MAT-330: Teoria dos Conjuntos

1ª Lista de Exercícios

1º Semestre de 2011

1 Explicações iniciais

Importante: Cada exercício faz uso de alguns dos axiomas de ZF. Tente sempre declarar explicitamente quais estão sendo usados. Para facilitar a referência a eles:

1. **Extensionalidade:** $\forall x\,\forall y\,(\forall z\,(z \in x \leftrightarrow z \in y) \to (x = y))$ (se dois conjuntos tem os mesmos elementos, então são iguais).

2. **Vazio:** $\exists x\,\forall y\,(y \notin x)$ (existe um conjunto que não tem elementos, o conjunto vazio, denotado por $\varnothing$).

3. **Par:** $\forall x\,\forall y\,\exists z\,\forall t\,(t \in z \leftrightarrow (t = x \vee t = y))$ (dados os conjuntos x e y, existe o conjunto, cujos elementos são exatamente x e y, denotado $z = \{x, y\}$).

4. **União:** $\forall x\,\exists y\,\forall z\,(z \in y \leftrightarrow \exists t(t \in x \wedge z \in t))$ (para toda família x de conjuntos existe sua união, $z = \bigcup x$).

5. **Separação:** para cada fórmula $A(t)$, $\forall x\,\exists y\,\forall t\,(t \in y \leftrightarrow (t \in x \wedge A(t)))$ (para cada x existe o conjunto y dos elementos de x que satisfazem a fórmula A: $y = \{t : t \in x \wedge A(t)\}$).

6. **Partes:** $\forall x\,\exists y\,\forall z\,(z \in y \leftrightarrow z \subset x)$ ($z \subset x$ é a fórmula $\forall t\,(t \in z \to t \in x)$; o conjunto y de todos os subconjuntos de x é chamado de partes de x, denotado $\mathcal{P}(x) = \{y : y \subset x\}$).

7. **Infinito:** $\exists x\,(\varnothing \in x \wedge \forall y\,(y \in x \to y \cup \{y\} \in x))$ (existe um conjunto x, tal que $\varnothing \in x$, e se $y \in x$, então $y \cup \{y\} \in x$; este é chamado de axioma do infinito, pois afirma a existência de um conjunto com infinitos elementos).

8. **Substituição:** para cada fórmula $F(x, y)$, $\forall x\,\forall y\,\forall z\,(F(x, y) \wedge F(x, z) \to y = z) \to \forall x\,\exists y\,\forall t\,(t \in y \leftrightarrow \exists z\,(z \in x \wedge F(z, t)))$; (se a fórmula F satisfizer a condição de definir uma função, então a imagem de um conjunto por F é um conjunto).

9. **Regularidade:** $\forall x\,(x \neq \varnothing \to \exists y\,(y \in x \wedge y \cap x = \varnothing))$ (todo conjunto não vazio x possui um elemento y, tal que $y \cap x = \varnothing$).

10. **Escolha:** $\forall x\,\exists \phi\,(\phi : \mathcal{P}(x) \smallsetminus \{\varnothing\} \to x \wedge \forall t(t \subset x \to \phi(t) \in t))$ (para todo conjunto x, existe uma função de escolha ϕ, que a cada $t \subset x$, $\phi(t) \in t$).

2 Existência de conjuntos

Exercício 1 Mostre que existe um conjunto, sem usar nenhum dos axiomas de ZF, somente axiomas lógicos. Por exemplo, mostre que $\exists x\,(x = x)$.

Exercício 2 Usando apenas os axiomas 2 e 3, mostre que existem os conjuntos definidos por $0 = \varnothing$, $n + 1 = \{0, \ldots, n\}$. Você consegue mostrar [1] que existe o conjunto $\{1, 3, 5\}$?

Exercício 3 Usando os axiomas 2, 3 e 4, mostre que existe o conjunto $\{1, 3, 5\}$.

Exercício 4 Você precisa de algum axioma de ZF para mostrar que $\varnothing \neq \{\varnothing\}$?

Exercício 5 Mostre que existe o conjunto $\mathcal{P}(\{0, 1, 2, 3\})$ **sem usar o axioma das partes**.

[1] A resposta certa é NÃO!

Exercício 6 Uma variação do axioma do infinito: mostre que existe um conjunto x, tal que $\varnothing \in x$ e se $y \in x$, então $\{y\} \in x$. Lembre-se de explicitar quais axiomas você usa na construção desse conjunto.

Famílias indexadas de conjuntos: estamos acostumados a ver coisas do tipo $\{x_i : i \in I\}$. Para dar sentido a essa notação, começamos com uma função f definida em um conjunto I (e, portanto, pelo axioma da substituição, sua imagem é um conjunto), assumindo os valores $f(i) = x_i$. O conjunto $X = \{x_i : i \in I\}$ denota a imagem de f. Neste caso, costumamos escrever, por exemplo, $\bigcup_{i \in I} x_i$, no lugar de $\bigcup X$.

Exercício 7 Usando o axioma da regularidade (e os outros também) mostre que

1. $\forall x\,(x \notin x)$
2. $\neg[\exists x\, \exists y\,(x \in y \wedge y \in x)]$
3. não existe seqüência de conjuntos $\{x_n : n \in \omega\}$, tal que $x_{n+1} \in x_n$, para todo $n \in \omega$.

Exercício 8 Seja $f : \omega \to \omega$ uma função. mostre que a imagem de f é um conjunto, **sem usar o axioma da substituição**.

Exercício 9 Seja x_n uma seqüência de números reais (isto é, uma função $f : \omega \to \mathbb{R}$, tal que $f(n) = x + n$). Mostre que $\{x_n : n \in \omega\}$ é um conjunto, **sem usar o axioma da substituição**.

Exercício 10 Seja $X = \{x_i : i \in I\}$ uma família de conjuntos não vazios, indexada por um conjunto não vazio I. Mostre que existe uma função $f : I \to \bigcup X$, tal que $f(i) \in x_i$.

3 Álgebra de conjuntos

Exercício 11 Mostre que:

1. $\bigcup \varnothing = \varnothing$

2. $a \cup b = b \cup a$
3. $a \cup a = a$
4. $a \cup (b \cup c) = (a \cup b) \cup c$
5. o que é $\bigcup(a, b)$?

Lembre-se que podemos definir as seguintes operações sobre conjuntos:

1. $\bigcap x = \{z \in \bigcup x \, \forall w \, (w \in x \to z \in w)\}$ (interseção)
2. $a \cap b = \bigcap\{a, b\}$
3. $a \setminus b$ definido por $x \in a \wedge x \notin b$ (diferença de conjuntos)
4. $a \bigtriangleup b$ definido por $(a \setminus b) \cup (b \setminus a)$ (diferença simétrica)

Exercício 12 Mostre que

1. $a \setminus (b \cup c) = (a \setminus b) \cap (a \setminus c)$
2. $a \setminus (b \cap c) = (a \setminus b) \cup (a \setminus c)$

Exercício 13 Mostre que

1. $\bigcap \varnothing = \varnothing$
2. $a \cap b = b \cap a$
3. $a \cap a = a$
4. $a \cap (b \cap c) = (a \cap b) \cap c$
5. o que é $\bigcap(a, b)$?

Exercício 14 Seja $x = \{x_2, x_3\}$, sendo que x_2 o conjunto dos múltiplos de dois em ω e x_3 o conjunto dos múltiplos de três em ω. Descreva o conjunto $x_2 \cap x_3$.

Exercício 15 Mostre que

1. $a \cup b = (a \triangle b) \triangle (a \cap b)$
2. $a \triangle \varnothing = a$
3. $a \triangle a = \varnothing$
4. $a \triangle b = (a \cup b) \smallsetminus (a \cap b)$
5. $a \triangle (b \triangle c) = (a \triangle b) \triangle c$
6. $a \cap (b \triangle c) = (a \cap b) \triangle (a \cap c)$

Lembramos que um *anel comutativo* é um conjunto não vazio A, munido de três operações $+, -$ e $\cdot$, tendo dois elementos distinguidos 0 e 1, satisfazendo:

1. $x + 0 = x$
2. $x + y = y + x$
3. $x + (y + z) = (x + y) + z$
4. $x + (-x) = 0$
5. $x \cdot 1 = x$
6. $x \cdot y = y \cdot x$
7. $x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$
8. $x \cdot (y + z) = (x \cdot y) + (x \cdot z)$

Um anel comutativo A é chamado de *anel booleano* se também satisfizer $x + x = 0$ e $x \cdot x = x$.

Exercício 16 Seja X um conjunto. Mostre que o conjunto $\mathcal{P}(X)$, munido com as operações $+ = \triangle$ e $\cdot = \cap$, é um anel booleano. O que são $-a$, 0 e 1?

4 Conjuntos transitivos

Exercício 17 Mostre que se $n < m$ forem números naturais, então:

1. $\mathbf{n} \subset \mathbf{m}$
2. $\mathbf{n} \in \mathbf{m}$
3. $\mathbf{n} \subset \omega$

Exercício 18 Mostre que se x for um conjunto, cujos elementos sejam conjuntos transitivos, então $\bigcup x$ será também um conjunto transitivo.

Lembramos que o *fecho transitivo* de um conjunto x é um conjunto transitivo y, tal que $x \subset y$ e se z também for transitivo e $x \subset z$, então $y \subset z$.

Exercício 19 Mostre que se x for transitivo, então ele é o seu fecho transitivo.

Exercício 20 Mostre que se x e y forem conjuntos transitivos, então $x \cup y$ e $x \cap y$ serão transitivos.

5 Conjuntos bem ordenados

Exercício 21 Mostre que $\in$ é uma relação de boa ordem em ω, isto é, definindo a relação $x < y$ em ω se $x \in y$, mostre que para todo $x, y, z \in \omega$,

1. $x \not< x$
2. $(x < y \wedge y < z) \rightarrow x < z$
3. $x < y \rightarrow y \not< x$
4. ou $x < y$ ou $x = y$, ou $y < x$
5. $\forall x \, ((x \subset \omega \wedge x \neq \varnothing) \rightarrow \exists y \, (y \in x \wedge \forall z \, (z \in x \rightarrow (x = y \vee y \in x))))$.

Ordem Lexicográfica: Sejam $(a, <_a)$ e $(b, <_b)$ dois conjuntos (não vazios) linearmente ordenados. Definimos em $a \times b$ a ordem $(x, y) < (z, w)$ se $x <_a z$, ou $x = z$ e $y <_b w$.

Exercício 22 Mostre que se $(a, <_a)$ e $(b, <_b)$ dois conjuntos (não vazios) bem ordenados, então a ordem lexicográfica em $a \times b$ é uma boa ordem.

Exercício 23 Sejam $(a, <_a)$ e $(b, <_b)$ dois conjuntos (não vazios)linearmente ordenados. Definimos $(a <_a) \oplus (b, <_b)$ como sendo o par ordenado $(c, <)$, tal que $c = (\{0\} \times a) \cup (\{1\} \times b)$ e definimos $(n, x) < (m, y)$ se $n = 0$ e $m = 1$, ou se $m = n = 0$ e $x <_a y$, ou se $m = n = 1$ e $x <_b y$. Mostre que se $(a, <_a)$ e $(b, <_b)$ forem bem ordenados, então $(a <_a) \oplus (b, <_b)$ será bem ordenado.

6 Ordinais

Exercício 24 Qual é o ordinal de $\omega \times \omega$ com a ordem lexicográfica?

Exercício 25 Calcule os ordinais correspondentes:

1. $(\omega + 1) + \omega$
2. $\omega + \omega^2$
3. 2ω

Exercício 26 Qual é o ordinal de $\{(k - \frac{1}{n}) \in \mathbb{Q} : -3 \leq k \leq 5 \wedge n > 0\}$, com a ordem induzida de $\mathbb{Q}$?

Exercício 27 Qual é o ordinal de $\{(k - \frac{1}{n}) \in \mathbb{Q} : 0 \leq k \wedge n > 0\}$, com a ordem induzida de $\mathbb{Q}$?

Exercício 28 Qual é o ordinal de $\{(\frac{1}{k} - \frac{1}{k(k+1)n}) \in \mathbb{Q} : k > 0 \wedge n > 0\}$, com a ordem induzida de $\mathbb{Q}$?

Exercício 29 Dê um exemplo de um subconjunto de $\mathbb{R}$, cujo ordinal seja ω^3.

Exercício 30 Sejam $\omega^{(n)}$ os ordinais definidos por $\omega^{(0)} = \omega$, $\omega^{(n+1)} = \omega^{\omega^{(n)}}$. Seja $\varepsilon_0 = \bigcup_{n \in \omega} \omega^{(n)}$. Mostre que $\varepsilon_0^{\omega} = \varepsilon_0$.