ-álgebras $A \subset \mathcal{P}(\mathbb{R})$, tais que $X \subset A$ é chamada de σ-**álgebra gerada** por X, e denotada por $\mathscr{B}(X)$.

No caso em que X é o conjunto de todos os conjuntos abertos de $\mathbb{R}$, a σ-álgebra $\mathscr{B}(X)$ gerada por X é chamada de σ-**álgebra dos conjuntos borelianos** de $\mathbb{R}$, e cada um de seus elementos é chamado de **conjunto boreliano**. Neste caso, omitimos X da notação e denotamos a σ-álgebra dos borelianos por $\mathscr{B}$.

Teorema 19 *(ZFC) A* σ*-álgebra gerada por* $X \subset \mathcal{P}(\mathbb{R})$ *pode ser definida por recursão como* $\Sigma_{\omega_1}(X)$, *sendo que*

1. $\Sigma_0(X) = X$

2. *para cada* $\alpha < \omega_1$, Σ_α *é o conjunto de todos os complementos e das uniões enumeráveis de elementos dos* Σ_β, $\beta < \alpha$;

3. $\Sigma_{\omega_1}(X) = \bigcup_{\alpha<\omega_1} \Sigma_\alpha(X)$.

Demonstração: Por indução em $\alpha \leq \omega_1$.

Se $U \in \Sigma_\alpha(X)$, então $\mathbb{R} \setminus U \in \Sigma_{\alpha+1}(X)$, para todo $\alpha < \omega_1$. Se $U_n \in \Sigma_{\alpha_n}(X)$, $\alpha_n < \omega_1$, $n \in \omega$, então existe $\delta < \omega_1$, tal que $\alpha_n < \delta$, $n \in \omega$, e $\bigcup_{n\in\omega} U_n \in \Sigma_{delta}(X)$.

Portanto, $\Sigma_{\omega_1}(X)$ é uma σ-álgebra e $X \subset \Sigma_{\omega_1}(X)$.

Para mostrarmos que essa é a gerada por X, seja $\mathscr{A}$ uma σ-álgebra, tal que $X \subset \mathscr{A}$; devemos concluir que $\Sigma_{\omega_1}(X) \subset \mathscr{A}$.

Isso faremos por indução em $\alpha < \omega_1$.

Temos que $X = \Sigma_0(X) \subset \mathscr{A}$ por hipótese.

Suponhamos que para certo $\alpha < \omega_1$, tenhamos que $\Sigma_\beta(X) \subset \mathscr{A}$, para todo $\beta < \alpha$. Então, pela definição de σ-álgebra e de $\Sigma_\alpha(X)$, temos que $\Sigma_\alpha(X) \subset \mathscr{A}$.

Assim, $\Sigma_{\omega_1}(X) \subset \mathscr{A}$. $\square$

Exercício 49 *Mostre que se* X *for um conjunto finito, então* $\mathscr{B}(X)$ *é finita e existe* $n \in \omega$, *tal que* $\Sigma_{\omega_1}(X) = \Sigma_n(X)$. *Qual é o menor* n *possível?*

Exercício 50 *Mostre que* $\mathscr{B}(\mathscr{B}(X)) = \mathscr{B}(X)$.

Exercício 51 *Seja* $\mathscr{X}$ *um conjunto de* σ*-álgebras, indexadas por ordinais* $\alpha < \delta$, $\mathscr{A}_\alpha$, *e tal que se* $\alpha < \beta < \delta$, *então* $\mathscr{A}_\alpha \subset \mathscr{A}_\beta$. *Mostre que, neste caso,* $\bigcup\_\alpha < \delta\mathscr{A}_\alpha$ *é uma* σ*-álgebra.*

Exercício 52 *Seja* X *o conjunto dos intervalos de* $\mathbb{R}$ *da forma* $]a, b[$, *com* $a, b \in \mathbb{Q}$. *Mostre que* $\mathscr{B}(X) = \mathscr{B}$.

Mostraremos no próximo capítulo que $\mathscr{B} \neq \mathcal{P}(\mathbb{R})$. Na verdade, mostraremos que essa σ-álgebra é "bem pequena", em um sentido que ficará claro.

É possível demonstrar que, no caos de X ser o conjunto dos subconjuntos abertos de $\mathbb{R}$, que se $\alpha < \beta < \omega_1$, então $\Sigma_\alpha \subsetneq \Sigma_\beta \subsetneq \Sigma_{\omega_1}$. No entanto, as técnicas para tal empreitada estão além deste texto.