Capítulo 5

Cardinais

Cardinais medem o tamanho dos conjuntos. Na presença do axioma da escolha, temos conjuntos canônicos para medir tamanhos: certos ordinais. Mas, em sua ausência, falar em cardinalidade torna-se mais problemático. Como hipóteses sobre cardinalidade podem afetar o axioma da escolha, começaremos a falar de cardinalidade sem aquele axioma. Mais adiante, mostraremos que, em ZF, a Hipótese Generalizada do Contínuo, devidamente formulada, implica no axioma da escolha.

Faremos também uma introdução ao ramo da Teoria dos Conjuntos que fala dos Grandes Cardinais.

Essa parte da teoria dos conjuntos começou com G. Cantor [1]Cantor, G.!cardinais, teve contribuições de F. Hausdorff [2]Hausdorff, F.!cardinais, que introduziu a noção de cardinais inacessíveis,Hausdorff, F.!cardinais!inacessíveis assunto da parte final deste capítulo, e também de J. von Neumann [3]von Neumann!cardinais e outros, cujas contribuições serão oportunamente citadas.

[1]Beitrage zur Begrundung der transfiniten Mengenlehre, Parte I, *Mathematische Annalen* 46 (1895), 481-512, e Parte II, *idem*, 49 (1897), 207-246; existe uma tradução para o inglês, *Contributions to the Founding of the Theory of Transfinite Numbers*, Open Court, Chicago, EUA, 1915, já citadas.

[2]*Grundzüge einer Theorie der geordneten Mengen*, Mathematische Annallen, Vol. 65 (1908), pp. 435-505, já citada.

[3]Publicada no artigo de 1923, *Zur Einfürung der transfiniten Zahlen*, com tradução em inglês na obra *From Frege to Gödel*, já citada.

5.1 Cardinalidade sem o Axioma da Escolha

Como preparação ao capítulo sibre o axioma da escolha, comecemos a tratar do problema da cardinalidade do modo que Cantor começou, para posteriormente introduzir o tratamento moderno, com o uso desse axioma.

Nesta seção trabalharemos sempre em ZF, sem o axioma da escolha.

Definamos a relação $x \preceq yx \preceq y$ entre conjuntos por

$$x \preceq y \leftrightarrow \exists f \text{“}f : x \to y \text{ é função injetora”}.$$

Definamos também relação $x \sim y$ por

$$x \sim y \leftrightarrow \exists f \text{“}f : x \to y \text{ é função bijetora”}.$$

Exercício 53 *Mostre que a relação $\prec$ é reflexiva ($x \prec x$) transitiva ($x \prec y$ e $y \prec z$ implicam em $x \prec z$). Mostre que $\sim$ é uma relação de equivalência.*

O próximo teorema foi enunciado por Cantor (1895), mas é mais conhecido por:

Teorema 20 ***(Schröder-Bernstein)****teorema!Schröder-Bernstein (ZF) Para cada par de conjuntos x e y, vale*

$$x \sim y \leftrightarrow (x \prec y \wedge y \prec x).$$

Demonstração: Sejam $f : x \to y$ e $g : y \to x$ duas funções injetoras. Usaremos recursão em ω para mostrar que existe uma função bijetora $h : x \to y$.

Sejam $x_0 = x \setminus \mathrm{Im}(g)$ e $y_0 = y \setminus \mathrm{Im}(f)$ (passo inicial da recursão). Sejam $y_{n+1} \subset y$, a imagem de x_n por f, e $x_{n+1} \subset x$, a imagem de y_n por g.

Observemos que se $m \neq n$, então $x_m \cap x_n = \varnothing$ e $y_m \cap y_n = \varnothing$. De fato, pela definição dos conjuntos x_n e y_n, vemos que $x_0 \cap x_m = \varnothing$ e $y_0 \cap y_m = \varnothing$, para todo $m \in \omega$, tal que $m \neq 0$. Agora suponhamos que $x_m \cap x_n = \varnothing$, se $m \neq n$. Então $y_{m+1} \cap y_{n+1} = \varnothing$. Analogamente, da hipótese $y_m \cap y_n = \varnothing$, se $m \neq n$, concluímos que $x_{m+1} \cap x_{n+1} = \varnothing$. Pelo princípio da indução finita, concluímos que se $m \neq n$, então $x_m \cap x_n = \varnothing$ e $y_m \cap y_n = \varnothing$.

Sejam $a = \bigcup_{n\in\omega} x_n$ e $b = \bigcup_{n\in\omega} y_n$.

Seja $\tilde{h} : a \to b$ definida por

$$\tilde{h}(t) = \begin{cases} f(t), & \text{se} \quad \exists m \in \omega\, (t \in x_{2m}) \\ g^{-1}(t), & \text{se} \quad \exists m \in \omega\, (t \in x_{2m+1}) \end{cases}$$

Como a imagem de x_m por f é y_{m+1} e como f e g são funções injetoras, temos que h é injetora. Da definição dos conjuntos a e b, concluímos que h também é sobrejetora, ou seja, h é bijetora.

Caso tenhamos que $z = x \smallsetminus a \neq \varnothing$, então a imagem $w \subset y$ de z pela função f, deve satisfazer $w \cap b = \varnothing$, dada a definição do conjunto b. Assim, f define uma função injetora de z em w. Observemos que, se $t \in y \smallsetminus b$, então $t \in w$, pois, senão, $t \in y \setminus \mathrm{Im}(f) = y_0 \subset b$, contradizendo que $t \in y \smallsetminus b$. Ou seja, f define bijeção entre $x \smallsetminus a$ e $y \setminus b$.

Como ***exercício***, considere também o caso em que $y \setminus b$ implica que g^{-1} define uma bijeção entre $x \smallsetminus a$ e $y \setminus b$. (Por que considerar esse caso?)

Por fim, definimos a função $h : x \to y$ por

$$h(t) = \begin{cases} \tilde{h}(t), & \text{se} \quad t \in a \\ f(t), & \text{se} \quad t \in x \smallsetminus a \end{cases}$$

Por construção, concluímos que h é função bijetora e, portanto $x \sim y$. $\square$

Cantor definiu cardinalCantor,G.!cardinal de um conjunto x como sendo a classe de equivalência de todos os conjuntos y, tais que $y \sim x$. O problema dessa definição é que essa classe de equivalência não é conjunto, mas classe própria. Por exemplo, para cada $\alpha \in \mathsf{Ord}$, o conjunto $\{\alpha\}$ estaria na classe de $\{0\}$. Um modo [4] de se passar por cima desse impecilho, é definir um conjunto representativo $|x|_{\mathsf{ZF}} = \{y : y \sim x \text{ e } y \text{ tem o menor posto possível}\}$,$|X|_{\mathsf{ZF}}$ ou, mais formalmente

$$|X|_{\mathsf{ZF}} = \{y : y \in V_{\rho(x)} \wedge x \sim y \wedge \forall z\, (z \sim x \to \rho(y) \leq \rho(z))\}.$$

Chamaremos $|X|_{\mathsf{ZF}}$ de **cardinal**$^{\mathsf{ZF}}$cardinal!cardinal$^{\mathsf{ZF}}$ de X. Essa nomenclatura e notação não é usada em livros de Teoria dos Conjuntos, contudo

[4] Conhecido como o *truque de Scott*,Scott, D.!truque devido ao lógico Dana Scott.Scott, D., *Measurable Cardinals and Constructible Sets*, Bull. Acad. Polon. Sci., Sér. Math., Vol 9 (1961), 521-524.

inventamo-la como ferramenta didática para diferenciá-la daquela usada na presença do axioma da escolha, introduzida mais adiante.

Exercício 54 *Mostre que a relação $x \preceq y$ induz uma ordem (parcial) $|x|_{\mathsf{ZF}} \leq |y|_{\mathsf{ZF}}$ nos cardinais$^{\mathsf{ZF}}$. Mostre que a relação $x \sim y$ induz a igualdade $|x|_{\mathsf{ZF}} = |y|_{\mathsf{ZF}}$.*

Exercício 55 *(ZF) Mostre que $|x \times \{0\}|_{\mathsf{ZF}} = |x|_{\mathsf{ZF}}$.*

5.1.1 Operações com Cardinais em ZF

Soma:cardinal!cardinal$^{\mathsf{ZF}}$!soma Seja $\mathfrak{m}_i$ $(i \in I)$ uma família de cardinais$^{\mathsf{ZF}}$, ou seja, é dada uma função f, cujo domínio seja I e cuja imagem seja um conjunto de cardinais$^{\mathsf{ZF}}$. Definimos a soma $\sum_{i\in I} \mathfrak{m}_i = \mathfrak{n}$, se existirem conjuntos x_i, $i \in I$, dois a dois disjuntos e tais que $|x_i|^{\mathsf{ZF}} = \mathfrak{m}_i$ e $|\bigcup_{i\in I} x_i|^{\mathsf{ZF}} = \mathfrak{n}$. No caso em que $I = \{0, 1\}$, escrevemos a soma $\sum_{i\in I} \mathfrak{m}_i$ como $\mathfrak{m}_0 + \mathfrak{m}_1$.

Para definir o produto de uma família qualquer de cardinais$^{\mathsf{ZF}}$, precisamos definir o **produto cartesiano**produto!cartesiano $\mathsf{X}_{i\in I}\, x_i$,$\mathsf{X}_{i\in I}\, x_i$ de uma família de conjuntos x_i, $i \in I$: $\mathsf{X}_{i\in I}\, x_i = \{f : f$ é função $f : I \to \bigcup_{i\in I} x_i$, tal que $\forall i \in I\, (f(i) \in x_i)\}$.

Observe-se que o axioma da escolha implica que se cada $x_i \neq \varnothing$, então $\mathsf{X}_{i\in I}\, x_i \neq \varnothing$.

Exercício 56 *(ZF) Mostre que se I for um conjunto finito e cada $x_i \neq \varnothing$, então $\mathsf{X}_{i\in I}\, x_i \neq \varnothing$, **sem usar o axioma da escolha**.*

Produto:cardinal!cardinal$^{\mathsf{ZF}}$!produto Seja $\mathfrak{m}_i$ $(i \in I)$ uma família de cardinais$^{\mathsf{ZF}}$. Definimos o produto $\prod_{i\in I} \mathfrak{m}_i = \mathfrak{n}$, se existirem conjuntos x_i, $i \in I$, dois a dois disjuntos e tais que $|x_i|^{\mathsf{ZF}} = \mathfrak{m}_i$ e $|\mathsf{X}_{i\in I}\, x_i|^{\mathsf{ZF}} = \mathfrak{n}$. No caso em que $I = \{0, 1\}$, escrevemos a soma $\prod_{i\in I} \mathfrak{m}_i$ como $\mathfrak{m}_0 \cdot \mathfrak{m}_1$.

Exponenciação:cardinal!cardinal$^{\mathsf{ZF}}$!exponenciação definimos $|x|_{\mathsf{ZF}}^{|y|_{\mathsf{ZF}}} = |z|_{\mathsf{ZF}}$, sendo que z é o conjunto de todas as funções $f : y \to x$. Costuma-se denotar esse conjunto z por ${}^{y}x$.${}^{y}x$

Exercício 57 *(ZF) Mostre que essas operações gozam as seguites propriedades, para todos os cardinais$^{\mathsf{ZF}}$ $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{q}$ e $\mathfrak{r}$:*

1. $\mathfrak{p} + \mathfrak{q} = \mathfrak{q} + \mathfrak{p}$

2. $(\mathfrak{p} + \mathfrak{q}) + \mathfrak{r} = \mathfrak{p} + (\mathfrak{q} + \mathfrak{r})$

3. $\mathfrak{p} \cdot \mathfrak{q} = \mathfrak{q} \cdot \mathfrak{p}$

4. $(\mathfrak{p} \cdot \mathfrak{q}) \cdot \mathfrak{r} = \mathfrak{p} \cdot (\mathfrak{q} \cdot \mathfrak{r})$

5. $\mathfrak{p} \cdot (\mathfrak{q} + \mathfrak{r}) = (\mathfrak{p} \cdot \mathfrak{q}) + (\mathfrak{p} \cdot \mathfrak{r})$

6. $\mathfrak{p}^{\mathfrak{r}} \cdot \mathfrak{q}^{\mathfrak{r}} = (\mathfrak{p} \cdot \mathfrak{q})^{\mathfrak{r}}$

7. $\mathfrak{p}^{\mathfrak{q}+\mathfrak{r}} = \mathfrak{p}^{\mathfrak{q}} \cdot \mathfrak{p}^{\mathfrak{r}}$

8. $(\mathfrak{p}^{\mathfrak{q}})^{\mathfrak{r}} = \mathfrak{p}^{\mathfrak{q} \cdot \mathfrak{r}}$

Observe-se que, por exemplo, para demonstrar que $\mathfrak{p} + \mathfrak{q} = \mathfrak{q} + \mathfrak{p}$*, é necessário mostrar que existe uma função bijetora entre conjuntos* $x \times y$ *e* $y \times x$*, sendo que* $|x|_{\mathsf{ZF}} = \mathfrak{p}$ *e* $|y|_{\mathsf{ZF}} = \mathfrak{q}$.

Exercício 58 *(ZF) Mostre que* $\omega \times \omega \sim \omega$*. Para isto, mostre que, em ZF, a função* $f : \omega \times \omega \to \omega$*, definida por*

$$f(m, n) = \frac{(m + n)(m + n + 1)}{2} + n,$$

é bijetora.

Para isso, observe que essa função pode ser deduzida da seguinte contagem: o par ordenado (m, n) *satisfaz a equação* $x + y = m + n$ *(uma "reta" em* $\omega \times \omega$*, ou, se preferir, em* $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$*). Faça a contagem do total de elementos satisfazendo as equações* $x + y = a$*, com* $a = 0, 1, \ldots, m + n - 1$*. Para chegar ao par* (m, n)*, comece contar a partir do par* $(m + n, 0)$*, passando por* $(m + n - 1, 1)$*,* $(m + n - 2, 2)$*, etc.*

Exercício 59 *(ZF) Seja* α *o* ***ordinal*** ω^ω*. Mostre que se* $\beta < \alpha$ *for um ordinal, então existem* $n \in \omega$ *e* $a_1 < a_2 < \ldots a_n$*, elementos de* ω*, e* $b_0, \ldots, b_n \in \omega$*, tais que*

$$\beta = \omega^{a_n} \cdot b_n + \omega^{a_{n-1}} \cdot b_{n-1} + \ldots + \omega^{a_1} \cdot b_1 + b_0,$$

sendo que as operações indicadas são as de ordinais, e não de cardinais. Mostre que essa representação é única.

Exercício 60 *(ZF) Seja α o* ***ordinal*** ω^ω*. Mostre que $\alpha \sim \omega$. (use o exercício anterior e ache uma enumeração de todas as seqüências finitas de elementos de ω).*

5.1.2 A Função $\aleph$

G. Cantor, em seus artigos de 1895 e 1897, já citados, usou a notação ainda atual $\aleph_\alpha$ para denotar cardinais (infinitos).

F. Hartogs[5] introduziu a função $\aleph : \mathsf{Ord} \to \mathsf{Ord}$, que passaremos a definir, trabalhando somente em ZF, sem o axioma da escolha.

Seja $\aleph(x) = \{\alpha \in \mathsf{Ord} : \alpha \preceq x\}$,função!ℵℵ$(x)$ a classe dos ordinais α, para os quais existe uma função injetora $f : \alpha \to x$.

Teorema 21 *(ZF) Para cada conjunto x, $\aleph(x)$ é um ordinal, tal que, para todo $\beta < \aleph(x)$, $\beta \not\sim \aleph(x)$.*

Demonstração: Precisamos primeiramente mostrar que $\aleph(x)$ é um conjunto transitivo de ordinais e, portanto, um ordinal.

Lembramos que, em ZF, provamos que para todo conjunto bem ordenado x, existe um único ordinal α e função crescente e bijetora $f : x \to \alpha$ (Teorema 15, página 80). Por outro lado, qualquer bijeção entre um conjunto x e um ordinal α pode ser usada para trazer de α sua boa ordem para tornar x num conjunto bem ordenado.

Seja $z = \{r : \exists y \subset x\,(r \subset y \times y) \wedge \text{“}r \text{ bem ordena } y\text{”}\}$. Observemos que $z \subset \mathcal{P}(x \times x)$ e, portanto é um conjunto (usando o axioma das partes e o da separação).

Pelas observações acima, vemos que $\alpha \preceq x$ quer dizer que $\alpha \sim y$, para algum $y \subset x$ e essa bijeção induz uma boa ordem $r \subset y \times y$ em y. Com isso, temos que

$$\aleph(x) = \{\alpha \in \mathsf{Ord} : \exists y \subset x\, \exists r \in z\, (\text{“}r \text{ bem ordena } y\text{”} \wedge$$

$$\wedge\ \exists h : y \to \alpha\, (\text{“}h \text{ bijetora e crescente”}))\}.$$

[5]No artigo *Über das Problem der Wohlordnung*, Math. Annalen, Vol. 76 (1914), 438-443.

Portanto $\aleph(x)$ é um conjunto.

Mostremos que $\aleph(x)$ é transitivo. Sejam $\beta \in \alpha \in \aleph(x)$. Então existe $y \subset x$, tal que $\alpha \sim x$. Como $\beta \in \alpha$ implica em $\beta \subset \alpha$, a bijeção que testemunha $\alpha \sim x$, restrita a β, tem por imagem um conjunto $z \subset y \subset x$. Mas isso significa que $\beta \preceq x$ e, portanto, $\beta \in \aleph(x)$. Concluímos, assim, que $\aleph(x)$ é transitivo.

Com isso, temos que $\aleph(x)$ é um ordinal.

Por fim, mostremos que para todo $\beta < \aleph(x)$, $\beta \not\sim \aleph(x)$. Como $\aleph(x)$ é um ordinal, se $\beta < \aleph(x)$, então $\beta \in \aleph(x)$, ou seja $\beta \preceq x$. Se tivéssemos $\beta \sim \aleph(x)$, então concluiríamos que $\aleph(x) \preceq x$ e, assim, $\aleph(x) \in \aleph(x)$, o que contradiz o axioma da regularidade. $\square$

Dizemos que um ordinal α é um **ordinal inicial**ordinal!inicial se, para todo $\beta < \alpha$, $\beta \not\sim \alpha$.

Definimos, por recursão em Ord, a classe dos ordinais chamados de $\aleph_\alpha$:$\aleph_\alpha$ordinal!$\aleph_\alpha$

$$\begin{array}{lcl} \aleph_0 & = & \omega \\ \aleph_{\alpha+1} & = & \aleph(\aleph_\alpha) \\ \aleph_\lambda & = & \bigcup_{\beta<\lambda} \aleph_\beta, \text{ se } \lambda \text{ for ordinal limite} \end{array}$$

Observação sobre notação: os ordinais $\aleph_\alpha$ serão usados para representar cardinais mais adiante. Entretanto, nas partes em que desejamos reforçar o papel desses elementos como ordinais, usaremos a notação usual $\omega_\alpha\omega_\alpha$ordinal!$\omega_\alpha$ para nomear $\aleph_\alpha$.

Exercício 61 *(ZF) Mostre que se λ for ordinal limite, então para todo $\beta < \aleph_\lambda$, $\beta \not\sim \aleph_\lambda$. Ou seja, $\aleph_\lambda$ também é um ordinal inicial.*

Exercício 62 *(ZF) Mostre que para todo conjunto x, $\aleph(x) \not\preceq x$.*

Exercício 63 *(ZF) Mostre que x pode ser bem ordenado se, e somente se, $x \preceq \aleph(x)$.*

Exercício 64 *Seja β um ordinal, tal que $\omega \leq \beta$. Mostre que $\beta + 1 \sim \beta$. (Sugestão: defina $f : \beta + 1 \to \beta$, por $f(\beta) = 0$, $f(n) = n + 1$, se $n \in \omega$, e $f(\eta) = \eta$, se $\omega \leq \eta < \beta$.)*

As operações de soma e produto desses ordinais $\aleph_\alpha$ gozam das seguintes propriedades:

Teorema 22 *(ZF) Para todo ordinal α, $\aleph_\alpha \cdot \aleph_\alpha = \aleph_\alpha$.*

Demonstração: Vamos definir a relação $\triangleleft$ em $\omega_\alpha \times \omega_\alpha$ por

$$\begin{array}{rcl} (\delta,\eta) \triangleleft (\xi,\zeta) & \leftrightarrow & \max\{\delta,\eta\} < \max\{\xi,\zeta\} \\ & \vee & \max\{\delta,\eta\} = \max\{\xi,\zeta\} \wedge (\delta < \xi) \\ & \vee & \max\{\delta,\eta\} = \max\{\xi,\zeta\} \wedge (\delta = \xi) \wedge (\eta < \zeta). \end{array}$$

A relação $\triangleleft$ define uma ordem linear sobre o conjunto $\omega_\alpha \times \omega_\alpha$ (**exercício:** escreva uma demonstração detalhada dessa afirmação).

Mostremos que é uma boa ordem. Seja $X \subset \omega_\alpha \times \omega_\alpha$ um conjunto não vazio. Então o $Y = \{\beta \in \omega_\alpha : \exists(\xi\zeta) \in X\, (\beta = \max\{\xi,\zeta\})\}$. Como $X \neq \varnothing$, temos que $Y \neq \varnothing$ e, portanto, existe $\beta_0 = \min Y$. Seja $\gamma_0 = \min\{\gamma \in \omega_\alpha : (\gamma,\beta_0) \in X \vee (\beta_0,\gamma) \in X\}$.

Certamente, temos que ou $(\beta_0,\gamma_0) \in X$, ou $(\gamma_0,\beta_0) \in X$. Se $(\beta_0,\gamma_0) \in X$, $(\xi,\zeta) \in X$ e $(\beta_0,\gamma_0) \neq (\xi,\zeta)$, então ou $\max\{\beta_0,\ \gamma_0\} < \max\{\xi,\zeta\}$, ou $\max\{\beta_0,\gamma_0\} = \max\{\xi,\zeta\}$, mas $\min\{\beta_0,\gamma_0\} < \min\{\xi,\zeta\}$; em ambas as situações, $(\beta_0,\gamma_0) \triangleleft (\xi,\zeta)$. Se $(\gamma_0,\beta_0) \in X$, $(\xi,\zeta) \in X$ e $(\gamma_0,\beta_0) \neq (\xi,\zeta)$, a mesma argumentação leva-nos à conclusão que $(\gamma_0,\beta_0) \triangleleft (\xi,\zeta)$.

Portanto, o conjunto $\omega_\alpha \times \omega_\alpha$ é bem ordenado pela relação $\triangleleft$ e, assim, existe um único ordinal ψ_α e bijeção crescente $f_\alpha : \psi_\alpha \to \omega_\alpha \times \omega_\alpha$.

Observe-se que a restrição de f_α ao ordinal ψ_β, com $\beta < \alpha$, produz a função $f_\beta : \psi_\beta \to \omega_\beta$.

Observe-se que existe uma inclusão $g : \omega_\alpha \to \omega_\alpha \times \omega_\alpha$, dada por $g(\beta) = (0,\beta)$ e, portanto $\omega_\alpha \preceq \omega_\alpha \times \omega_\alpha$. Daí, concluímos que $\omega_\alpha \leq \psi_\alpha$ (exercício: por que?).

Mostremos que $\psi_\alpha = \omega_\alpha$, por indução transfinita em α. Para isso, basta supor que esse resultado nem sempre valha e tomamos α como sendo o menor ordinal tal que $\omega_\alpha < \psi_\alpha$. A partir dessa hipótese, chegaremos a uma contradição. Observe-se que, como $\omega \times \omega \sim \omega$, devemos ter $0 < \alpha$.

Seja $(\gamma,\delta) \in \omega_\alpha \times \omega_\alpha$, tal que $f_\alpha(\omega_\alpha) = (\gamma,\delta)$. Como $\gamma,\delta < \omega_\alpha$, seja β, tal que $\nu = \max\{\gamma,\delta\} \sim \omega_\beta$. Como ω_α é ordinal inicial, $\beta < \alpha$. A hipótese de indução determina que $\omega_\beta \sim \omega_\beta \times \omega_\beta$.

Seja $y = \{(\xi,\zeta) \in \omega_\alpha \times \omega_\alpha : (\xi,\zeta) \triangleleft (\gamma,\delta)\}$. Então f_α restrita a $\omega_\alpha \subset \psi_\alpha$ define uma função bijetora entre y e ω_α. Ou seja $\omega_\alpha \sim y$. Por outro lado, $y \subset (\nu+1) \times (\nu+1)$. Como $\nu + 1 \sim \nu \sim \omega_\beta$, obteríamos que $\omega_\alpha \sim y \sim \omega_\beta$. Como $\beta < \alpha$, deveríamos ter que $\omega_\beta \not\sim \omega_\alpha$, uma contradição.

Assim, ficou demonstrado que, para todo $\alpha \in \mathsf{Ord}$, $\aleph_\alpha \cdot \aleph_\alpha = \aleph_\alpha$. $\Box$.

Como conseqüência imediata disso, temos:

Teorema 23 *(ZF) Para todo* $\alpha, \beta \in \mathsf{Ord}$*,* $\aleph_\alpha + \aleph_\beta = \aleph_\alpha \cdot \aleph_\beta = \aleph_{\max\{\alpha,\beta\}}$*.*

Demonstração: Decorre imediatamente do teorema anterior:

$$\aleph_{\max\{\alpha,\beta\}} \preceq \aleph_\alpha + \aleph_\beta \preceq \aleph_\alpha \cdot \aleph_\beta \preceq \aleph_{\max\{\alpha,\beta\}} \cdot \aleph_{\max\{\alpha,\beta\}} = \aleph_{\max\{\alpha,\beta\}}.$$

Dado que $x \preceq y$ e $y \preceq x$ implicam em $x \sim y$, temos as igualdades desejadas. $\Box$

Sem a presença do axioma da escolha, não podemos dizer muita coisa sobre a exponenciação cardinal dos $\aleph_\alpha$.

5.2 Cardinais com o Axioma da Escolha

Assumindo o axioma da escolha, temos que

Teorema 24 *(ZFE) Para cada conjunto infinito* x*, existe um único ordinal* α*, tal que* $x \sim \aleph_\alpha$*.*

Demonstração: Já vimos que todo conjunto x pode ser bem ordenado (Teorema de Zermello, 11, 71) e, portanto, equivalente (por bijeção crescente) a um ordinal ξ. Sendo x um conjunto infinito, $\omega \leq \xi$. Seja $\aleph_\alpha \sim \xi$.

Como a relação $\sim$ é uma relação de equivalência, o ordinal α indexando $\aleph_\alpha$ é único. $\Box$

Definimos o **cardinal**cardinal de x como sendo $|x| = n \in \omega$,$|x|$ se x contiver apenas n elementos, ou $|x| = \aleph_\alpha$, se $x \sim \aleph_\alpha$. Chamaremos cada $n \in \omega$ e cada $\aleph_\alpha$ de cardinal.

Caso $\kappa = \aleph_\alpha$, denotamos $\kappa^+ = \aleph_{\alpha+1}\kappa^+$ e dizemos que κ^+ é **cardinal sucessor**cardinal!sucessor. Caso α seja ordinal limite, chamamos $\aleph_\alpha$ de **cardinal limite**.cardinal!limite

Exercício 65 *Mostre que se $\kappa = \aleph_\alpha$ for cardinal limite, então $\kappa = \bigcup_{\beta<\alpha} \aleph_\beta$.*

5.2.1 Aritmética Cardinal

As operações de soma, produto e exponenciação de cardinais continuam sendo as mesmas para cardinais$^{\mathsf{ZF}}$, mas agora usando o representante $n \in \omega$ ou $\aleph_\alpha$ do conjunto $|x|_{\mathsf{ZF}}$.

Exploremos algumas de suas propriedades.

Seja κ_j, $j \in I \neq \varnothing$, uma família de cardinais. Definimos

$$\sup\{|I|, \kappa_j : j \in I\} = \bigcup_{j\in I} \kappa_j \cup |I|.$$

Lema 24 *Seja κ_j, $j \in I \neq \varnothing$, uma família de cardinais infinitos. Então*

$$\sum_{j\in I} \kappa_j = \sup\{|I|, \kappa_j : j \in I\}.$$

Demonstração: Temos que $\sum_{j\in I} \kappa_j \leq (\sup\{\kappa_j : j \in I\}) \cdot |I| = \sup\{|I|, \kappa_j : j \in I\}$. $\square$

Teorema 25 ***(König[6])****teorema!ko@König Sejam κ_i e λ_i, $i \in I$, duas famílias de cardinais satisfazendo $\kappa_i < \lambda_i$, para todo $i \in I$. Então*

$$\sum_{i\in I} \kappa_i < \prod_{i\in I} \lambda_i.$$

Demonstração: Sejam $x_i = \{i\} \times \kappa_i$ e $y_i = \{i\} \times \lambda_i$, $i \in I$. Então $x_i \subsetneq y_i$, $i \in I$ e os conjuntos y_i (e, portanto, os x_i) são não vazios e dois a dois disjuntos.

[6] J. König, *Zum Kontinuumproblem*, Math. Ann., Vol. 60 (1904), 177-180.

Pelo axioma da escolha, podemos escolher $t_i \in y_i \setminus x_i$, $i \in I$.

Para cada $w \in \bigcup_{i\in I} x_i$, seja $f(w) = z \in \mathsf{X}_{i\in I}\, y_i$, tal que, se $w \in x_j$, $z(j) = w$ e se $i \neq j$, $z(i) = t_i$. Então f é função injetora, mostrando que $\sum_{i\in I} \kappa_i \leq \prod_{i\in I} \lambda_i$.

Para mostrar a desigualdade estrita, mostremos que se $f : \bigcup_{i\in I} x_i \to \mathsf{X}_{i\in I}\, y_i$ for uma função qualquer, então f não pode ser sobrejetora.

Assim, seja f uma tal função. Para cada $i \in I$ e cada $t \in x_i$, $f(t) \in \mathsf{X}_{i\in I} y_i$. Seja $z_i = \{f(t)_i : t \in x_i\} \subset y_i$. Temos que $z_i \preceq x_i$ e, como $|x_i| = \kappa_i < \lambda_i = |y_i|$, $y_i \setminus z_i \neq \varnothing$. Seja $v_i \in y_i \setminus z_i$, $i \in I$. Então $v = (v_i)_{i\in I} \in \mathsf{X}_{i\in I}\, y_i$ e, por construção, $v \notin \operatorname{Im}(f)$.

Isso mostra que $\sum_{i\in I} \kappa_i < \prod_{i\in I} \lambda_i$. $\square$

5.2.2 Cofinalidade

Seja cf : $\mathsf{Ord} \to \mathsf{Ord}$ dada por: se α for ordinal limite, $\operatorname{cf}(\alpha)$ é o menor ordinal β, tal que existe $f : \beta \to \alpha$ crescente e não limitada em α (ou seja, para cada $\zeta < \alpha$, existe $\xi < \beta$, tal que $\zeta < f(\xi) < \alpha$); $\operatorname{cf}(\alpha + 1) = 1$ e $\operatorname{cf}(0) = 0$. Chamaremos $\operatorname{cf}(\alpha)$ de **cofinalidade**ordinal!cofinalidadecofinalidade de α. A cofinalidade só será interessante nos casos em que α for ordinal limite.

Observe-se que a função identidade $f : \alpha \to \alpha$, para α ordinal limite α, é crescente e não limitada. Por isso, $\operatorname{cf}(\alpha) \leq \alpha$.

Exercício 66 *Mostre que, se λ for um ordinal limite, então* $\operatorname{cf}(\lambda)$ *também será um ordinal limite.*

Exercício 67 *(ZF) Definimos a relação binária entre ordinais $\alpha\, CF\, \beta$ se $\alpha \leq \beta$ e existe $f : \alpha \to \beta$, tal que $\beta = \bigcup \operatorname{Im}(f)$. Observe-se que não dissemos nada sobre f ser crescente. Mostre que*

1. *CF é relação transitiva.*

2. *mostre que*

$$\operatorname{cf}(\alpha) = \begin{cases} \bigcap\{\beta : \beta\, CF\, \alpha\}, & \textit{se } \alpha \textit{ for ordinal limite;} \\ \bigcap\{\beta : \beta\, CF\, \alpha\} + 1, & \textit{se } \alpha = \beta + 1. \end{cases}$$

Teorema 26 *(ZF) Para cada ordinal limite λ, $\mathrm{cf}(\lambda)$ é um ordinal inicial ω_α.*

Demonstração: Usaremos o exercício anterior: $\mathrm{cf}(\lambda) = \bigcap\{\beta : \beta\, CF\, \alpha\}$.

Seja $\alpha \in \mathsf{Ord}$, tal que $\mathrm{cf}(\lambda) \sim \aleph_\alpha$.

Como $\aleph_\alpha$ é um ordinal inicial, $\aleph_\alpha \leq \mathrm{cf}(\lambda)$.

Por outro lado, uma bijeção $f : \aleph_\alpha \to \mathrm{cf}(\lambda)$, composta com uma função crescente e não limitada $g : \mathrm{cf}(\lambda) \to \lambda$, produz uma função $h : \aleph_\alpha \to \lambda$, tal que $\bigcup \mathrm{Im}(h) = \lambda$. Portanto, $\mathrm{cf}(\lambda) \leq \aleph_\alpha$.

Ou seja, $\mathrm{cf}(\lambda) = \aleph_\alpha$, um ordinal inicial. $\Box$

Um cardinal $\kappa \geq \aleph_0$ é dito **cardinal regular**cardinal!regular se $\kappa = \mathrm{cf}(\kappa)$; ele é dito um **cardinal singular**cardinal!singular se $\mathrm{cf}(\kappa) < \kappa$.

Exercício 68 *Seja λ um ordinal limite, tal que $\mathrm{cf}(\lambda) > \omega$. Mostre que $\mathrm{cf}(\aleph_\lambda) = \aleph_{\mathrm{cf}(\lambda)}$.*

Exercício 69 *(ZFE) Seja λ um ordinal limite, tal que $\mathrm{cf}(\lambda) = \omega$. Mostre que $\mathrm{cf}(\aleph_\lambda) = \aleph_0$.*

De certo modo, podemos dizer que a maioria dos cardinais infinitos são regulares:

Teorema 27 *(ZFE) Para cada ordinal α, $\mathrm{cf}(\aleph_{\alpha+1}) = \aleph_{\alpha+1}$.*

Demonstração: Seja $\beta < \aleph_{\alpha+1}$ for um ordinal e $f : \beta \to \aleph_{\alpha+1}$ uma função. Como $\aleph_{\alpha+1}$ é um ordinal inicial, para cada $\delta < \beta$, $f(\delta) \preceq \aleph_\alpha$, pois $f(\delta) < \aleph_{\alpha+1}$.

Usando o axioma da escolha, seja $f_\delta : f(\delta) \to \aleph_\alpha$ uma função injetora. Como $\beta \preceq \aleph_\alpha$, temos que

$$|\bigcup_{\delta<\beta} f(\delta)| \leq \aleph_\alpha \cdot \aleph_\alpha = \aleph_\alpha,$$

o que implica que $\mathrm{cf}(\aleph_{\alpha+1}) = \aleph_{\alpha+1}$. $\Box$

5.3 Exponenciação Cardinal

Voltando à aritmética cardinal, podemos enunciar alguns resultados que envolvem a exponenciação, válidos com o uso do axioma da escolha. Assim, nesta seção trabalhamos na teoria ZFE.

O objetivo desta seção é a obtenção de resultados que permitem dizer qual é o valor de κ^λ, principalmente nos casos em que κ e λ forem cardinais infinitos.

5.3.1 Resultados Básicos

Comecemos com uma limitação sobre o que pode ser a cofinalidade de κ^λ.

Teorema 28 *Sejam $\kappa \geq 2$ e $\lambda \geq \omega$ cardinais. Então* $\mathrm{cf}(\kappa^\lambda) > \lambda$.

Demonstração: Seja $\vartheta \leq \lambda$ um cardinal infinito e seja κ_α, $\alpha < \vartheta$ uma seqüência crescente de cardinais, tais que $\kappa_\alpha < \kappa^\lambda$. Já sabemos que $\sup \kappa_\alpha = \sum_{\alpha<\vartheta} \kappa_\alpha$.

Pelo Teorema de König (Teorema 25, página 96), $\sup_{\alpha<\vartheta} \kappa_\alpha < \prod_{\alpha<\vartheta} \kappa^\lambda = \kappa^{\lambda\theta} = \kappa^\lambda$.

Isso demonstra que $\mathrm{cf}(\kappa^\lambda) \geq \lambda$. $\square$

Exploremos os possíveis valores de $\aleph_\alpha^{\aleph_\beta}$.

Lema 25 *Sejam $\alpha \leq \beta$ dois ordinais. Então* $\aleph_\alpha^{\aleph_\beta} = 2^{\aleph_\beta}$.

Demonstração: Temos que $2^{\aleph_\beta} \leq \aleph_\alpha^{\aleph_\beta}$.

Por outro lado, $\aleph_\alpha^{\aleph_\beta} \leq (2^{\aleph_\alpha})^{\aleph_\beta} = 2^{\aleph_\beta}$, pois as hipótese implicam que $\aleph_\alpha \cdot \aleph_\beta = \aleph_\beta$. $\square$

A seguinte fórmula é devida a Hausdorff[7].

[7] *Der Potenzbegriff in der Mengenlehre.* Jber. Deutsch. Math.-Verein 13 (1904), 569-571.

Lema 26 ***(Fórmula de Hausdorff)****for@fórmula!HausdorffHausdorff!for@fórmula Para todos ordinais α e β, vale a igualdade*

$$\aleph_{\alpha+1}^{\aleph_\beta} = \aleph_{\alpha+1}\aleph_\alpha^{\aleph_\beta}.$$

Demonstração: Pelo lema anterior, temos que se $\beta \geq \alpha + 1$, então $\aleph_{\alpha+1}^{\aleph_\beta} = 2^{\aleph_\beta} = \aleph_{\alpha+1}2^{\aleph_\beta}$.

Suponhamos agora que $\beta \leq \alpha$.

Como $\aleph_\alpha^{\aleph_\beta} \leq \aleph_{\alpha+1}^{\aleph_\beta}$ e $\aleph_{\alpha+1} \leq \aleph_{\alpha+1}^{\aleph_\beta}$, temos a desigualdade

$$\aleph_{\alpha+1}^{\aleph_\beta} \geq \aleph_{\alpha+1}\aleph_\alpha^{\aleph_\beta}.$$

Precisamos demonstrar que vale a desigualdade contrária:

$$\aleph_{\alpha+1}^{\aleph_\beta} \leq \aleph_{\alpha+1}\aleph_\alpha^{\aleph_\beta}.$$

Para isso, consideremos o conjunto ${}^{\omega_\beta}\omega_{\alpha+1}$ das funções $f : \omega_\beta \to \omega_{\alpha+1}$. Como $\beta \leq \alpha$, cada função $f : \omega_\beta \to \omega_{\alpha+1}$ tem imagem limitada em $\omega_{\alpha+1}$ e, portanto, podemos escrever ${}^{\omega_\beta}\omega_{\alpha+1} = \bigcup_{\gamma<\omega_{\alpha+1}} {}^{\omega_\beta}\gamma$. Daí, tomando cardinalidades, temos que

$$\aleph_{\alpha+1}^{\aleph_\beta} = |\bigcup_{\gamma<\omega_{\alpha+1}} {}^{\omega_\beta}\gamma| \leq \sum_{\gamma<\omega_{\alpha+1}} |{}^{\omega_\beta}\gamma| \leq \aleph_{\alpha+1}\aleph_\alpha^{\aleph_\beta}.$$

Com isto, terminamos a demonstração. □

Seja $\gimel(\kappa) = \kappa^{\mathrm{cf}(\kappa)}\gimel(\kappa)$ a função *gimel*função!gimel, definida sobre os cardinais infinitos κ. Denotamos $2^{<\kappa} = \bigcup_{\xi<\kappa} 2^\xi$ (exponenciação de cardinais).

O próximo teorema caracteriza a exponenciação cardinal κ^λ em ZFE, em termos de 2^λ, de $\gimel(\kappa)$ e de valores de μ^λ, com $\mu < \kappa$.

Teorema 29 ***(Bukovský-Jech)***[8] *(ZFE) Seja λ um cardinal infinito. Então, para cada cardinal infinito κ:*

[8] L. Bukovský, *The continuum problem and the powers of alephs*, Comment. Math. Univ. Carolinae 6 (1965), 181-197. T. Jech, *Properties of the gimel function and a classification of singular cardinals.* Collection of articles dedicated to Andrzej Mostowski on the occasion of his sixtieth birthday, I. Fund. Math. 81 (1973), no. 1, 57-64.

1. *se* $\kappa \le \lambda$, *então* $\kappa^\lambda = 2^\lambda$;
2. *se existir algum cardinal* $\mu < \kappa$, *tal que* $\mu^\lambda > \kappa$, *então* $\kappa^\lambda = \mu^\lambda$;
3. *se* $\kappa > \lambda$ *e para todo* $\mu < \kappa$, $2^\mu < \kappa$, *então*
   (a) *se* $\mathrm{cf}(\kappa) > \lambda$, *então* $\kappa^\lambda = \kappa$;
   (b) *se* $\mathrm{cf}(\kappa) \le \lambda$, *então* $\kappa^\lambda = \gimel(\kappa)$.

Demonstração: O item 1 já foi demonstrado acima.

Para o item 2, temos que $\mu < \kappa$ implica $\mu^\lambda \le \kappa^\lambda$. Da desigualdade $\mu^\lambda > \kappa$, temos $\mu^\lambda = (\mu^\lambda)^\lambda \ge \kappa^\lambda$.

Para o item 3, se κ for cardinal sucessor, usamos a fórmula de Hausdorff (do lema anterior).

Se κ for cardinal limite, então, da hipótese $\mu < \kappa \rightarrow \mu^\lambda < \kappa$, obtemos que $\kappa = \bigcup_{\mu<\kappa} \mu^\lambda$ e, se $\mathrm{cf}(\kappa) > \lambda$, então toda função (ordinal) $f : \lambda \rightarrow \kappa$ é limitada e, assim, $\kappa^\lambda = \bigcup_{\mu<\kappa} \mu^\lambda = \kappa$. Se $\lambda \ge \mathrm{cf}(\kappa)$, escrevemos $\kappa = \sum_{i<\mathrm{cf}(\kappa)} \kappa_i$, com cada $\kappa_i < \kappa$. Temos $\kappa^\lambda = (\sum_{i<\mathrm{cf}(\kappa)} \kappa_i)^\lambda \le (\prod_{i<\mathrm{cf}(\kappa)} \kappa_i)^\lambda = \prod_{i<\mathrm{cf}(\kappa)} \kappa_i^\lambda \le \prod_{i<\mathrm{cf}(\kappa)}(\sup_{i<\mathrm{cf}(\kappa)} \kappa_i^\lambda) = (\sup_{i<\mathrm{cf}(\kappa)} \kappa_i^\lambda)^{\mathrm{cf}(\kappa)} \le (\kappa^\lambda)^{\mathrm{cf}(\kappa)} = \kappa^\lambda$. Da igualdade $\kappa = \bigcup_{\mu<\kappa} \mu^\lambda$, obtemos que $\kappa^\lambda = \kappa^{\mathrm{cf}(\kappa)}$, como queríamos. $\square$

5.4 A Hipótese do Contínuo

Lembramos que em seu trabalho de 1878 [9], Cantor trabalhou com o conceito de cardinalidade e, em particular, demonstrou que $\mathbb{R}$ é não enumerável, em contraste com o conjunto dos números reais algébricos (que são as raízes reais de polinômios com coeficientes em $\mathbb{Z}$). Nesse artigo, conjecturou que todo subconjunto infinito de $\mathbb{R}$ seria enumerável ou haveria bijeção dele com $\mathbb{R}$. Esta é a chamada a Hipótese do Contínuo:

Hipótese do Contínuo (HC):hipótese!contínuoHC $2^{\aleph_0} = \aleph_1$.

Essa hipótese tem fundamento heurístico em vários exemplos da Análise Matemática e da Topologica da reta real. Cantor estudou principalmente

[9] *Ein Beitrag zur Mannigfaltigkeitslehre*, Journal für die reine und angewandte Mathematik, Vol. 84 (1878), pp. 242-258.

os chamados **conjuntos perfeitos**conjunto!perfeito, que são os conjuntos fechados $X \subset \mathbb{R}$ não vazios e tais que todos os seus pontos são **pontos de acumulação**,ponto!acumulação ou seja, para cada $x \in X$, e cada $\varepsilon > 0$, existe $y \in X$, tal que $0 < |y - x| < \varepsilon$. Por exemplo, $\mathbb{R}$ é perfeito, cada intervalo não vazio de $\mathbb{R}$ é perfeito.

Teorema 30 *(ZFE) A cardinalidade de cada subconjunto perfeito $X \subset \mathbb{R}$ é $2^{\aleph_0}$.*

Demonstração: Obteremos por recursão em ω uma coleção I_s de intervalos abertos e não vazios, indexados por seqüência finitas $s \in {}^{<\omega}2$, sendo que n é o tamanho dessa seqüência. Tal família de intervalos satisfará $I_{sj} \subset I_s$, $I_{sj} \cap X \neq \varnothing$, $j = 0, 1$, e $I_{s0} \cap I_{s1} = \varnothing$, sendo que sj representa a seqüência obtida da seqüência s, concatenando ao final o elemento $j = 0, 1$.

Comecemos escolhendo dois intervalos abertos e disjuntos I_0 e I_1, tais que $X \cap I_j \neq \varnothing$, $j = 0, 1$. Por conveniência, suporemos que esses intervalos tem um tamanho menor que $1/2$.

Suponhamos agora que já tenhamos obtido os intervalos I_s, para toda seqüência s de tamanho n. Escolhamos dois pontos distintos $x, y \in I_s$ e dois intervalos disjuntos $I_{s0} \ni x$ e $I_{s1} \ni y$, contidos em I_s, cujos tamanhos sejam no máximo a metade do tamanho de I_s. Tal escolha pode ser feita devido à hipótese de que X é perfeito.

Por fim, para cada $s : \omega \to 2 = \{0, 1\}$, denotamos $s \restriction_n$ sua restrição a $n = \{0, \ldots, n-1\}$. Escolhamos um ponto $x_{s,n} \in I_{s\restriction_n}$. Devido à restrição imposta aos tamanhos dos intervalos, temos que $|x_{s,n} - x_{s,n+k}| < 1/2^n$. Portanto, para cada $s : \omega \to 2$, existe $x_s \in X$, tal que $\lim_{n\to\infty} x_{s,n} = x_s$.

Dados $s_1, s_2 : \omega \to 2$, se $s_1 \neq s_2$, então $x_{s_1} \neq x_{s_2}$. Assim, a cardinalidade de X é igual à de ${}^{\omega}2$, ou seja, $2^{\aleph_0}$. $\square$

Vamos explorar mais um pouco esse resultado.

Exercício 70 *Mostre que cada um dos seguintes conjuntos tem cardinalidade $\mathfrak{c} = 2^{\aleph_0}$:*

1. $\mathbb{R}^n$, $n \in \omega \setminus \{0\}$;

2. ${}^{\mathbb{N}}\mathbb{R}$

3. *o conjunto das funções contínuas* $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$*;*

4. *o conjunto dos subconjuntos abertos de* $\mathbb{R}$.

Exercício 71 *Mostre que todo subconjunto fechado de* $\mathbb{R}^n$ *tem cardinalidade* $\kappa \leq \aleph_0$ *ou* $\kappa = \mathfrak{c}$.

Definimos a seguinte distância em ${}^{\mathbb{N}}\mathbb{R}$:

$$d(f,g) = \sum_{j\in\omega} \frac{1}{2^j} \frac{|f(j) - g(j)|}{1 + |f(j) - g(j)|}.$$

Exercício 72 *Mostre que essa função* $d(f,g)$ *tem as seguintes propriedades:*

1. $d(f,g) = d(g,f)$*;*

2. $d(f,f) = 0$ *se, e somente se,* $f = 0$*;*

3. $d(f,h) \leq d(f,g) + d(g,h)$*;*

4. *dada seqüência* $f_n : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, $n\omega$*, tal que, dado* $\varepsilon > 0$*, existe* $n_0 \in \omega$*, tal que, para todos* $m, n \geq n_0$, $d(f_m, f_n) < \varepsilon$*,* ***então*** *existe* $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$*, tal que* $\lim_{n\to\infty} d(f, f_n) = 0$*. (Sugestão:* $f(k) = \lim_{n\to\infty} f_n(k)$*.)*

Seja $\mathcal{S} = {}^{\mathbb{N}}\mathbb{R}$. Com a função distância $d(f,g)$ dada acima, podemos definir o que são conjuntos fechados e abertos em $\mathcal{S}$: $X \subset \mathcal{S}$ é aberto de para cada $f \in X$ existe $\varepsilon > 0$, tal que $\{g \in \mathcal{S} : f(f,g) < \varepsilon\} \subset X$; X será fechado se $\mathcal{S} \setminus X$ for aberto.

Exercício 73 *Mostre que todo subconjunto perfeito de* $\mathcal{S}$ *tem cardinalidade* $\mathfrak{c}$*. Mostre que se* $X \subset \mathcal{S}$ *for conjunto fechado, então ou* $|X| \leq \aleph_0$*, ou* $|X| = \mathfrak{c}$*.*

A noção de função contínua $F : A \subset \mathcal{S} \to \mathbb{R}$ é a mesma que em $\mathbb{R}$, usando ε e δ, com a distância $d(f,g)$.

Exercício 74 *Mostre que para cada conjunto aberto $O \subset \mathbb{R}$, existe um conjunto fechado $X_O \subset \mathcal{S}$ e função contínua e bijetora $F : X_O \to O$. (Sugestão: para cada $x \in O$, seja $f_x \in \mathcal{S}$, dada por $f_x(0) = x$, $f_x(1) = 1/\mathrm{dist}\,(x, \partial O)$, o inverso da distância de x à fronteira de O, ∂O; seja $X_O = \{f_x : x \in O\}$.)*

Com isto, podemos demonstrar que:

Teorema 31 *Seja $A \subset \mathbb{R}$ um conjunto boreliano. Então existe um conjunto fechado $X_A \subset \mathcal{S}$ e uma função contínua e bijetora $F : X_A \to A$.*

Demonstração: Como os conjuntos borelianos podem ser construídos por recursão transfinita em ω_1, vamos demonstrar este teorema por indução transfinita.

O passo inicial refere-se aos conjuntos abertos de $\mathbb{R}$, já considerados no exercício acima.

Para o passo de indução, observamos que todo conjunto boreliano pode ser obtido a partir dos conjuntos abertos, usando interseções enumeráveis e uniões disjuntas enumeráveis (**exercício:** mostre isto por indução, eliminando-se o complemento passo a passo).

Consideremos o caso da interseção enumerável. Como hipótese de indução temos uma seqüência de conjuntos borelianos $A_j \subset \mathbb{R}$, $j \in \omega$, conjuntos fechados $X_{A_j} \subset \mathcal{S}$ e funções bijetoras e contínuas $F_j : X_{A_j} \to A_j$. Escrevamos $\mathbb{N} = \bigcup_{j\in\omega} N_j$, sendo que cada N_j seja infinito e $N_j \cap N_k = \varnothing$ se $j \neq k$. Enumeremos cada $N_j = \{n_{j,k} : k \in \omega\}$. Seja $X = \{g \in \mathcal{S} \ : \text{para cada } j, k \in \omega, \text{ existe } f \in X_{A_j}, \text{ tal que } g(n_{j,k}) = f(k)\}$. Então X é fechado. Definimos $X_A = \{g \in X : F_i(g_i) = F_j(g_j)\}$, sendo que $g_m(k) = g(n_{m,k})$, que é fechado e se $A = \bigcap_{n\in\omega} A_n$, seja $F : X_A \to A$ dada por $F(g) = F_0(g_0)$.

Consideremos agora o caso da uniãodisjunta enumerável.

Suponhamos que $X = \bigcup_{n\in\omega} X_n$, obtido no nível α, sendo que para cada $n \in \omega$, X_n tenha sido obtido em um nível $\beta_n < \alpha$. Por hipótese de indução, existem fechados $A_n \subset \mathcal{S}$ e funções contínuas e bijetoras $F_n : A_n \to X_n$. Sejam $B_n = \{f \in \mathcal{S} : \exists g \in A_n\,(g(0) = n \wedge \forall j \in \omega\,(g(j+1) = f(j)))\}$, ou seja, deslocamos as coordenadas de A_n e colocamos a altura n na primeira coordenada. Assim, a distância entre B_n e B_m, com $m \neq n$ fica maior do que $1/2$. Por conta disso, a união $B = \bigcup_{n\in\omega} B_n$ é um conjunto fechado.

Definimos $F : B \to X$, por $F(g) = F_n(\tilde{g})$, onde $\tilde{g}(j) = g(j+1)$, para todo $j \in \omega$, ou seja, deslocamos as coordenadas de volta para seu lugar original.

Fica como exercício a verificação de que F é bijetora e contínua. $\square$

Teorema 32 ***(Alexandrov, 1916*** [10]***)*** *Seja $X \subset \mathbb{R}$ um conjunto boreliano. Então $|X| \leq \aleph_0$ ou $|X| = 2^{\aleph_0}$.*

Demonstração: Escrevendo um conjunto boreliano X como a imagem de um conjunto fechado $A \subset \mathcal{S}$ por uma função contínua e bijetora $F : A \to X$, se $|X| > \aleph_0$, então $|A| > \aleph_0$. Isto implica que $|A| = 2^{\aleph_0}$, por ser fechado (exercício: verifique isso; observe que estamos falando de um subconjunto fechado de $\mathcal{S}$). Como F é bijetora, $|X| = 2^{\aleph_0}$. $\square$

Esses resultados servem para indicar o proque da hipótese do contínuo de Cantor. Não foi uma sugestão *ad hoc*, mas com fundamento heurístico.

5.4.1 Hipótese Generalizada do Contínuo

Em vista do Teorema de Cantor, que diz não haver função sobrejetora $f : X \to \mathcal{P}(X)$, qualquer que seja o conjunto X, pode-se perguntar o que acontece entre as cardinalidades de X e de $\mathcal{P}(X)P$.

A Hipótese Generalizada do contínuo foi enunciada por Felix Hausdorff em 1908 [11], generalizando a Hipótese do Contínuo de Cantor. Ela simplifica extraordinariamente a exponenciação cardinal.

Hipótese Generalizada do Contínuo (HGC):hipótese!contínuo!generalizadaHGC para todo ordinal α, $2^{\aleph_\alpha} = \aleph_{\alpha+1}$.

Lema 27 *(ZFE+HGC) Para cada cardinal infinito κ, $\mathrm{cf}(\kappa^{\mathrm{cf}(\kappa)}) > \kappa$.*

[10] P. Alexandrov, *Sur la Puissance des Ensembles Mesurables B*, Compte Rendus Hebdomadaires de Scéances de l'Académie de Sciences de Paris. Vol. 162 (1916), 323-325. Nesse artigo, a argumentação deste autor não é exatamente esta, mas uma análise cuidadosa do mesmo indica que a formulação aqui descrita segue fielmente seu raciocínio. Para a solução apresentada, consulte a obra de P. Komjáth e V. Totik, **Problems and Theorems in Classical Set Theory**, Springer-Verlag, Alemanha, 2006.

[11] *Grundzüge einer Theorie der geordneten Mengen*, Mathematische Annallen, Vol. 65 (1908), pp. 435-505

Demonstração: Se κ for cardinal regular, então $\mathrm{cf}(\kappa^{\mathrm{cf}\kappa}) = \mathrm{cf}(\kappa^\kappa) = \kappa^+$.

Se κ for singular, $\kappa = \sum_{i<\kappa} \kappa_i$, com cada $\kappa_i < \kappa$ e $\kappa_i > \mathrm{cf}(\kappa)$. Daí, $\kappa^{\mathrm{cf}(\kappa)} = (\sum_{i<\mathrm{cf}(\kappa)} \kappa_i)^{\mathrm{cf}(\kappa)} = \prod_{i<\mathrm{cf}(\kappa)} \kappa_i^{\mathrm{cf}(\kappa)} \leq \prod_{i<\mathrm{cf}(\kappa)} \kappa_i^+ \leq \kappa^{\mathrm{cf}(\kappa)}$, usando na penúltima desigualdade a HGC. Pelo Teorema de König (Teorema 25, 96), $\kappa = \sum_{i<\mathrm{cf}(\kappa)} \kappa_i < \prod_{i<\mathrm{cf}(\kappa)} \kappa_i = \kappa^{\mathrm{cf}(\kappa)}$. $\square$

Exercício 75 *(ZFE) Mostre que para cada cardinal infinito κ, tal que para todo cardinal $\mu < \kappa$, $2^\mu < \kappa$, vale que $\mathrm{cf}(\kappa^{\mathrm{cf}(\kappa)}) > \kappa$, agora sem usar a HGC. Observe que as hipóteses implicam que se $\kappa = \aleph_\alpha$, então α tem que ser ordinal limite.*

Exercício 76 *(ZFE+HGC) Mostre que para todos cardinais infinitos λ e κ, $\kappa^\lambda = \kappa$, se $\lambda < \mathrm{cf}(\kappa)$ e $\kappa^\lambda = \lambda^+$, se $\lambda \geq \mathrm{cf}(\kappa)$.*

5.4.2 Equivalências com a Hipótese do Contínuo

A Hipótese do Contínuo de Cantor está mais relacionada com as propriedades de $\mathbb{R}$. Algumas dessas propriedades [12] são equivalentes à HC, assumindo ZFE.

Teorema 33 *(ZFE) Os seguintes enunciados são equivalentes:*

1. *(HC) $2^{\aleph_0} = \aleph_1$.*
2. *existem conjuntos $X, Y \subset \mathbb{R}^2$, tais que $\mathbb{R}^2 = X \cup Y$ e para todo $a \in \mathbb{R}$, os conjuntos $X_a = \{(s,t) \in X : s = a\}$ e $Y_a = \{(s,t) \in Y : t = a\}$ são finitos ou enumeráveis.*
3. *Existe uma seqüência de funções $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $n \in \omega$, tal que, para todo subconjunto não enumerável $X \subset \mathbb{R}$, existe um conjunto $N_X \subset \omega$, tal que $\omega \setminus N_X$ é finito (podendo ser até vazio) e para cada $n \in N_X$, a imagem de X pela função f_n é todo $\mathbb{R}$.*
4. *$\mathbb{R} = \bigcup_{i \in I} X_i$, sendo que cada X_i é enumerável e a família $\mathcal{X} = \{X_i : i \in I\}$ é linearmente ordenada pela relação $X \subset Y$.*

[12] O resultado a seguir deve-se a W. Sierpiński. Veja o capítulo I de sua obra *Hipothèse du Continu*, Monografie Mathematyczne, Warsaw Garasiński, Polônia, 1934.

Demonstração: Vamos mostrar cada equivalência: $1 \Leftrightarrow 2$, $1 \Leftrightarrow 3$ e $1 \Leftrightarrow 4$.

$1 \Rightarrow 2$: Devido à hipótese do contínuo e ao Teorema de Zermello (Teorema 11, 71), podemos enumerar $\mathbb{R} = \{t_\alpha : \alpha < \omega_1\}$. Seja $X = \{(t_\alpha, t_\beta) \in \mathbb{R}^2 : \beta \leq \alpha < \omega_1\}$ e seja $Y = \mathbb{R}^2 \setminus X = \{(t_\alpha, t_\beta) : \alpha < \beta\}$. Dado $x_0 \in \mathbb{R}$, seja $\alpha < \omega_1$ seu índice, $x_0 = t_\alpha$. Então $X_{x_0} = \{(t_\alpha, t_\beta) : \beta \leq \alpha\}$. Como $\alpha < \omega_1$ implica que α é ordinal enumerável ou finito, X_{x_0} é finito ou enumerável. Seja $y_0 \in \mathbb{R}$, indexado por $\beta < \omega_1$, $y_0 = t_\beta$. Então $Y_{y_0} = \{(t_\alpha, t_\beta) : \alpha < \beta\}$, que também é finito ou enumerável.

$2 \Rightarrow 1$: Temos que mostrar que a cardinalidade de $\mathbb{R}$ é $\aleph_1$. Suponhamos que $\mathbb{R} = X \cup Y$, sendo que os conjuntos X e Y satisfaçam as condições do enunciado 2. Sejam $A \subset \mathbb{R}$, um conjunto de cardinalidade $\aleph_1$, $Z = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in A\}$ (Z é a união de todas as retas verticais $x = a$, para $a \in A$). Seja $W = X \cap Z$. Então a cardinalidade de W é $|W| \leq \aleph_1$, pois, para cada $a \in \mathbb{R}$, o conjunto X_a tem cardinalidade $|X_a| \leq \aleph_0$, e $W \cap X = \bigcup_{a \in A} X_a$. Seja $N = \{y \in \mathbb{R} : \exists x \in \mathbb{R}\, (x, y) \in W\}$, a projeção de W sobre o eixo das ordenadas. Certamente, $|N| \leq \aleph_1$. Afirmamos que $W = \mathbb{R}$, pois se $y_0 \in \mathbb{R}$, a reta $y = y_0$ encontra uma quantidade não enumerável ($\aleph_1$) de pontos de Z e, devido às hipóteses sobre os conjuntos X e Y, existe $x_0 \in X$, tal que $(x_0, y_0) \in X \cap Z$ e, portanto, $y_0 \in N$. Isso mostra que $|\mathbb{R}| = \aleph_1$, ou seja, a hipótese do contínuo.

$1 \Rightarrow 3$: Pela Hipótese do contínuo, existe uma enumeração $\mathbb{R} = \{x_\alpha : \alpha < \omega_1\}$. Como $|{}^\omega\mathbb{R}| = |\mathbb{R}|^{|\omega|} = \aleph_1^{\aleph_0} = \aleph_1$ e $|{}^\omega\omega| = |\mathbb{R}|^{|\omega|} = \aleph_0^{\aleph_0} = \aleph_1$, sejam ξ^α, uma enumeração (com repetição: veja adiante) das seqüências $\xi^\alpha : \omega \to \mathbb{R}$, e k^α uma enumeração das seqüências $k^\alpha : \omega \to \omega$, feitas de tal modo que dadas seqüências $\xi : \omega \to \mathbb{R}$ e $k : \omega \to \omega$, existe um índice $\alpha < \omega_1$, tal que $\xi = \xi^\alpha = (\xi^\alpha_n)$ e $k = k^\alpha = (k^\alpha_n)$. Isso é possível, pois $\aleph_1^2 = \aleph_1$, extraindo a enumeração desejada de uma enumeração de ${}^\omega\mathbb{R} \times {}^\omega\omega$.

Para cada $\alpha < \omega_1$ infinito, α é ordinal enumerável. Escolhamos uma enumeração de $\alpha = \{\zeta^\alpha_n : n \in \omega\}$.

Sejam $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $n \in \omega$, funções definidas por $f_n(x) = \xi^{\zeta^\alpha_k}_{k^\alpha_n}$, sendo que α é o índice de x na enumeração de $\mathbb{R}$, $x = x^\alpha$.

Afirmamos que, dado $X \subset \mathbb{R}$ um subconjunto não enumerável, existe um conjunto $N_X \subset \omega$, cujo complemento em ω é finito, e para cada $n \in N_X$, a imagem de X pela função f_n, indicada por $f_n(X)$, é todo $\mathbb{R}$.

Arguindo por contradição, suponhamos que exista $X \subset \mathbb{R}$ não enumerável e conjunto infinito $N = \{n_k : k \in \omega\} \subset \omega$, tais que para cada $n \in N$, a imagem $Y_n \subset \mathbb{R}$ de X por f_n não seja todo $\mathbb{R}$.

Sejam $y_j \in \mathbb{R} \setminus Y_j$, e seja $\mu < \omega_1$ o índice das seqüências $\xi^\mu = (y_k)$ e $k^\mu = (k_j)$. Escrevamos, então, $y_j = \xi^\mu_j$ e $k_j = k^\mu_j$. Seja $\alpha < \omega_1$, tal que $\mu < \alpha$ e seja $\mu = \zeta^\alpha_n$ (na enumeração de α, dada acima). Assim, temos $y_n = \xi^{\zeta^\alpha_n}_{k_n}$, sendo n o índice de μ na enumeração de α. Pela definição de f_n, temos que $f_n(x^\alpha) = y_n$. Isso significa que $x^\alpha \notin X$. Mas isso vale para cada $\alpha > \mu$, o que implica que $X \subset \{x^\mu : \mu < \alpha\}$ e este último conjunto é enumerável. Portanto, X é enumerável, uma contradição que termina a demonstração de que $1 \Rightarrow 3$.

$3 \Rightarrow 1$: Seja $X \subset \mathbb{R}$ um conjunto de cardinalidade $\aleph_1$ (e, portanto, não enumerável) e seja f_n uma função da lista da hipótese, tal que $f_n(X) = \mathbb{R}$. Com isto temos que $|\mathbb{R}| \leq |X| = \aleph_1$, donde segue que $\mathbb{R}| = \aleph_1$, ou seja, a hipótese do contínuo.

$1 \Rightarrow 4$: Seja $(x^\alpha)_{\alpha<\omega_1}$ uma enumeração de $\mathbb{R}$. Seja $I = \{\alpha : \omega \leq \alpha < \omega_1\}$ e $X_\alpha = \{x^\mu : \mu < \alpha\}$. Certamente, cada X_α é enumerável, $X_\alpha \subset X_\beta$, se $\alpha < \beta < \omega_1$, e $\mathbb{R} = \bigcup_{i\in I} X_i$.

$4 \Rightarrow 1$: Seja $F = \{X_i : i \in I\}$ uma família de subconjuntos de $\mathbb{R}$ conforme a hipótese e seja $A \subset \mathbb{R}$ um subconjunto de cardinalidade $\aleph_1$. Dado $x \in \mathbb{R}$, escolhemos $D(x) \in F$, tal que $x \in D(x)$. Como $D(x)$ é enumerável e A não enumerável, existe $y \in A \setminus D(x)$. Da hipótese de F ser linearmente ordenado pela inclusão, concluímos que $D(x) \subset D(y)$ (pois $y \notin D(x)$). Ou seja, $\mathbb{R} = \bigcup_{y\in A} D(y)$, o que implica que $|R| \leq |A| = \aleph_1$, ou seja, $|\mathbb{R}| = \aleph_1$.

Com isto, terminamos a demonstração deste teorema. □

Para outras equivalências, consulte-se a obra *Hypothèse du Continu* de W. Sierpiński, já citada.

Exercício 77 *Demonstre as equivalências* $2 \Leftrightarrow 3$*,* $2 \Leftrightarrow 4$ *e* $3 \Leftrightarrow 4$*, sem passar pela Hipótese do Contínuo.*

5.5 Conjuntos Estacionários

A ferramenta essencial nas aplicações á aritmética cardinal é a noção de conjunto estacionário e funções regressivas.

Seja λ um ordinal limite. Um conjunto não vazio $C \subset \lambda$ é um **conjunto fechado e ilimitado**conjunto!fechado e ilimitado se satisfizer as duas condições seguintes:

1. para todo conjunto não vazio $A \subset C$, tal que $\sup A \in \lambda$, $\sup A \in C$ (fechado);

2. para todo $\alpha \in \lambda$, existe $\beta \in C$, tal que $\beta > \alpha$ (ilimitado).

Um conjunto $S \subset \lambda$ é **estacionário**conjunto!estacionário se para todo conjunto fechado e ilimitado $C \subset \lambda$, $S \cap C \neq \varnothing$.

Exercício 78 *Mostre que se $C \subset \lambda$ for um conjunto fechado e ilimitado, então para cada $\alpha \in C$, existe ordinal limite $\beta \in C$, tal que $\alpha < \beta$ e a cofinalidade de β é ω. (Sugestão: considere uma seqüência $\alpha_0 = \alpha$, $\alpha_n \in C$, $\alpha_{n+1} > \alpha_n$, etc.)*

Exercício 79 *Mostre que $S = \{\alpha \in \lambda\ : \alpha$ é ordinal limite$\}$ é um conjunto estacionário.*

Exercício 80 *Mostre que $S = \{\alpha \in \lambda\ : \alpha$ é ordinal limite de cofinalidade $\omega\}$ é um conjunto estacionário.*

Vamos especializar nossos resultados ao caso em que $\lambda = \omega_\alpha$, o ordinal inicial correspondente ao cardinal $\aleph_\alpha$, que suporemos regular, $\mathrm{cf}(\omega_\alpha) = \omega_\alpha$, e não enumerável.

Lema 28 *Para todos conjuntos fechados e ilimitados $C, D \subset \omega_\beta$, $C \cap D$ também é fechado e ilimitado.*

Demonstração: Sejam $\alpha_0 \in \omega_\beta$, $\alpha_{2n-1} \in C$ e $\alpha_{2n} \in D$, $n \in \omega$ e $n > 0$, tais que, para todo $n \in \omega$, $\alpha_n < \alpha_{n+1}$. Tais elementos existem pois C e D

são ilimitados. Então $\sup_{n\in\omega}\alpha_n = \sup_{n\in\omega}\alpha_{2n} = \sup_{n\in\omega}\alpha_{2n+1} \in \omega_\beta$ (aqui usamos que ω_β é regular e não enumerável) e, cono cada um dos conjuntos C e D são fechados, $\sup_{n\in\omega}\alpha_n \in C\cap D$. Isso prova que $C\cap D \neq \varnothing$ e é um conjunto ilimitado.

Seja $W \subset C\cap D$, tal que $\sup W \in \omega_\beta$. Então, como C e D são fechados, $\sup W \in C\cap D$. $\square$

Na verdade, temos mais do que isso.

Lema 29 *Sejam $0 < \kappa < \omega_\alpha$ e $C_\xi \subset \omega_\alpha$, $\xi < \kappa$, conjuntos fechados e ilimitados. Então $C = \bigcap_{\xi<\kappa} C_\xi$ é conjunto fechado e ilimitado.*

Demonstração: Faremos a demonstração por indução transfinita em $\kappa < \omega_\alpha$. O caso inicial $\kappa = 1$ é trivial: só temos um conjunto C_0.

Suponha que o resultado valha para todo $\gamma \leq \beta$. Em particular, $\bigcap_{\xi\leq\beta} C_\xi$ é fechado e ilimitado, por hipótese. Daí, o lema anterior aplica-se ao caso $\beta+1$: $\bigcap_{\xi\leq\beta+1} C_\xi = \bigcap_{\xi\leq\beta} C_\xi \cap C_{\beta+1}$

Agora suponhamos que $\lambda < \omega_\alpha$ seja um ordinal limite e que o resultado valha para todo $\gamma \leq \lambda$. A hipótese de indução permite-nos substituir os conjuntos C_ξ, $\xi < \lambda$ pelos conjuntos $\bigcap_{\beta\leq\xi} C_\beta$ e, portanto, podemos supor que os conjuntos C_ξ formam uma seqüência decrescente pela inclusão: se $\xi < \zeta < \lambda$, então $C_\zeta \subset C_\xi$.

Seja $C = \bigcap_{\xi<\lambda} C_\xi$. Seja $\beta_{-1} \in \omega_\alpha$ e sejam $\beta_\xi \in C_\xi$, tal que se $\xi < \zeta$, então $\beta_\xi < \beta_\zeta$. Tais elementos existem pelo fato dos conjuntos C_ξ serem ilimitados. Como ω_α é regular e $\lambda < \omega_\alpha$, temos que $\sup_{\xi<\lambda}\beta_\xi \in \omega_\alpha$. Devido à suposição de que os conjuntos C_ξ formam uma seqüência decrescente pela inclusão, para cada $\zeta < \lambda$, os elementos β_ξ, $\xi < \lambda$, pertencem ao conjunto C_ζ. Daí, $\sup_{\xi<\lambda}\beta_\xi \in C = \bigcap_{\zeta<\lambda} C_\zeta$. Isso mostra que C é ilimitado e, portanto, não vazio.

Seja $W \subset C = \bigcap_{\zeta<\lambda} C_\zeta$ não vazio e tal que $\sup W \in \omega_\alpha$. Então, devido à suposição de que os conjuntos C_ξ formam uma seqüência decrescente pela inclusão, para cada $\xi < \lambda$, $W \subset C_\xi$ e, portanto $\sup W \in C_\xi$, ou seja, $\sup W \in C$, provando que C é fechado.

Por indução, fica demonstrado este lema. $\square$

Exercício 81 *Mostre que se $S \subset \omega_\alpha$ for estacionário e $C \subset \omega_\alpha$ for fechado e ilimitado, então $C \cap S$ é estacionário.*

Exercício 82 *Mostre que todo $C \subset \omega_\alpha$ fechado e ilimitado é estacionário.*

Exercício 83 *Exiba um exemplo de conjuntos fechados e ilimitados $C_\xi \subset \omega_\alpha$, $\xi < \omega_\alpha$, tais que $\bigcap_{\xi<\omega_\alpha} C_\xi = \varnothing$.*

Sejam $C_\xi \subset \omega_\alpha$, $\xi < \omega_\alpha$ conjuntos fechados e ilimitados. Seja $C = \{\beta < \omega_\alpha$: para todo $\xi < \beta$, $\beta \in C_\xi\}$. Tal conjunto chama-se **interseção diagonal**conjunto!interseção diagonalinterseção!diagonal do conjuntos C_ξ, denotada por $C = \triangle_{\xi<\omega_\alpha} C_\xi$.$\triangle_{\xi<\omega_\alpha} C_\xi$

Exercício 84 *Sejam $C_\xi \subset \omega_\alpha$, $\xi < \omega_\alpha$ conjuntos fechados e ilimitados. Mostre que*

1. $\triangle_{\xi<\omega_\alpha} C_\xi = \triangle_{\xi<\omega_\alpha}\{\eta \in C_\xi : \eta > \xi\}$;
2. $\triangle_{\xi<\omega_\alpha} C_\xi = \bigcap_{\xi<\omega_\alpha}(C_\xi \cup \{\eta : \eta \leq \xi\})$.

Exercício 85 *Sejam $C_\xi \subset \omega_\alpha$, $\xi < \omega_\alpha$ conjuntos fechados e ilimitados. Sejam $D_\xi = \bigcap_{\zeta\leq\xi} C_\zeta$. Mostre que $\triangle_{\xi<\omega_\alpha} C_\xi = \triangle_{\xi<\omega_\alpha} D_\xi$.*

Lema 30 *Sejam $C_\xi \subset \omega_\alpha$, $\xi < \omega_\alpha$ conjuntos fechados e ilimitados. Então a interseção diagonal $C = \triangle_{\xi<\omega_\alpha} C_\xi$ também é fechado e ilimitado.*

Demonstração: Devido ao exercício acima, podemos supor que os conjuntos C_ξ formam uma seqüência decrescente pela inclusão: se $\xi < \zeta < \lambda$, então $C_\zeta \subset C_\xi$.

Seja $C = \triangle_{\xi<\omega_\alpha} C_\xi$. Observemos que $\beta \in C$ se, e somente se, $\beta \in \bigcap_{\gamma<\beta} C_\gamma$ e, portanto $C \neq \varnothing$.

Seja $W \subset C$ um conjunto não vazio e tal que $\sup W < \omega_\alpha$. Mostraremos que $\eta = \sup W \in C$, ou seja, C é fechado. Seja $\xi < \eta$ e consideremos o conjunto $X = \{\zeta \in C : \xi < \zeta < \eta\}$. Pela definição de C, temos que $X \subset C_\xi$ e, portanto, $\eta = \sup X \in C_\xi$. Isso vale para cada $\xi < \eta$, o que implica que $\eta \in C$.

Mostremos agora que C é ilimitado. Dado $\gamma < \omega_\alpha$, seja $\beta_0 \in C_0$, tal que $\beta_0 > \gamma$. Escolhemos $\beta_{n+1} \in C_{\beta_n}$, de modo que $\beta_{n+1} > \beta_n$, $n \in \omega$. Seja $\beta = \sup_{n\in\omega} \beta_n$. Como ω_α é regular e não enumerável, $\beta < \omega_\alpha$. Mostremos que $\beta \in C$. Seja $\xi < \beta$. Então existe $n \in \omega$, tal que $\xi < \beta_n$. Dada a suposição de que a seqüência C_γ é decrescente (pela inclusão), para todo $k > n$, tamos que $\beta_k \in C_{\beta_n}$ e, portanto, $\beta = \sup_{k>n} \beta_k \in C_{\beta_n}$. Daí, concluímos que $\beta \in C_\xi$, para todo $\xi < \beta$, ou seja, $\beta \in C$. $\square$

Seja S um conjunto de ordinais. Uma função $f : S \to \mathsf{Ord}$ é uma **função regressiva**função!regressivaregressiva!função se para todo $\alpha \in S$, $\alpha > 0$, $f(\alpha) < \alpha$.

Veremos mais adiante exemplos de funções regressivas. O resultado importante sobre essas funções é devido a G. Fodor [13]:

Teorema 34 ***(Fodor)*** *Sejam κ um cardinal regular, $S \subset \kappa$ um conjunto estacionário e $f : S \to \kappa$ uma função regressiva. Então existem $T \subset S$ um conjunto estacionário, e $\gamma < \kappa$, tais que $f(\alpha) = \gamma$, para todo $\alpha \in T$.*

Demonstração: Argumentando por contradição, suponhamos que para cada $\gamma < \kappa$, o conjunto $\{\alpha \in S : f(\alpha) = \gamma\}$ seja não estacionário e escolhamos um conjunto fechado e ilimitado C_γ, tal que $f(\alpha) \neq \gamma$, para todo $\alpha \in C_\gamma \cap S$. Seja $C = \triangle_{\gamma<\kappa} C_\gamma$. Então, para cada $\alpha \in S \cap C$, temos que $\alpha \in C_\gamma$, para todo $\gamma < \alpha$ (pela definição de interseção diagonal) e, portanto, $f(\alpha) \geq \alpha$ (pela definição dos C_γ). Isto quer dizer que f não é regressiva, uma contradição. $\square$

Muito mais pode ser falado sobre conjuntos estacionários. Recomendamos aos interessados o Capítulo 8 do livro de Thomas Jech, *Set theory* [14].

5.6 Cardinais Singulares

Potências de cardinais regulares naø apresentam nenhum mistério, sendo que as únicas restrições são:

[13] *Eine Bemerkung zur Theorie der regressiven Funktionen*, Acta Sci. Math. Vol. 17 (1956), 139-142.

[14] Springer Monographs in Mathematics. Springer-Verlag, Berlin, 2003. The third millennium edition, revised and expanded.

1. $2^{\aleph_\alpha} > \aleph_\alpha$;

2. se $\alpha \leq \beta$, então $\aleph_\alpha \leq \aleph_\beta$;

3. $\mathrm{cf}(\aleph_\alpha) > \aleph_\alpha$.

Os resultados de Gödel e de Easton, mencionados anteriormente, mostram que essas são as únicas restrições que podem ser impostas à exponenciação de cardinais regulares.

Com os cardinais singulares já não temos essa liberdade de escolha dos valores de suas potências. Vejamos um primeiro exemplo.

Teorema 35 *Seja $\kappa > \omega$ um cardinal singular, cuja cofinalidade seja λ, e suponhamos que κ_α, $\alpha < \lambda$, seja uma seqüência crescente de cardinais, tais que* $\sup \kappa_\alpha = \kappa$ *e que exista um cardinal μ, satisfazendo $2^{\kappa_\alpha} = \mu$, para todo ordinal $\alpha < \lambda$. Então $2^\kappa = \mu$.*

Demonstração: Observemos que o enunciado deste teorema implica que $\mu > \kappa > \lambda$.

Temos que $2^\kappa = 2^{\sum_{\alpha<\lambda}\kappa_\alpha} = \prod_{\alpha<\lambda} 2^{\kappa_\alpha} = \prod_{\alpha<\lambda} \mu = \lambda\mu = \mu$.

Isso termina a demonstração. □

5.6.1 O Teorema de Silver

Vamos demonstrar aqui um teorema, devido a Jack Silver [15],Silver, J. que diz: *se para todo ordinal $\alpha < \omega_1$ valer $2^{\aleph_\alpha} = \aleph_{\alpha+1}$, então $2^{\aleph_{\omega_1}} = \aleph_{\omega_1+1}$.*

Sua demonstração original envolve técnicas avançadas, mas apresentaremos uma demonstração elementar, devida a James Baumgartner e Karel Prikry [16], em que usaremos o Teorema de Fodor (Teorema 34, página 112).

[15] *On the singular cardinals problem.* Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Vancouer, B. C., 1974, Vol. 1. Canadï¿½, Math. Congress, Montreal, Quebec, 1975, pp. 265-268.

[16] *Singular cardinals and the generalized continuum hypothesis.* Amer. Math. Monthly 84 (1977), no. 2, 108-113.

Exercício 86 *Seja $S \subset \omega_1$ um conjunto estacionário e seja $f : S \to \mathsf{Ord}$ uma função tal que $f(\alpha) < \omega_\alpha$, para todo $\alpha \in S$. Mostre que existem $\gamma < \omega_1$ e conjunto estacionário $T \subset S$, tais que $f(\alpha) < \omega_\gamma$, para todo $\alpha \in T$. (Sugestão: seja C o conjunto dos ordinais limites, não nulos, em ω_1; se $\alpha \in C$, então $\omega_\alpha = \sup_{\beta<\alpha} \omega_\beta$; seja $g(\alpha) = \min\{\beta < \alpha : f(\alpha) < \omega_\beta\}$; mostre que g é regressiva, etc.)*

Lema 31 *Suponhamos que $\omega_1 = \bigcup_{n\in\omega} S_n$. Então existe $n \in \omega$, tal que S_n é estacionário.*

Demonstração: Suponhamos que nenhum dos S_n seja estacionário. Então, para cada $n \in \omega$, existe um conjunto fechado e ilimitado $C_n \subset \omega_1$, tal que $C_n \cap S_n = \varnothing$. O conjunto $C = \bigcap_{n\in\omega} C_n$ é fechado e ilimitado em ω_1 e $C \cap (\bigcup_{n\in\omega} S_n) = \varnothing$ e, portanto, $\bigcup_{n\in\omega} S_n \neq \omega_1$. $\square$

Teorema 36 ***(Silver)****Silver, J.!teorema Suponhamos que para todo ordinal $\alpha < \omega_1$, $2^{\aleph_\alpha} = \aleph_{\alpha+1}$. Então $2^{\aleph_{\omega_1}} = \aleph_{\omega_1+1}$.*

Demonstração: Temos que mostrar que a cardinalidade de $\mathcal{P}(\omega_{\omega_1})$ é $\aleph_{\omega_1+1}$.

Por hipótese, para cada $\alpha < \omega_1$, a cardinalidade de $\mathcal{P}(\omega_\alpha)$ é $\aleph_{\alpha+1}$ e, portanto, podemos enumerar (sem repetições) o conjunto $\mathcal{P}(\omega_\alpha)$ como A^α_ξ, $\xi < \omega_\alpha + 1$.

Para cada $A \in \mathcal{P}(\omega_{\omega_1})$, seja $f_A : \mathcal{P}(\omega_{\omega_1}) \to \omega_1$, definida por $f_A(\alpha) = \xi$ se $\mathbb{A} \cap \omega_\alpha = A^\alpha_\xi$.

Observemos que se $A, B \in \mathcal{P}(\omega_{\omega_1})$ e $A \neq B$, então, para algum $\alpha < \omega_1$, $A \cap \omega_\alpha \neq B \cap \omega_\alpha$ (pois $\omega_{\omega_1} = \bigcup_{\alpha<\omega_1} \omega_\alpha$) e, por conseguinte, para todo β, $\alpha \leq \beta < \omega_1$, $f_A(\beta) \neq f_B(\beta)$. Assim, o conjunto $\{\xi < \omega_1 : f_A(\xi) = f_B(\xi)\}$ é limitado (por aquele ordinal α).

Definimos a relação binária $R \subset \mathcal{P}(\omega_{\omega_1}) \times \mathcal{P}(\omega_{\omega_1})$ por $A\,R\,B$ se o conjunto $\{\alpha < \omega_1 : f_A(\alpha) < f_B(\alpha)\}$ for estacionário.

Dados $A, B \in \mathcal{P}(\omega_{\omega_1})$, se $A \neq B$, então ou $A\,R\,B$, ou $B\,R\,A$, pois podemos escrever

$$\omega_1 = \{\alpha : f_A(\alpha) < f_B(\alpha)\} \cup \{\alpha : f_A(\alpha) = f_B(\alpha)\} \cup \{\alpha : f_A(\alpha) > f_B(\alpha)\},$$

a o conjunto $\{\alpha : f_A(\alpha) = f_B(\alpha)\}$ é limitado e, assim, não pode ser estacionário (**exercício:** por que?).

Agora, suponhamos que $2^{\aleph_{\omega_1}} > \aleph_{\omega_1+1}$, e chegaremos a uma contradição.

Primeiramente, afirmamos que existe um conjunto $B \subset \omega_{\omega_1}$, tal que a cardinalidade do conjunto $\{A : A\,R\,B\}$ é pelo menos $\aleph_{omega_1+1}$. De fato, seja $X \subset \mathcal{P}(\omega_{\omega_1})$ um conjunto de cardinalidade $\aleph_{\omega_1+1}$. Se existir $B \in X$ com a propriedade desejada, verificamos a afirmação. Senão, para cada $B \in X$, sejam $R^{-1}(B) = \{A : A\,R\,B\}$ e $Y = \bigcup\{R^{-1}(B) : B \in X\}$. Temos que Y é a união de $\aleph_{\omega_1+1}$ conjuntos, cujas cardinalidades não superam $\aleph_{\omega_1}$, totalizando uma cardinalidade no máximo $\aleph_{\omega_1+1} \cdot \aleph_{\omega_1} = \aleph_{\omega_1+1}$. Como assumimos que $2^{\aleph_{\omega_1}} > \aleph_{\omega_1+1}$, existe $B \in \mathcal{P}(\omega_{\omega_1})$, tal que $B \notin Y$. Daí, para cada $A \in X$, não valem $B = A$ e nem $B\,R\,A$, o que implica que $A\,R\,B$, para cada $A \in X$, provando a afirmação.

Para esse conjunto B, para cada $\alpha < \omega_1$, $f_B(\alpha) < \omega_{\alpha+1}$ (pela definição de f) e, assim, o conjunto $\{\beta : \beta < f_B(\alpha)\}$ temS cardinalidade no máximo $\aleph_\alpha$. Portanto, existe uma função injetora $g_\alpha : \{\beta : \beta < f_B(\alpha)\} \to \omega_\alpha$.

Seja $A\,R\,B$ e consideremos o conjunto $\{\alpha : f_A(\alpha) < f_B(\alpha)\}$, que é estacionário, devido à definição da relação R. Aplicando o exercício acima, obtemos um conjunto estacionário $T_A \subset S_A$ e um ordinal $\gamma_A < \omega_1$, tal que, para todo $\alpha \in T_A$, $g_\alpha(f_A(\alpha)) < \omega_{\gamma_A}$. O total de tais pares (T_A, γ_A) é $2^{\aleph_1} \cdot \aleph_1 = \aleph_2$. Dado que o cardinal $\aleph_{\omega_1+1}$ é regular, para algum par (T, γ), o conjunto $\{A : A\,R\,B,\ T = T_A \text{ e } \gamma_A = \gamma\}$ deve ter cardinalidade não menos que $\aleph_{\omega_1+1}$.

Como um conjunto estacionário $T \subset \omega_1$ tem cardinalidade ω_1, a cardinalidade do conjunto de funções $h : T \to \omega_\gamma$ é

$$\aleph_\gamma^{\aleph_1} = \max\{\aleph_\gamma^{\aleph_\gamma}, \aleph_1^{\aleph_1}\} = \max\{2^{\aleph_\gamma}, 2^{\aleph_1}\} = \max\{\aleph_{\gamma+1}, \aleph_2\} < \aleph_{\omega_1}.$$

Como a cardinalidade de $\{A : A\,R\,B\}$ é $\aleph_{\omega_1+1}$, devem existir $A_1, A_2 \subset \omega_{\omega_1}$, tais que $A_1 \neq A_2$, $A_1\,R\,B$, $A_2\,R\,B$, $T_{A_1} = T_{A_2} = T$ e $\gamma_{A_1} = \gamma_{A_2} = \gamma$, e ainda, $g_\alpha(f_{A_1}(\alpha)) = g_\alpha(f_{A_2}(\alpha))$, para todo $\alpha \in T$.

Como g_α é injetora, devemos ter $f_{A_1}(\alpha) = f_{A_2}(\alpha)$, para todo $\alpha \in T$. Isto significa que o conjunto $\{\alpha < \omega_1 : f_{A_1}(\alpha) = f_{A_2}(\alpha)\}$ é ilimitado, contradizendo o fato que $A_1 \neq A_2$ (veja o início desta demonstração).

Isto prova que $2^{\aleph_{\omega_1}} = \aleph_{\omega_1+1}$. $\square$

Esse resultado pode ser generalizado, com algumas modificações em sua demonstração:

Exercício 87 *Mostre cada uma das seguintes generalizações do Teorema de Silver:*

1. *Se κ for um cardinal singular de cofinalidade $\lambda > \omega$ e se o conjunto de ordinais $\{\alpha < \lambda : 2^{\aleph_\alpha} = \aleph_{\alpha+1}\}$ for estacionário em λ, então $2^\kappa = \kappa^+$.*

2. *Seja $\beta < \omega_1$ um ordinal e suponha que o conjuntos de ordinais $\{\alpha < \omega_1 : 2^{\aleph_\alpha} \leq \aleph_{\alpha+\beta}\}$ seja estacionário em ω_1. Então $2^{\aleph_{\omega_1}} \leq \aleph_{\omega_1+\beta}$.*

Infelizmente as técnicas desse teorema não se aplicam ao caso dos cardinais de confinalidade ω e os resultados relativos a esses cardinais singulares são bem difíceis de se demonstrarem. Para esses resultados, consulte-se a obra de Saharon Shelah, *Cardinal Arithmetic*, Oxford Logic Guides, vol. 29, Oxford University Press, 1994.

5.7 Aplicações: Conjuntos Borelianos

Vejamos um resultado da Teoria da Medida mostrando que a σ-álgebra $\mathscr{M}$ dos conjuntos Lebesgue-mensuráveis de $\mathbb{R}$ é bem maior do que a dos conjuntos borelianos de $\mathbb{R}$, $\mathscr{B}$.

5.7.1 A sigma-álgebra dos borelianos

Comecemos determinando o tamanho de $\mathscr{B}$.

Teorema 37 *(ZFE) A σ-álgebra $\mathscr{B}$ dos subconjuntos borelianos de $\mathbb{R}$ tem cardinalidade $\mathfrak{c} = 2^{\aleph_0}$.*

Demonstração: Vamos demonstrar por indução em $\alpha \leq \omega_1$ que $|C_\alpha| = \mathfrak{c}$, sendo que C_0 é o conjunto dos subconjuntos abertos de $\mathbb{R}$ e se $\alpha > 0$, C_α contém os complementos de conjuntos de algum C_β, com $\beta < \alpha$ e também uniões $\bigcup_{n\in\omega} X_n$, com $X_n \in C_{\beta_n}$, para $\beta_n < \alpha$, $n \in \omega$. Observemos que para todos ordinais $\alpha < \beta \leq \omega_1$, $C_\alpha \subset C_\beta$.

Observemos primeiramente que o conjunto de intervalos abertos $I = \{]a,b[\subset \mathbb{R} : a < b\}$ tem cardinalidade $\mathfrak{c}$, pois $\mathfrak{c} = |\mathbb{R}| \leq |\{(a,b) \in \mathbb{R}^2 : a < b\}| \leq |\mathbb{R}^2| = \mathfrak{c}$. Como todo subconjunto aberto de $\mathbb{R}$ pode ser espresso como a união enumerável de tais intervalos (**exercício:** mostre isso), a cardinalidade do conjunto $\tau = \{X \subset \mathbb{R} : X \text{ é aberto}\}$ é $\mathfrak{c}^{\aleph_0} = (2^{\aleph_0})^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0} = \mathfrak{c}$.

Agora, suponhamos que $\alpha > 0$ e que para todo $\beta < \alpha$, $|C_\beta| = 2^{\aleph_0}$. Certamente temos que $2^{\aleph_0} \leq |C_\alpha|$. Por outro lado, $|C_\alpha| \leq |\bigcup_{\beta<\alpha} C_\beta| + |\{f : \omega \to \bigcup_{\beta<\alpha} C_\beta\}|$. O primeiro conjunto do lado direito da desigualdade corresponde a tomar os complementos e o segundo às uniões enumeráveis. Como $|\bigcup_{\beta<\alpha} C_\beta| \leq |\alpha| \cdot 2^{\aleph_0} \leq \aleph_1 \cdot 2^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0}$ e $|\{f : \omega \to \bigcup_{\beta<\alpha} C_\beta\}| = (2^{\aleph_0})^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0}$, concluímos que $|C_\alpha| = 2^{\aleph_0}$.

Como $\mathscr{B} = C_{\omega_1}$, a cardinalidade de $\mathscr{B}$ é $2^{\aleph_0} = \mathfrak{c}$. $\square$

Exercício 88 *(ZFE) Calcule a cardinalidade da σ-álgebra dos conjuntos borelianos de um espaço X, tal que o conjunto τ_X dos subconjuntos abertos de X tem cardinalidade $\kappa \geq \aleph_0$.*

5.7.2 Conjuntos de Medida Nula

Um subconjunto $X \subset \mathbb{R}$ tem **medida nula**conjunto!medida nula, ou em símbolos, $m(X) = 0$,$m(X) = 0$, se, para cada $\varepsilon > 0$, existe um conjunto enumerável de intervalos abertos $(I_n)_{n<\omega}$, tais que $X \subset \bigcup_{n<\omega} I_n$ e se $m(I_n)$ indicar o comprimento do intervalo I_n, então $\sum_{n<\omega} m(I_n) < \varepsilon$.

Exercício 89 *Mostre que o conjunto $\mathbb{Q}$ dos números racionais tem medida nula.*

Exercício 90 *Mostre que se $X \subset Y \subset \mathbb{R}$ e $m(Y) = 0$, então $m(X) = 0$. Mostre que se $m(X_n) = 0$, $n < \omega$, então $m(\bigcup_{n<\omega} X_n) = 0$.*

O Conjunto de Cantor

Georg Cantor introduziu em uma nota final ao trabalho *Fundamentos de uma Teoria Geral dos Conjuntos*[17] um subconjunto fechado de $\mathbb{R}$ que tem

[17] *Grundlagen einer allgemeinen Mannigfaltigkeitslehre. Ein Mathematisch-philosophischer Versuch in der Lehre des Unendlichen*, B. Teubner, Leipzig, 1883,

medida nula e de cardinalidade $\mathfrak{c}$, que ficou conhecido hoje como o **conjunto (ternário) de Cantor**.conjunto!Cantorconjunto!ternário de Cantor

Seja $I_{0,1} =]1/3, 2/3[$, $I_{1,1} =]1/9, 2/9[$, $I_{1,2} =]7/9, 8/9[$, $I_{2,1} =]1/27, 2/27[$, $I_{2,2} =]7/27, 8/27[$, $I_{2,3} =]19/27, 20/27[$, $I_{2,4} =]25/27, 26/27[$, etc. O padrão de formação dessa coleção de intervalos é: $I_{j,k}$ é o k-ésimo intervalo de comprimento $1/3^{j+1}$, centralizado no intervalo correspondente de $[0,1] \setminus \bigcup_{m<j, 1\leq k\leq 2^j} I_{m,k}$.

Observemos que para o índice $j \geq 0$ são retirados 2^j intervalos de comprimento $3^{-(j+1)}$, totalizando, a soma de comprimentos $2^j/3^{j+1}$.

Seja $K = [0,1] \setminus \bigcup_{j<\omega, 1\leq k\leq 2^j} I_{j,k}$. Este é um conjunto fechado, o chamado **conjunto de Cantor**.

Um modo nais preciso de apresentar esse conjunto é dado por:

Exercício 91 *Para cada* $n \in \omega$*, sejam* $I_0 = [0,1]$ *e se* $n > 0$*,* $I_n = \bigcup_{s\in {}^n2} [a_s, b_s]$*, sendo que* $a_s = \sum_{i=0}^{n-1} 2s(i)/3^{i+1}$ *e* $b_s = a_s + 1/3^n$*. Mostre que* $K = \bigcap_{n\in\omega} I_n$*.*

Exercício 92 *Mostre que o conjunto de Cantor* K *tem medida nula. (Sugestão: observe que* $\sum_{j=0}^{\infty} 2^j/3^{j+1} = 1$*.)*

Exercício 93 *Para cada* $x \in \mathbb{R}$*,* $x \in K$ *se, e somente se,* $x = \sum_{n=1}^{\infty} a_n/3^n$*, com cada* $a_n \in \{0,2\}$*. (Sugestão: mostre que se* $x \in I_{j,k}$ *então algum* a_n *tem que ser 1. Observe que* $1/3^n = \sum_{i=n+1}^{\infty} 2/3^i$*.)*

Exercício 94 *Mostre que a cardinalidade do conjunto de Cantor* K *é* $|K| = \mathfrak{c} = 2^{\aleph_0}$*.*

5.7.3 Conjuntos Lebesgue-mensuráveis

Seja $\mathscr{N}$ o conjunto de todos os subconjuntos de $\mathbb{R}$ de medida nula. Seja $\mathscr{M}$ a menor σ-álgebra de subconjuntos de $\mathbb{R}$, contendo $\mathscr{B} \cup \mathscr{N}$. Essa será

pp. 165-208; veja seção 10, nota 11, p. 207. Consulte-se também seu trabalho *Ueber unendlich, lineare Punktmannigfaltigkeiten*, Parte 6, Math. Annalen, 23 (1884), pp. 453-488.

chamada de σ-álgebra do conjuntos Lebesgue-mensuráveis [18].

Teorema 38 *A σ-álgebra $\mathscr{M}$ tem cardinalidade $2 = 2^{2^{\aleph_0}}$ e, portanto, $\mathscr{B} \subsetneq \mathscr{M}$.*

Demonstração: Como o conjunto de Cantor K tem medida nula, $K \in \mathscr{M}$. Cada subconjunto de K tem medida nula e, portanto $\mathcal{P}(K) \subset \mathscr{M}$. Daqui decorre que $|\mathscr{M}| \geq |\mathcal{P}(K)| = 2^{\mathfrak{c}}$. Por outro lado, $\mathscr{M} \subset \mathcal{P}(\mathbb{R})$ e, portanto $|\mathscr{M}| = 2^{\mathfrak{c}}$.

Como $|\mathscr{B}| = \mathfrak{c}$, temos que $\mathscr{B} \subsetneq \mathscr{M}$. □

5.8 Grandes Cardinais

A teoria dos chamados grandes cardinais é muito extensa e, por isso, veremos apenas algumas ideias acerca desses cardinais que possuem propriedades combinatórias muito fortes.

5.8.1 Cardinais inacessíveis

A primeira referência ao que chamamos hoje de **cardinais fracamente inacessíveis**cardinal!inacessível!fracamente encontra-se no artigo *Fundamentos de uma teoria dos conjuntos ordenados* [19] de Felix Hausdorff, que são os cardinais $\aleph_\alpha$ regulares, com α um ordinal limite. A inacessibilidade do cardinal refere-se ao seguinte resultado.

Lema 32 *(ZFE+HGC) Seja $\aleph_\alpha$ um cardinal fracamente inacessível. Para todo cardinal $\kappa < \aleph_\alpha$, $2^\kappa < \aleph_\alpha$ e se $\lambda < \omega_\alpha$ for ordinal limite e $\{\kappa_\eta : \eta < \lambda\}$ uma seqüência de cardinais menores do que $\aleph_\alpha$, então $\sup_{\eta<\lambda} \kappa_\eta < \aleph_\alpha$.*

[18] Essa não é a definição original, mas podemos demonstrar que é equivalente àquela. Consulte, por exemplo, a obra de Paul Halmos, *Measutre Theory*, Springer-Verlag, Berlim, 1974.

[19] *Grundzüge einer Theorie der georedneten Mengen*, Math. Annalen Vol. 65 (1908), pp. 435-505, especialmente na página 443.

Observemos que este enunciado diz que o cardinal $\aleph_\alpha$ não pode ser atingido a partir de cardinais e ordinais anteriores a ele, mesmo usando o axioma da substituição. Como é necessário o uso da Hipótese Generalizada do Contínuo (HGC), esse cardinal foi adjetivado com a palavra *fracamente*.

Demonstração: A Hipótese Generalizada do Contínuo (HGC) diz que $2^{\aleph_\gamma} = \aleph_{\gamma+1}$ e, como α é ordinal limite, se $\gamma < \alpha$, $2^{\aleph_\gamma} < \aleph_\alpha$.

Agora, se $\lambda < \omega_\alpha$ for ordinal limite e $\{\kappa_\eta : \eta < \lambda\}$ uma seqüência de cardinais menores do que $\aleph_\alpha$, então $\sup_{\eta<\lambda} \kappa_\eta < \aleph_\alpha$, pois $\aleph_\alpha$ é cardinal regular. $\square$

Em vista disso, chamamos κ um **cardinal fortemente inacessível**,cardinal!inacessível! ou simplesmente de **cardinal inacessível**,cardinal!inacessível se κ for cardinal regular e, para todo cardinal $\gamma < \kappa$, $2^\gamma < \kappa$.

Exercício 95 *Mostre que se $\aleph_\alpha$ for um cardinal (fracamente ou fortemente) inacessível, então $\aleph_\alpha = \alpha$.*

A inacessibilidade de um cardinal pode ser apreciada tendo-se em vista o resultado seguinte.

Teorema 39 *(ZFE) Seja λ um cardinal (fortemente) inacessível. Então todos os axiomas de ZFE são verdadeiros em V_λ.*

Na verdade, vale muito mais do que isso. É possível codificar em ZFE uma fórmula que expressa a ideia "*V_λ satisfaz todos os axiomas de ZFE*". Pode-se demonstrar que é possível também expressar com uma fórmula da linguagem de ZFE a ideia que "*ZFE é uma teoria consistente*" (não se deduz uma contradição a partir de seus axiomas). O chamado Segundo Teorema da Incompletude de Gödel diz que se ZFE for consistente, então não podemos deduzir a fórmula que diz "*ZFE é uma teoria consistente*". Assumindo isso, temos um fato curioso acerca dos cardinais inacessíveis, cuja demonstração foge ao escopo deste texto.

Teorema 40 *(ZFE) Suponhamos que λ seja um cardinal inacessível. Se pudermos demonstrar em ZFE que a fórmula* "ZFE é uma teoria consistente" *implica a fórmula* "ZFE + *existe um cardinal inacessível* é uma teoria consistente"*, então ZFE* **não é consistente**.

5.8.2 Cardinais mensuráveis

Cardinais inacessíveis também surgiram no contexto da Teoria da Medida. O matemático polonês Stanisław Ulam introduziu em 1930 [20] a noção de **cardinal mensurável**,cardinal!mensurável que é um cardinal $\kappa > \aleph_0$ tal que existe uma função (ou medida) $m : \mathcal{P}(\kappa) \to \{0, 1\}$, tal que

1. para cada ordinal $\alpha \in \kappa$, $m(\{\alpha\}) = 0$;
2. $m(\varnothing) = 0$ e $m(\kappa) = 1$;
3. para todos $X \subset Y \subset \kappa$, $m(X) \leq m(Y)$;
4. para cada $X \subset \mathcal{P}(\kappa)$ de conjuntos dois a dois disjuntos e de cardinalidade $|X| < \kappa$, $m(\bigcup X) = \sum_{A \in X} m(A)$ (o que no presente caso significa que, se $m(\bigcup X) = 1$, então existe um único $A \in X$, tal que $m(A) = 1$ e todo $B \in X$, se $B \neq A$, então $m(B) = 0$).

Comecemos com uma propriedade importante de cardinais mensuráveis.

Lema 33 *Seja κ um cardinal mensurável e $\mathcal{U} = \{X \subset \kappa : m(X) = 1\}$, sendo $m : \mathcal{P}(\kappa) \to \{0, 1\}$ como acima. Então:*

1. *$A \in \mathcal{U}$ se, e somente se $\kappa \smallsetminus A \notin \mathcal{U}$;*
2. *se $A \in \mathcal{U}$ e $A \subset B \subset \kappa$, então $B \in \mathcal{U}$;*
3. *se $\lambda < \kappa$ e $X_\alpha \in \mathcal{U}$, $\alpha < \lambda$, então $\bigcap_{\alpha<\lambda} X_\alpha \in \mathcal{U}$.*

Demonstração: Os itens 1 e 2 são imediatos a partir da definição de m e de $\mathcal{U}$.

Para 3, sejam $\lambda < \kappa$ e $X_\alpha \in \mathcal{U}$, $\alpha < \lambda$. Seja $X = \bigcap_{\alpha<\lambda}$. Então $\kappa \smallsetminus X = \bigcup_{\alpha<\lambda}(\kappa \smallsetminus X_\alpha)$, a união de menos do que κ conjuntos fora de $\mathcal{U}$, ou seja, de medida nula. Daí, essa união tem medida nula, o que implica que $X \in \mathcal{U}$. $\square$

Teorema 41 *Cardinais mensuráveis são (fortemente) inacessíveis.*

[20] No artigo *Zur Masstheorie in der algemeinen Mengenlehre*, Fund. Math., Vol. 16 (1930), 140-150.

Demonstração: Temos que mostrar que se κ for cardinal mensurável, então κ é regular e para todo cardinal $\mu < \kappa$, temos que $2^\mu < \kappa$.

Cada cardinal $\mu < \kappa$ pode ser escrito como $\mu = \bigcup_{\alpha<\mu}\{\alpha\}$. Como $m(\{\alpha\}) = 0$, temos que $m(\mu) = 0$. Se $\kappa_i < \kappa$ forem cardinais, $i < \mu$, então $m(\kappa_1) = 0$ e $m(\bigcup_{i<\mu}\kappa_i) \leq \sum_{i<\mu} m(\kappa_i) = 0$. Como $\mathrm{cf}(\kappa) = \kappa$, ou seja, κ é regular.

Para mostrar que para todo cardinal $\mu < \kappa$, temos que $2^\mu < \kappa$, suporemos que exista um cardinal $\lambda < \kappa$, tal que $2^\lambda \geq \kappa$ e chegaremos a uma contradição.

Seja $X \subset {}^\lambda 2$, tal que $|X| = \kappa$ e enumeremos $X + \{f_\alpha : \alpha < \kappa\}$. Para cada $\alpha < \lambda$, sejam $X^i_\alpha = \{\beta < \kappa : f_\beta(\alpha) = i\}$, $i = 0, 1$. Como $X^0_\alpha \cup X^1_\alpha = \kappa$, ou $X^0_\alpha \in \mathcal{U}$, ou $X^1_\alpha \in \mathcal{U}$. Denotemos $\epsilon_\alpha \in \{0, 1\}$ o índice, tal que $X_\alpha^{\epsilon_{alpha}} \in \mathcal{U}$, para cada $\alpha < \lambda$. Como $\lambda < \kappa$, $\bigcap_{\alpha<\lambda} X^{\epsilon_\alpha}_\alpha \in \mathcal{U}$. Mas se existir f nessa interseção, ela deve satisfazer $f(\alpha) = \epsilon_\alpha$, para cada $\alpha < \lambda$. Mas isso contradiz a hipótese de que κ é mensurável. $\square$

Dizemos que a medida $m : \mathcal{P}(\kappa) \to \{0, 1\}$ sobre o cardinal mensurável κ é dita uma **medida normal**medida!normal se for uma medida que satisfaz também:

- para toda família $(X_\alpha)_{\alpha<\kappa}$ de subconjuntos de κ, tais que para todo $\alpha < \kappa$, $m(X_\alpha) = 1$, temos que $m(\triangle_{\alpha<\kappa} X_\alpha) = 1$.

Uma primeira aplicação da noção de cardinais mensuráveis, vamos apresentar uma construção de uma boa ordem a partir do conjunto das funções $f : \kappa \to \kappa$, que servirá de ferramenta para demonstrar resultados mais adiante.

Teorema 42 *Seja κ um cardinal mensurável e suponhamos que a medida m sobre κ seja normal. Então:*

1. *se $C \subset \kappa$ for um conjunto fechado e ilimitado, então $m(C) = 1$;*
2. *se $X \subset \kappa$ e $m(X) = 1$, então X é conjunto estacionário.*

Demonstração: 1) Temos que $m(X_\alpha) = 1$, sendo $X_\alpha = \{\eta < \kappa : \alpha + 1 < \eta\}$. Seja $C_0 = \triangle_{\alpha<\kappa} X_\alpha$. Então $m(C_0) = 1$, pois m é normal. O conjunto

$C_0 = \{\gamma < \kappa : \gamma$ é ordinal limite$\}$, pois se γ for ordinal limite, então $\gamma \in X_\alpha$, para todo $\alpha < \gamma$ e, portanto, $\gamma \in C_0$. Como $\alpha + 1 \notin X_\alpha$, $\alpha + 1 \notin C_0$. Seja agora C um subconjunto fechado e ilimitado de κ, enumerado em ordem crescente como $C = \{c_\alpha : \alpha < \kappa\}$. Seja $D = \triangle_{\alpha<\kappa} X_{c_\alpha}$. Então $m(D) = 1$ e $C \cap C_0 = D$. Disso obtemos que $1 = m(D) \leq m(C)$, ou seja, $m(C) = 1$.

2) Imediato de 1 e da definição de conjunto estacionário. □

Lema 34 *Seja κ um cardinal mensurável. Seja $F = {}^\kappa\kappa$ o conjunto de todas as funções $f : \kappa \to \kappa$. Seja $\sim$ a relação biária em F definida por $f \sim g$ se $\{\alpha < \kappa : f(\alpha) = g(\alpha)\} \in \mathcal{U}$, isto é, duas funções de F estão relacionadas se o conjunto dos elementos de κ em que elas são iguais tiver medida 1. Então:*

1. *$\sim$ é relação de equivalência;*
2. *se $f_1 \sim f_2$ e $g_1 \sim g_2$, então $\{\alpha < \kappa : f_1(\alpha) < g_1(\alpha)\} \in \mathcal{U}$ se, e somente se, $\{\alpha < \kappa : f_2(\alpha) < g_2(\alpha)\} \in \mathcal{U}$;*
3. *seja G o conjunto das classes de equivalência $[f]$, $f \in F$; definimos em G a relação $\prec$ por $[f] \prec [g]$ se $\{\alpha < \kappa : f(\alpha) < g(\alpha)\} \in \mathcal{U}$; então $\prec$ define boa ordem em G;*
4. *o ordinal correspondente a essa boa ordem é maior do que κ.*

Demonstração: Os itens 1 e 2 decorrem das definições e do lema anterior e são deixados como exercício.

3) Mostremos que $(G, \prec)$ é um conjunto bem ordenado.

Suponhamos que $\{\alpha < \kappa : f(\alpha) < g(\alpha)\} \in \mathcal{U}$ e $\{\alpha < \kappa : g(\alpha) < h(\alpha)\} \in \mathcal{U}$. Então $\{\alpha < \kappa : f(\alpha) < g(\alpha)\} \cap \{\alpha < \kappa : g(\alpha) < h(\alpha)\} \subset \{\alpha < \kappa : f(\alpha) < h(\alpha)\}$ e, portanto $\{\alpha < \kappa : f(\alpha) < h(\alpha)\} \in \mathcal{U}$, ou seja, a relação $\prec$ é transitiva.

Se $\{\alpha < \kappa : f(\alpha) < g(\alpha)\} \in \mathcal{U}$, então $\{\alpha < \kappa : g(\alpha) < f(\alpha)\} \subset \{\alpha < \kappa : g(\alpha) \leq f(\alpha)\} \notin \mathcal{U}$, isto é, a relação $\prec$ não é simétrica.

É claro que uma e apenas uma das situações pode ocorrer: ou $\{\alpha < \kappa : f(\alpha) < g(\alpha)\} \in \mathcal{U}$, ou $\{\alpha < \kappa : f(\alpha) = g(\alpha)\} \in \mathcal{U}$, ou $\{\alpha < \kappa : f(\alpha) > g(\alpha)\} \in \mathcal{U}$. Isto significa que a relação $\prec$ define uma ordem linear em G.

Para mostrar que $\prec$ é boa ordem, suponhamos que exista uma seqüência $f_n \in F$, $n \in \omega$, tal que para todo $n \in \omega$, $[f_{n+1}] \prec [f_n]$, e chegaremos a uma contradição. Como $\kappa > \omega$ é mensurável, o conjunto $\{\alpha < \kappa : \forall n \in \omega\,(f_{n+1}(\alpha) < f_n(\alpha))\} \in \mathcal{U}$. Em particular, esse conjunto é não vazio e, portanto, existe $\alpha < \kappa$ em tal conjunto, o que significa que para todo $n \in \omega$, $f_{n+1}(\alpha) < f_n(\alpha)$, uma seqüência infinita e decrescente de ordinais, o que é absurdo. Portanto $\prec$ é boa ordem.

4) O ordinal γ que corresponde a essa ordem é maior que κ, pois as funções constantes $f(\alpha) = \mu$ determinam a imagem da inclusão de κ em G, como segmento inicial dessa ordem. Agora, a função identidade $f(\alpha) = \alpha$ determina um elemento de G, tal que $\{\mu < \kappa : f(\alpha) > \mu\} = \{\mu < \kappa : \alpha > \mu\} \in \mathcal{U}$, ou seja, é maior do que as classes das funcoes constantes. $\square$

Exercício 96 *Seja κ um cardinal mensurável, munido de uma medida normal m, com $\mathcal{U} = \{X \subset \kappa : m(X) = 1\}$. Seja G o conjunto bem ordenado do lema anterior. Mostre que a classe da função identidade é o menor elemento que não está na imagem de κ pela sua inclusão como segmento inicial de G. (Sugestão: suponha que $g : \kappa \to \kappa$ é tal que $m(\{\eta : g(\eta) < \eta\}) = 1$ e use o Teorema de Fodor.)*

Vamos mostrar que todo cardinal mensurável admite uma medida normal. Como resultado preliminar, vamos caracterizar medidas normais.

Lema 35 *Seja κ um cardinal mensurável. Então são equivalentes:*

1. *a medida $m : \mathcal{P}(\kappa\} \to \{0, 1\}$ com $\mathcal{U} = \{X \subset \kappa : m(X) = 1\}$) é normal;*

2. *para toda função $g : \kappa \to \kappa$, tal que $\{\eta : g(\eta) < \eta\} \in \mathcal{U}$, então existe $\gamma < \kappa$, tal que $\{\alpha < \kappa : g(\alpha) = \gamma\} \in \mathcal{U}$.*

Demonstração:

$1 \Rightarrow 2$: A afirmação 2 é um pouco mais forte do que o Teorema de Fodor, pois o conjunto estacionário em que a função g for constante deve ter medida 1.

Seja $g : \kappa \to \kappa$, tal que $\{\eta : g(\eta) < \eta\} \in \mathcal{U}$. Pelo exercício anterior, $[g] \prec [id]$ e, portanto, existe $\gamma < \kappa$, tal que, se $f_\gamma(\alpha) = \gamma$, então $[g] = [f_\gamma]$. Isso quer dizer que $\{\eta < \kappa : g(\eta) = \gamma\} \in \mathcal{U}$.

$2 \Rightarrow 1$: Sejam $X_\alpha \subset \kappa$, $\alpha < \kappa$, tais que $m(X_\alpha) = 1$. Precisamos mostrar que $m(\triangle_{\alpha<\kappa} X_\alpha) = 1$. Suponhamos que $m(\triangle_{\alpha<\kappa} X_\alpha) = 0$ e chegaremos a uma contradição. Seja $S = \kappa \setminus \triangle_{\alpha<\kappa} X_\alpha$. Então $m(S_0) = 1$. Seja $g : \kappa \to \kappa$ uma função tal que para cada $\alpha \in S_0$, $g(\alpha) = \gamma$, escolhido de tal forma que $\gamma < \alpha$ e $\alpha \notin X_\gamma$. Pelo item 2, existe $S \subset S_0$, tal que $m(S) = 1$, e existe $\gamma < \kappa$, tal que $g(\alpha) = \gamma$, para todo $\alpha \in S$, ou seja, $\alpha \notin X_\gamma$, para todo $\alpha \in S$. Isso implica que $X_\gamma \cap S = \varnothing$, contradizendo que $m(X_\gamma \cap S)$ deveria ser 1. □

Teorema 43 *Para todo cardinal mensurável κ, existe uma medida normal sobre κ.*

Demonstração: Seja m uma medida sobre κ com as propriedades que fazem m testemunhar a hipótese de que κ é mensurável, e seja $\mathcal{U} = \{X \subset \kappa : m(X) = 1\}$. Vamos obter uma medida normal
tildem a partir de m.

Para isso, usaremos aquela construção auxiliar do conjunto bem ordenado G construído a partir de classes de equivalência de funções $f : \kappa \to \kappa$. Vimos que o ordinal γ que corresponde a essa ordem é maior que κ. Seja $\tilde{f} \in F$ uma função tal que sua classe $[\tilde{f}] \in G$ seja o menor elemento maior que as classes das funções constantes.

Seja $\tilde{\mathcal{U}} = \{X \subset \kappa : \tilde{f}(X) \in \mathcal{U}\}$. Com isto definimos $\tilde{m}(X) = 1$ se $X \in \tilde{\mathcal{U}}$ e $\tilde{m}(X) = 0$, caso contrário. É fácil ver que $\tilde{m}(\{\alpha\}) = 0$ e que $\tilde{m}(\bigcup_{\alpha<\lambda} X_\alpha) = \sum_{\alpha<\lambda} \tilde{m}(X_\alpha)$, se $\lambda < \kappa$ e os conjuntos X_α forem dois a dois disjuntos. Para mostrarmos que $\tilde{m}$ é normal, seja $h : \kappa \to \kappa$, tal que $\tilde{m}(\{\eta < \kappa : h(\eta) < \eta\}) = 1$. Considere a função $g(\eta) = h(f(\eta))$. Temos que $\tilde{m}(\{\eta < \kappa : g(\eta) < f(\eta)\}) = 1$, o que, devido à minimalidade da função f, implica que existe $\gamma < \kappa$, e conjunto $S \in \tilde{\mathcal{U}}$, tal que $g(\eta) = \gamma$, ou seja, $\tilde{m}$ é uma medida normal sobre κ. □

Exercício 97 *Mostre que a medida m sobre o cardinal mensurável κ é uma medida normal se, e somente se, a classe da função identidade $[id] \in G = {}^\kappa\kappa/\sim$ é o menor elemento maior que as classes das funcões constantes (isto é, representa o κ-ésimo elemento da boa ordem G).*

Exercício 98 *Seja κ um cardinal que possui uma medida $m : \mathcal{P}(\kappa) \to [0,1] \subset \mathbb{R}$ σ-aditiva (isto é, se $X_n \subset \kappa$, $n < \omega$, são conjuntos dois a dois disjuntos, então $m(\bigcup_{n<\omega} X_n) = \sum_{n<\omega} m(X_n)$, além, é claro, das propriedades:*

$m(\{\alpha\}) = 0$, se $A \subset B \subset \kappa$, então $m(A) \leq m(B)$). Então ou $\kappa \leq 2^{aleph_0}$, ou existe medida $\tilde{m} : \mathcal{P}(\kappa) \to \{0, 1\}$. (Sugestão: assuma que não exista tam medida $\tilde{m}$; particione κ em conjuntos disjuntos y_0 e y_1, tais que $m(y_0) > 0$ e $m(y_1) > 0$; depois particiona cada um dos y_i, etc.)

Exercício 99 *Mostre que se existir uma medida $m : \mathcal{P}(\mathbb{R}) \to [0, 1]$ como acima, então $2^{\aleph_0}$ é fracamente inacessível (cardinal limite e regular).*