Capítulo 6

O Axioma da Escolha

Desde seu surgimento nos trabalhos de Ernst ZermelloZermello, E. em 1904 e 1908, o Axioma da Escolha tem sido objeto de debates e controvérsias, devido ao fato de postular a existência de conjuntos altamente *não construtíveis*. Diversas conseqüências desse axioma são, na verdade, enunciados equivalentes a ele, assumindo-se apenas os axiomas de ZF.

Neste capítulo veremos algumas dessas equivalências. Para quem quiser se aprofundar nesse assunto, recomendamos as obras

1. Thomas Jech,Jech, T. *The axiom of choice*, Studies in Logic and the Foundations of Mathematics, Vol. 75, North Holland Publishing Company, Amsterdã, 1973. Essa obra pressupõe o conhecimento da Teoria dos Conjuntos básica, mas dá uma boa introdução ao assunto, discutindo problemas de fundamentos e também algumas das aplicações do axioma da escolha.

2. H. RubinRubin, H. e J. Rubin,Rubin, J. *Equivalentsof the Axioma of Choice*, North Holland, Amsterdã, 1963. Essa obra compila diversos enunciados que são equivalentes ao axioma da escolha.

6.1 O axioma e funções de escolha

Vejamos o enunciado do Axioma da Escolha, já apresentado no Capítulo 3.

O Axioma da Escolha:axioma!escolha $\forall u[[\forall x\,(x \in u \to \exists y(y \in x)) \wedge \forall y, y \in u\,(x = y \vee x \cap y = \varnothing)] \to \exists v \forall x \in u\,\exists! y(y \in x \wedge y \in v)]$. Ou seja, se u é uma família de conjuntos não vazios e dois a dois disjuntos, então existe um conjunto v contendo exatamente um elemento de cada $x \in u$.

Naquele capítulo deixamos como exercício a demonstração de que o axioma da escolha implica que, dado um conjunto u, cujos elementos sejam não vazios, então exists uma **função de escolha**função!escolha $\phi : u \to \bigcup u$, tal que $\phi(x) \in x$, para cada $x \in u$.

Na verdade, temos que:

Teorema 44 *(ZF) Assumindo apenas ZF, são equivalentes os enunciados:*

1. *o Axioma da Escolha;*
2. *dado um conjunto u, cujos elementos sejam não vazios, então existe uma* ***função de escolha*** *$\phi : u \to \bigcup u$, tal que $\phi(x) \in x$, para cada $x \in u$.*

Demonstração: A implicação $1 \Rightarrow 2$ continua sendo um exercício.

$2 \Rightarrow 1$: seja u uma família (conjunto) de conjuntos não vazios e dois a dois disjuntos, e $\phi : u \to \bigcup u$ uma função de escolha. Seja v a imagem dessa função. Então v contém exatamente um elemento de cada $x \in u$. $\square$

Exercício 100 *Observe que não incluímos a hipótese de que o conjunto u seja não vazio. Os enunciados 1 e 2 do teorema acima ficam comprometidos no caso em que $u = \varnothing$?*

6.2 Conjuntos Finitos

Costumamos usar a definição de que o conjunto X é finito se existirem $n \in \omega$ e função bijetora $f : n \in X$. Aparentemente essa definição poderia ser problemática, pois usa elementos estranhos ao conjunto X (o elemento $n \in \omega$ e a função f). Vamos apresentar uma definição mais intrínseca (só depende de X) e mostraremos sua equivalência com aquela definição. Esta seção está baseada no artigo de A. Tarski, *Sur les Ensembles Finis*, Fund. Math. Vol. 6 (1924), 45-95.

Diremos que X é finito se para todo subcponjunto não vazio $W \subset \mathcal{P}(X)$, existe um elemento $Y \in W$, $\subset$-minimal, ou seja, para todo $Z \in W$, se $Z \subset Y$, então $Z = Y$.

Exploremos tal definição. O seguinte exercício é fácil.

Exercício 101 *(ZF) O conjunto vazio é finito nesse sentido. Também, se A for um conjunto finito, então cada $B \subset A$ também será finito. Se A for finito, então, para todo conjunto B, $A \cap B$ também será finito. Para todo conjunto X, o conjunto unitário $\{X\}$ é finito.*

A união de conjuntos finitos requer um pouco mais de argumentação:

Teorema 45 *(ZF) Para todos conjuntos finitos A e B, o conjunto $A \cup B$ é finito.*

Demonstração: Se $A = \varnothing$ então $A \cup B = B$ é finito; se $B = \varnothing$, então $A \cup B = A$ é finito.

Tratemos agora do caso em que $A \neq \varnothing$ e $B \neq \varnothing$. Seja $W \subset \mathcal{P}(A \cup B)$ um conjunto não vazio. Seja $K = \{C : C \in \mathcal{P}(A) \wedge \exists D \subset B\,(C \cup D \in W)\}$. Como $W \neq \varnothing$, existe $X \in W$, e $C = X \cap A \subset A$, $D = X \cap B \subset B$ e $X = C \cup D$, o que implica que $K \neq \varnothing$. Dado que A é finito, existe $C^* \in K$, $\subset$-minimal. Como $C^* \in K$, de sua definição decorre que existe $D \subset B$, tal que $C^* \cup D \in W$ e, assim, o conjunto $L = \{D : D \subset B \wedge C^* \cup D \in W\}$ não é vazio. Como B é finito, existe $D^* \in L$, $\subset$-minimal.

Seja $X^* = C^* \cup D^* \in W$. Tomemos um conjunto $Y \in W$, tal que $Y \subset X^*$. Então $Y \cap C^* \subset A$ e $Y \cap D^* \subset B$ e $Y = (Y \cap C^*) \cup (Y \cap D^*)$, donde segue que $Y \cap C^* \in K$ e, portanto, $Y \cap C^* = C^*$, dada a $\subset$-minimalidade de C^*; consequentemente, $Y \cap D^* \in L$ e, assim, $Y \cap D^* = D^*$. Por conseguinte, $Y = X^*$.

Traduzindo, $A \cup B$ é finito. $\square$

Exercício 102 *(ZF) Dados os conjuntos A e X, se A for finito, então $A \cup \{X\}$ será finito.*

Exercício 103 *(ZF) Mostre que o conjunto A será finito se, e somente se, para todo $W \subset \mathcal{P}$ não vazio, existir $Y \in W$ que seja $\subset$-maximal, ou seja, para todo $Z \in W$, se $Y \subset Z$, então $Y = Z$.*

Exercício 104 *(ZF) Mostre, por indução em $n \in \omega$, que n é um conjunto finito.*

Para os conjuntos finitos, existe um Princípio de Indução Finita:princípio!indução!conjun finitos

Teorema 46 *(ZF) Seja A um conjunto finito e $\varphi(X)$ uma fórmula, tal que valham*

1. $\varphi(\varnothing)$;
2. $\forall x \forall B \, [(x \in A \wedge B \subset A \wedge \varphi(B)) \rightarrow \varphi(B \cup \{x\})]$.

Então também vale $\varphi(A)$.

Demonstração: Suponhamos que A seja finito e que não valha $\varphi(A)$. Se também não valer $\varphi(\varnothing)$, estamos feitos, pois a implicação (do teorema) será válida.

Vamos assumir que valha $\varphi(\varnothing)$. Seja $W = \{B : B \subset A \wedge \varphi(B)\} \subset \mathcal{P}(A)$. Como $\varnothing \in W$, $W \neq \varnothing$ e, portanto, admite um elemento $B \in W$, $\subset$-maximal. Como $A \notin W$, $B \neq A$. Mas se $x \in A \smallsetminus B$, então $B \cup \{x\} \notin W$, ou seja, não vale que $\forall x \forall B \, [(x \in A \wedge B \subset A \wedge \varphi(B)) \rightarrow \varphi(B \cup \{x\})]$.

Novamente, a implicação do teorema é válida, finalizando-se, assim, esta demonstração. $\square$

Teorema 47 *(ZF) Para todo conjunto A, são equivalentes as seguintes asserções:*

1. *A é um conjunto finito;*
2. *para todo conjunto K, se $\varnothing \in K \wedge \forall B \forall x \, [(B \subset A \wedge x \in A \wedge B \in K) \rightarrow B \cup \{x\} \in K]$, então $A \in K$;*
3. *para todo conjunto K, se $K \subset \mathcal{P}(A) \varnothing \in K \wedge \forall x \in A \, (\{x\} \in K) \wedge \forall B, C \in K \, (B \cup C \in K)$, então $A \in K$.*

Demonstração: Comecemos com a implicação $1 \Rightarrow 2$, que é imediata a partir da indução finita, com a fórmula $X \in K$.

Façamos agora $2 \Rightarrow 3$. Seja $K \subset \mathcal{P}(A)$, tal que $\varnothing \in K$, $\forall x \in A\,(\{x\} \in K)$ e, para todo $C, D \in K\,(C \cup D \in K)$. Em particular, destas duas últimas, obtemos que $\forall x \in A \forall B \in K\,(B \cup \{x\} \in K)$. Pela asserção 2 do enunciado, concluímos que $A \in K$.

Finalmente, $3 \Rightarrow 1$. Se $A = \varnothing$, então A é finito. Se $A \neq \varnothing$, seja $K = \{B : B \subset A \wedge B \text{ finito}\}$. Então $\varnothing \in K$, para cada $x \in A$, $\{x\} \in K$ e, para cada $B, C \in K$, $B \cup C \in K$. Pela asserção 3 do enunciado, concluímos que $A \in K$, ou seja, A é finito. □

Vamos usar essas equivalências para demonstrar mais algumas propriedades de conjuntos finitos.

Teorema 48 *(ZF) Seja A um conjunto finito e seja $f : A \to B$ uma função sobrejetora. Então o conjunto B é finito.*

Demonstração: Seja $K = \{C : C \subset A \wedge f(C) \text{ finito}\}$. Daí, $\varnothing \in K$ e, como $f\{x\})$ é conjunto unitário, é também finito, para todo $x \in A$; além disso, como $f(C \cup \{x\}) = f(C) \cup \{f(x)\}$, se $C \in K$ e $x \in A$, então $C \cup \{x\} \in K$. Portanto, pela asserção 2 do teorema acima, como A é finito, $A \in K$. Isto traduz-se na afirmação de que B é finito. □

Uma propriedade importante dos conjuntos finitos é que vale o axioma da escolha para eles:

Teorema 49 *(ZF) Se $A \neq \varnothing$ for um conjunto finito, então existe uma função de escolha $f : \mathcal{P}(A) \smallsetminus \{\varnothing\} \to A$, $f(C) \in C$, para todo $C \subset A$, $C \neq \varnothing$.*

Demonstração: Seja $K = \{C : C \subset A \wedge C \neq \varnothing \to \exists f : \mathcal{P}(C) \smallsetminus \{\varnothing\} \to C \text{ função de escolha}\}$.

Temos que $\varnothing \in K$, pois $\varnothing \subset A$ e a implicação "$C \neq \varnothing \to \exists f : \mathcal{P}(C) \smallsetminus \{\varnothing\} \to C$ função de escolha" é válida para $C = \varnothing$.

Agora suponhamos que $C \in K$ e $x \in A$. Se $x \in C$, então $C \cup \{x\} = C \in K$. Se $x \notin C$, seja $f : \mathcal{P}(C) \to C$ uma função de escolha. Como $\mathcal{P}(C \cup \{x\}) = \mathcal{P}(C) \cup \{D \cup \{x\} : D \subset C\}$, podemos definir (em ZF) $g : \mathcal{P}(C \cup \{x\}) \setminus \{\varnothing\} \to C \cup \{x\}$, $g = f \cup \{(D \cup \{x\}, x) : D \subset C\}$, que é uma função de escolha. Assim, $C \cup \{x\} \in K$. Como A é finito, $A \in K$, pelo teorema acima. $\square$

Uma conseqüência importante disso é:

Exercício 105 *(ZF) Mostre que o conjunto A é finito se, e somente se, existem $n \in \omega$ e $f : n \to A$ bijetora. [Sugestão: se A tem função de escolha, ele pode ser bem ordenado. lembre-se que acima foi pedido que se demonstrasse que cada $n \in \omega$ é finito.]*

A definição de finitude devida a Dedekind diz que A é D-finito se, para todo $B \subset A$, se $B \neq A$, então $B \not\sim A$, ou seja, não existe bijeção de A com um subconjunto próprio de A.

Teorema 50 *(ZF) Se A for um conjunto finito, então A será D-finito.*

Demonstração: Suponhamos que A não seja D-finito. Assim, existe $B \subsetneq A$ e função bijetora $f : A \to B$. Considere o conjunto $W = \{B_n : n \in \omega\}$, obtido (em ZF) por recursão em ω, com $B_0 = A$ e $B_{n+1} = f(B_n)$. Temos que $B_{n+1} \subsetneq B_n$, dado que f é bijetora. O conjunto W não é vazio, mas não tem nenhum elemento $\subset$-minimal. Ou seja, A não é finito. $\square$

É sabido que em ZF não se pode demonstrar que se A for D-finito, então A é finito. Mas:

Teorema 51 *(ZFE) Se A for D-finito, então A será finito.*

Demonstração: Suponhamos que A não seja finito. Isto quer dizer que existe um conjunto não vazio $W \subset \mathcal{P}(A)$, sem elemento minimal. Seja $B_0 \in W$. Como ele não é minimal, existe $B_1 \in W$, $B_1 \subsetneq B_0$. Por recursão, obtemos uma seqüência $B_n \in W$, $n \in \omega$, tal que $B_{n+1} \subsetneq B_n$. Pelo Axioma da Escolha, podemos escolher elementos $x_n \in B_n \setminus B_{n+1}$. Sejam $C = \{x_n : n \in \omega\}$ e $D = \{x_n : n \in \omega,\ n > 0\}$. Então $f : A \to A \setminus \{x_0\}$, dada por $f(x) = x$, $x \in A \setminus C$ e $f(x) = x_{n+1}$, se $x = x_n \in C$ é bijeção.

Assim, concluímos que A não é D-finito. $\square$

6.3 Conjuntos bem ordenados

O Teorema de Zermello, Teorema 11, página 71, estabelece que todo conjunto pode ser bem ordenado. Este é outro enunciado equivalente ao axioma da escolha:

Teorema 52 *(ZF) Assuminos apenas ZF, são equivalentes:*

1. *o Axioma da Escolha;*
2. *o Teorema de Zermello.*

Demonstração: O Teorema de Zermello é a implicação $1 \Rightarrow 2$.

$2 \Rightarrow 1$: assumindo que todo conjunto possa ser bem ordenado, fica fácil definir uma função de escolha. Se u for um conjunto cujos elementos sejam conjuntos não vazios, para cada um dos elementos $x \in u$, existe uma boa ordem $<_x$ em x. Seja $\phi : u \to \bigcup u$, $\phi(x) = \min x$. Como a existência de uma função de escolha no caso é equivalente ao axioma da escolha, demonstramos que o Teorema de Zermello é equivalente a ele, assumindo apenas ZF. □

Na verdade, podemos demonstrar algo mais forte.

Teorema 53 *(ZF) Assumindo apenas ZF, são equivalentes:*

1. *o axioma da escolha;*
2. *para todo conjunto bem ordenado x existe uma boa ordem em $\mathcal{P}(x)$.*

Demonstração: A implicação $1 \Rightarrow 2$ é um caso particular do Teorema de Zermello.

$2 \Rightarrow 1$: lembramos que em ZF demonstramos que $\forall x \, \exists \alpha \, (x \in V_\alpha)$, sendo que $V_0 = \varnothing$, $V_{\alpha+1} = \mathcal{P}(V_\alpha)$ e se λ for ordinal limite, $V_\lambda = \bigcup_{\alpha<\lambda} V_\alpha$. Como cada V_α é um conjunto transitivo, se demonstrarmos que esse conjunto pode ser bem ordenado, então cada $x \subset V_\alpha$ herdará essa boa ordem, ou seja, valerá o Teorema de Zermello. Executaremos tal empreitada por indução em α.

O caso inicial é $V_0 = \varnothing$, que é bem ordenado pela relação $\varnothing$. No caso de ordinais sucessores, como $V_{\alpha+1} = \mathcal{P}(V_\alpha)$, se o conjunto V_α puder ser bem ordenado, então a asserção 2 implica que $V_{\alpha+1}$ também podeá ser bem ordenado.

Sobra apenas o caso de ordinais limite λ. Seja κ o menor ordinal tal que não exista uma função injetora $f : \kappa \to V_\lambda$. A asserção 2 implica que existe uma boa ordem W em $\mathcal{P}(\kappa)$. Vamos definir por recursão em $\gamma < \lambda$ uma seqüência crescente (pela inclusão) de boas ordens W_γ em V_γ, começando com $W_0 = \varnothing$; nos casos de ordinais limite $\gamma < \lambda$, $W_\gamma = \bigcup_{\beta<\gamma} W_\beta$. Para o caso de ordinais sucessores, suponhamos que já tenhamos W_γ, uma boa ordem sobre V_γ. Então existe um único ordinal $\xi < \kappa$ e função crescente e bijetora $f : \xi \to V_\gamma$, a qual nos permite definir uma bijeção $F : \mathcal{P}(\xi) \to \mathcal{P}(V_\gamma) = V_{\gamma+1}$. Usando essa bijeção, podemos definir uma boa ordem $R_{\gamma+1}$ em $V_{\gamma+1}$, copiando a boa ordem que $\mathcal{P}(\kappa)$ induz sobre $\mathcal{P}(\xi) \subset \mathcal{P}(\kappa)$. Para definirmos uma boa ordem $W_{\gamma+1}$ que estenda W_γ, usamos a relação W_γ em V_γ e a relação R restrita a $A = V_{\gamma+1} \setminus V_\gamma$, $R \restriction_A$, definindo $W_{\gamma+1} = W_\gamma \oplus R \restriction_A$ (colocando o conjunto A *na frente* do conjunto V_γ).

Assim, definimos uma boa ordem em V_λ, terminando esta demonstração. $\square$

Exercício 106 *(ZFE) Mostre que se κ for o menor ordinal, tal que não exista uma função injetora $f : \kappa \to V_\alpha$, então κ é um cardinal.*

Exercício 107 *(ZF) Mostre que se $A \neq \varnothing$ for tal que existe função de escolha $f : \mathcal{P}(A) \smallsetminus \{\varnothing\}$, $f(C) \in C$, então A pode ser bem ordenado.*

6.4 Princípios de maximalidade

Em Matemática é muito usado um princípio de maximalidade, o Lema de Zorn. Na verdade, ele é equivalente ao axioma da escolha.

Teorema 54 *(ZF) São equivalentes:*

1. *o Axioma da Escolha;*
2. *o Lema de Zorn: para todo conjunto parcialmente ordenado $(P, \leq)$, tal que $P \neq \varnothing$ e tal que todo $C \subset P$ linearmente ordenado pela ordem induzida de P, existe limitante superior $x \in P$ (ou seja, para todo $y \in P$, $y \leq x$), existe elemento maximal $m \in P$ (tal elemento satisfaz $\forall z \in P\, (m \leq z \to m = z)$).*

Demonstração: Façamos 1 $\Rightarrow$ 2: pelo axioma da escolha, podemos obter uma boa ordem em P e, portanto, podemos enumerar $P = \{x_\alpha : \alpha < \gamma\}$, para algum ordinal γ. Se $y_0 = x_0$ for elemento maximal, o resultado está provado. Senão, seja $\alpha_1 = \min\{\alpha < \gamma : x_0 < x_{\alpha_1}\}$. Suponhamos escolhidos y_α, $\alpha \leq \beta$ estritamente crescente. Se y_β for maximal, terminamos a demonstração aqui. Senão, seja $\alpha_{\beta+1} = \min\{\alpha < \gamma : x_\beta < x_\alpha\}$ e $y_{\beta+1} = x_{\alpha_\beta}$. Suponhamos que λ seja um ordinal limite e que tebhamos obtido uma seqüência estritamente crescente y_α, $\alpha < \lambda$. Pela hipótese sobre P, existe elemento $z \in P$ que é limitante superior de $C = \{y_\alpha : \alpha < \lambda\}$. Seja $\alpha_\lambda = \min\{\alpha < \gamma : x_\alpha$ é limitante superior de $C\}$ e façamos $y_\lambda = x_{\alpha_\lambda}$. Como P é um conjunto, existe α, tal que y_α é maximal.

Para a implicação $2 \Rightarrow 1$, seja A um conjunto qualquer e $P = \{(C, \prec_C) : C \in \mathcal{P}(A)$ e $(C, \prec_C)$ é boa ordem$\}$. Seja $\leq$ a relação $(C, \prec_C) \leq (D, \prec_D)$, se $C \subset D$ e $\prec_C \subset \prec_D$ com C sendo segmento inicial da ordem $\prec_D$ (ou seja, ou $C = D$, ou $C \subsetneq D$ e se $x \in C$ e $y \in D \smallsetminus C$, então $x \prec_D y$).

Observemos que $P \neq \varnothing$, pois $\varnothing \in P$. Seja $W \subset P$ um conjunto linearmente ordenado. Então seja $C = \bigcup\{D : (D, \prec_D) \in W$ e $\prec_C = \bigcup\{\prec_D : (D, \prec_D) \in W\}$. Então $\prec_C$ é boa ordem em C, pois $\prec_C$ é ordem linear (se $x, y \in C$, existe $(D \prec_D) \in W$, tal que $x, y \in D$ e, assim, como $\prec_C \cap (D \times D) = \prec_D$, temos que ou $x = y$, ou $x \prec_C y$, ou $y \prec_C x$; a transitividade é demonstrada de modo análogo) e se $X \subset C$ é conjunto não vazio, existe $(D, \prec_D) \in W$, tal que $X \cap D \neq \varnothing$. Seja $m = \min(X \cap D)$, na ordem $\prec_D$. Se $z \in X \smallsetminus D$, seja $(E, \prec_E) \in W$, tal que $z \in E$. Como W é linearmente ordenado, devemos ter $D \subset E$ e, portanto $m \prec_E z$ e, assim, $m \prec_C z$. Portanto $(C, \prec_C) \in P$ e este é limitante superior de W.

Seja $(M, \prec_M) \in P$ um elemento maximal. Se $M \neq A$, então existe $x \in A \smallsetminus M$, e fazendo $\prec_{M\cup\{x\}} = \prec_M \cup (M \times \{x\})$, temos que $(M, \prec_M) < (M \cup \{x\}, \prec_{M\cup\{x\}}) \in P$, contradizendo a maximalidade de $(M, \prec_M)$.

Isto quer dizer que A pode ser bem ordenado, ou seja, vale o axioma da escolha. $\square$

6.5 Bases em espaços vetoriais

Lembramos que um **corpo**corpo é um conjunto K, munido com operações $+$, $\cdot$, $-$ e $(\cdot)^{-1}$, e elementos distinguidos 0 e 1, tais que

1. $x + 0 = x$
2. $x + (-x) = 0$
3. $x + y = y + x$
4. $x + (y + z) = (x + y) + z$
5. $x \cdot 1 = x$
6. $x \cdot y = y \cdot x$
7. $(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$
8. se $x \neq 0$, então $x \cdot (x0^{-1} = 1$
9. $x \cdot (y + z) = (x \cdot y) + (x \cdot z)$.

Por exemplo, $\mathbb{R}$, $\mathbb{Q}$ são corpos.

Exercício 108 *Seja K um corpo e X um conjunto não vazio. Seja $K[X]$ o conjunto de todas os polinômios nas variáveis em X, com coeficientes em K, com as operações usuais. Seja $K(X)$ o conjunto das funções racionais $f = p/q$, com $p, q \in K[X]$ $eq \neq 0$. Mostre que $K(X)$ é um corpo.*

Um **espaço vetorial**espaço!vetorial (sobre o corpo K) é um conjunto E, possuindo um elemento distinguido $\vec{0}$, munido com uma operação denotada pelo símbolo $+$ (soma) e, para cada $\lambda \in K$, uma operação denotada m_λ (multiplicação por λ), satisfazendo

1. $\forall x \in E\, (x + \vec{0} = x)$
2. $\forall x, y \in E\, (x + y = y + x)$
3. $\forall x, y, z \in E\, ((x + y) + z = x + (y + z))$
4. $\forall x$
   $inE\, \exists y \in E\, (x + y = \vec{0})$
5. $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}\, \forall x \in E\, (m_\lambda(m_\mu(x)) = m_{\lambda\mu}(x))$
6. $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}\, \forall x \in E\, (m_\lambda(x) + m_\mu(x) = m_{\lambda+\mu}(x))$

7. $\forall x, y \in E\, \forall \lambda \in \mathbb{R}\, (m_\lambda(x+y) = m_\lambda(x) + m_\lambda(y))$

8. $\forall x \in E\, (m_1(x) = x)$

São exemplos de espaços vetoriais $\mathbb{R}^n$, das n-uplas de números reais, com a soma e multiplicação por escalares definidos coordenada a coordenada; o conjunto de todas as funções $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, com soma e multiplicação por escalares definidas ponto a ponto.

Para facilitar a apresentação, vamos adotar a notação mais usual λx no lugar de $m_\lambda(x)$.

Uma expressão do tipo $\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i$ é chamada de combinação linear dos elementos $x_i \in E$. Um subconjunto $B \subset E$ é dito linearmente dependente se existirem $n \in \mathbb{N}$, $n > 0$, $x_1, \ldots, x_n \in B$ e $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$, estes nem todos nulos, tais que $\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i = \vec{0}$. Caso não existam tais elementos, então B é dito linearmente independente. Uma baseespaço!vetorial!base de E é um conjunto $B \subset E$ linearmente independente, tal que, para cada $x \in E$, existem $n \in \mathbb{N}$, $n > 0$, $x_1, \ldots, x_n \in B$ e $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$, tais que $x = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i$ (isto é, resumidamente, o conjunto B gera E).

Teorema 55 *(ZFE) Todo espaço vetorial tem base.*

Demonstração: Seja V um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$. Seja $X = \{A \subset V : A \text{ é linearmente independente}\}$. O conjunto X é não vazio e parcialmente ordenado pela relação de inclusão, $A \subset B$. Uma cadeia $\{A_i : i \in I\} \subset X$ é limitada superiormente por $A = \bigcup_{i \in I} A_i \in X$. O Lema de Zorn garante a existência de um conjunto maximal $A \in X$. Para qualquer elemento $v \in V$, ou $v \in A$, ou $A \cup \{v\}$ é linearmente dependente. Em ambos os casos, vemos que o conjunto A gera V e, sendo linearmente independente, é base de V. $\square$

Esse resultado admite outra formulação:

Teorema 56 *(ZFE) Todo conjunto linearmente independente A em um espaço vetorial V pode ser estendido a uma base de V.*

Demonstração: A mesma argumentação do teorema anterior, aplicada ao conjunto $X = \{B \subset V : A \subset B \text{ e } B \text{ é linearmente independente}\}$, resulta neste teorema. $\square$

Ainda outra formulação:

Teorema 57 *(ZFE) Todo subconjunto $A \subset V$ que gera um espaço vetorial V contém um subconjunto B que é uma base de V.*

Demonstração: A mesma argumentação do teorema anterior, aplicada ao conjunto $X = \{B \subset V \ : B \subset A$ e B é linearmente independente$\}$, resulta neste teorema. $\square$

Exercício 109 *O axioma da escolha é realmente necessário somente nos casos em que a base for infinita. Mostre em ZF (sem o axioma da escolha) que para todo espaço vetorial finitamente gerado (existe um conjunto finito $X \subset E$ que gera E) tem base.*

Vamos mostrar que cada um desses enunciados, junto com ZF, implica o Axioma da Escolha.

Teorema 58 *(Blass, Bleicher, Halpern)*[1] *(ZF) Assumindo apenas ZF, cada um dos enunciados abaixo implica no axioma da escolha:*

1. *Todo espaço vetorial tem base.*
2. *Todo conjunto linearmente independente A em um espaço vetorial V pode ser estendido a uma base de V.*
3. *Todo subconjunto $A \subset V$ que gera um espaço vetorial V contém um subconjunto B que é uma base de V.*

Demonstração: Dado que os dois últimos enunciados implicam o primeiro (**exercício**: mostre isso), basta mostrar que o primeiro enunciado implica o axioma da escolha.

Seja $\mathscr{X} = \{X_i : i \in I\}$ um conjunto não vazio, cujos elementos seja conjuntos não vazios e dois a dois disjuntos. Seja $X = \bigcup \mathscr{X}$. Seja $\mathbb{R}[X]$

[1] A. Blass, *Existence of bases implies the axiom of choice*, em J. Baumgartner, D. Martin, S. Shelah (eds), **Axiomatic Set Theory**, Contemporary Mathematics, Vol. 31 (1984), pp 31-33; M. N. Bleicher, *Some theorems on vector spaces and the axiom of choice*, Fundamenta Mathematicae, Vol. 54 (1964), pp 95-107; J. D. Halpern, *Bases in vector spaces and the axiom of choice*, Proc. of the AMS, Vol. 17 (1966), pp 670-673.

o conjunto de todos os polinômios reais cujas variáveis estejam no conjunto X. Dizemos que um monômio $q = ax_{j_1}^{n_1} \dots x_{j_m}^{n_m} \in \mathbb{R}[X]$ tem i-grau N, se as variáveis de q que estiverem em X_i tem n como a soma de seus graus. Um polinômio $p \in \mathbb{R}[X]$ é i-homogr̂nro de i-grau N se todos os seus monômios tiverem i-grau N.

Seja K o conjunto das funções racionais $r \in \mathbb{R}(X)$, tais que, escrevendo $r = p/q$, com $p, q \in \mathbb{R}[X]$ sem fatores comuns, então para cada $i \in I$ p e q são i-homogêneos de mesmos i-graus. Esse conjunto, com as operações herdadas de $\mathbb{R}(X)$ é um corpo.

Seja $V \subset \mathbb{R}(X)$ o K-espaço vetorial gerado pelo conjunto X. Seja $B \subset V$ uma base. Seja $i \in I$ e $x \in X_i$. Escrevemos $x = \sum_{b \in B} \alpha_b(x) \cdot b$; seja supp $(x) = \{b \in B : \alpha_b(x) \neq 0\}$, que é um conjunto finito. Se $y \in X_i$, $y = \sum_{b \in B} \alpha_b(x) \cdot b$. Como $y = (y/x)x$ e como $(y/x) \in K$, pela unicidade da representação de vetores em uma base, temos que supp $(y) =$ supp (x) e $\alpha_b(y) = (y/x)\alpha_b(x)$.

Assim, para cada $i \in I$, o conjunto supp (x) e os elementos $\alpha_b(x)/x$ (que é i-homogêneo de i-grau -1, se $b \in$ supp (x)) só dependem de X_i. Seja $k_i = |\text{supp } (x)| > 0$, se $x \in X_i$; então $\beta_i = \prod_{b \in \text{supp } (x)} \alpha_b(x)/x$ $(x \in X_i)$ é i-homogêneo de i-grau $-k_i$. Daí, existe um subconjunto finito e não vazio $Y_i \subset X_i$ consistindo das variáveis do denominador de β_i que estejam em X_i.

Para cada Y_i, existe uma função de escolha escolhendo um elemento $y_i \in Y_i$.

Seja $Y = \{y_i : i \in I\}$. Então Y contém exatamente um elemento de cada X_i, ou seja, vale o axioma da escolha. □

6.5.1 O Teorema de Tychonov

Lembramos que um espaço topológicoespaço!topológico é um par (X, τ), em que $\tau \subset \mathcal{P}(X)$ é tal que $\varnothing \in \tau$, $X \in \tau$ e se $W \subset \tau$, então $\bigcup W \in \tau$. Os conjuntos de τ são os abertos de X. Dizemos que $X \smallsetminus A$ é fechado, se $A \in \tau$.

Um espaço topológico (X, τ) é compacto se, para todo $W \subset \tau$, tal que $X = \bigcup W$, existe $W_0 \subset W$ finito, satisfazendo $X = \bigcup W_0$.

Apesar dessa ser a clássica definição de es[aço compacto, existe uma caracterização equivalente, mais útil para as aplicações.

Lema 36 *(ZF) Um espaço topológico* (X, τ) *é compacto se, e somente se, para todo conjunto* B *de subconjuntos fechados de* X*, tal que para todo* $B_0 \subset B$ *finito,* $\bigcap B_0 \neq \varnothing$*, vale que* $\bigcap B \neq \varnothing$*.*

Demonstração: Comecemos supondo que (X, τ) seja compacto. Seja B um conjunto de subconjuntos compactos de X, tal que para todo $B_0 \subset B$ finito, $\bigcap B_0 \neq \varnothing$. Seja $W = \{X \smallsetminus F : F \in B\} \subset \tau$. Como X é compacto e como para todo $W_0 \subset W$, $\bigcup W_0 \neq X$, pois $\bigcap B_0 \neq \varnothing$, para $B_0 = \{X \smallsetminus U : U \in W_0\}$, devemos ter que $\bigcup W \neq X$ e, portanto, $\bigcap B = X \smallsetminus \bigcup W \neq \varnothing$.

Para demonstramos a recíproca, seja (X, τ) um espaço topológico. Se admitirmos que (X, τ) possa não ser compacto, existiria um conjunto $W \subset \tau$, tal que $X = \bigcup W$, mas $X \neq \bigcup W_0$, para todo $W_0 \subset W$ finito. Tomando $B = \{X \smallsetminus U : U \in W\}$, todo $B_0 \subset B$ finito teria interseção não vazia, contudo $\bigcap B = X \smallsetminus \bigcup W = \varnothing$. Assim, sendo, não poderia valer aquela propriedade acerca de famílias de subconjuntos fechados de X. □

Sejam $I \neq \varnothing$ e (X_i, τ_i), $i \in I$, espaços topológicos. Seja (X, τ) dado por $X = \mathsf{X}_{i \in I} X_i$ e τ o subconjunto de $\mathcal{P}(X)$ formado por uniões de famílias de conjuntos da forma $\mathsf{X} A_i$, com $A_i \in \tau_i$ e, a menos de um subconjunto finito $I_0 \subset I$, $A_i = X_i$, $i \in I \smallsetminus I_0$.

O Teorema de Tychonovteorema!Tychonov diz que se cada (X_i, τ_i) for compacto, então (X, τ) também será compacto. Para evitar contradições bobas, estamos assumindo que o conjunto de índices I não é vazio. Na verdade:

Teorema 59 *(ZF) São equivalentes:*

1. *o Axioma da Escolha;*
2. *o Teorema de Tychonov.*

Demonstração: Comecemos com a implicação $1 \Rightarrow 2$. Se pelo menos um dos espaços (X_i, τ_i) for vazio, o produto será vazio, o que é trivialmente compacto, sem mesmo ter que usar o Axioma da Escolha.

Assim, o caso interessante é aquele em que todos os espaços (X_i, τ_i) sejam não vazios. Então o espaço produto, (X, τ), não é vazio (pelo axioma da escolha). Seja B um conjunto de subconjuntos fechados de X, tal que para todo $B_0 \subset B$ finito satisfaça $\bigcap B_0 \neq \varnothing$. Seja B_i o conjunto dos fechos das projeções em X_i dos conjuntos de B, para cada $i \in I$. Bom, cada B_i tem a propriedade de que cada parte finita tem interseção não vazia (herdada de B) e, portanto, usando o axioma da escolha, podemos escolher um elemento $x_i \in \bigcap B_i \neq \varnothing$. Seja $f \in X$, tal que $f(i) = x_i$.

Precisamos mostrar que $f \in \bigcap B$, o que não deveria ser considerado óbvio em face da definição dos conjuntos B_i. Para isto, observemos que se $x_i \in U_i \in \tau_i$, para $i \in I_0$, um subconjunto finito de I, então $F(i) = X_i$ se i $inI \setminus I_0$ e $F(i) = U_i$ se $i \in I_0$ é vizinhança aberta de f, que intersecta cada elemento de B. Isto que dizer que f está no fecho de cada elemento de B, ou seja, $f \in \bigcap B \neq \varnothing$.

Assumamos o Teorema de Tychonov e demonstremos que ele implica o axioma da escolha (trabalhnado em ZF, é claro). Sejam $S_i \neq \varnothing$, $i \in I \neq \varnothing$. Para sermos um pouco mais explícitos, suponhamos dada uma função $f : I \to \mathcal{P}(\bigcup_{i \in I} S_i)$, tal que $f(i) = S_i$. Precisamos mostrar que existe uma função de escolha $g : I \to \bigcup_{i \in I} S_i$, tal que $g(i) \in S_i$. Sejam $X_i = S_i \cup \{S_i\}$ e $\tau_i = \{\varnothing\} \cup \{U \subset X_i : S_i \in U \wedge X_i \setminus U \text{ finito}\} \cup \{U \subset S_i : S_i \setminus U \text{ finito}\}$. Não é muito difícil perceber que (X_i, τ_i) é um espaço topológico compacto. Observemos que o espaço produto (X, τ) não é vazio, pois $f : i \in I \mapsto S_i \in X_i$ é elemento de X_i. Nem precisamos do axioma da escolha para exibir esse elemento. Sejam $Z_i = \{h \in X : h(i) \in S_i\}$, $i \in I$. Esses conjuntos são não vazios, pois existe $h \in Z_i$, da forma $h(j) = S_j$, se $j \neq i$ e $h(i) \in S_i \neq \varnothing$. Esse mesmo tipo de argumentação mostra que o conjunto $B = \{Z_i : i \in I\}$ tem a propriedade de que suas interseções finitas são não vazias. Por fim, a partir da definição de τ_i e de τ, Z_i é fechado. Pelo Teorema de Tychonov, $\bigcap_{i \in I} Z_i \neq \varnothing$. Cada elemento dessa interseção é uma função de escolha. $\Box$