MAT-330: Teoria dos Conjuntos

2ª Lista de Exercícios

1º Semestre de 2011

1 Álgebra de conjuntos

Exercício 1 Sejam A, B, X e Y conjuntos quaisquer. Mostre que

1. $(A \cup B) \times X = (A \times X) \cup (B \times X)$
2. $(A \cap B) \times (X \cap Y) = (A \times X) \cap (B \times Y)$
3. $(A \setminus B) \times X = (A \times X) \setminus (B \times X)$
4. $A \subset B \to (X \setminus B \subset X \setminus A)$

2 Operações com ordinais

Exercício 2 Mostre que o ordinal λ é ordinal limite se, e somente se, para todo $n \in \omega$, $n > 0$, $n \cdot \lambda = \lambda$.

Exercício 3 Mostre que $(\omega^3 + \omega)^5 = (\omega^5 + \omega^3)^3$.

Exercício 4 Mostre que todas os ordinais ξ^2, tais que $\omega < \xi^2 < \omega^3$, são da forma $\omega^2 \cdot k + \omega \cdot kn + n$.

Exercício 5 Mostre que o tipo de ordem do conjunto $(\omega + 1)^2 \setminus \omega^2$ é $\omega + 1$.

Exercício 6 Mostre que $(\omega^n + \omega)^2 \setminus \omega^{2n}$ tem o tipo de ordem de ω^{n+1}, se $n \in \omega$, $n > 0$.

Exercício 7 Qual é o tipo de ordem de $(\omega \cdot (n + 1))^2 \setminus (\omega \cdot n)^2$, se $n \in \omega$?

Exercício 8 Sejam $\alpha = \omega + 1$ e $\beta = \omega \cdot 2 + 1$. Mostre que $\alpha + \beta = \beta + \alpha$ e que $\alpha^2 + \beta^2 \neq \beta^2 + \alpha^2$.

Exercício 9 Dados dois ordinais α e β, mostre que $\alpha \cdot \beta = \beta \cdot \alpha$ se, e somente se, $\alpha^2 \cdot \beta^2 = \beta^2 \cdot \alpha^2$. (Sugestão: $(\Rightarrow)$ use a associatividade e a hipótese, ao calcular $\alpha^2 \cdot \beta^2$; $(\Leftarrow)$ considere os casos $\alpha \cdot \beta > \beta \cdot \alpha$ e $\alpha \cdot \beta < \beta \cdot \alpha$.)

Exercício 10 Sejam α, β e γ ordinais. Mostre que

1. se $\alpha < \beta$, então $\gamma + \alpha < \gamma + \beta$ e $\alpha + \gamma \leq \beta + \gamma$ (e, aqui, dê um exemplo em que vale a igualdade);

2. se $\alpha < \beta$ e $\gamma > 0$, então $\gamma \cdot \alpha < \gamma \cdot \beta$ e $\alpha \cdot \gamma \leq \beta \cdot \gamma$ (e, aqui, dê um exemplo em que vale a igualdade);

3. se $\alpha < \beta$ e $\gamma > 1$, então $\gamma^\alpha < \gamma^\beta$ e $\alpha^\gamma \leq \beta^\gamma$ (e, aqui, dê um exemplo em que vale a igualdade).

Exercício 11 Sejam α e β dois ordinais, tais que $0 < \alpha \leq \beta$. Mostre que existem únicos ordinais δ e ρ, tais que $\rho < \alpha$ e $\beta = \alpha \cdot \delta + \rho$.

Exercício 12 Seja $\lambda > 0$ um ordinal limite. Mostre que as seguintes afirmações são equivalentes:

1. $\forall \alpha, \beta < \lambda \, (\alpha + \beta < \lambda)$;

2. $\forall \alpha < \lambda \, (\alpha + \lambda = \lambda)$;

3. para todo subconjunto $X \subset \lambda$, o tipo de ordem de X é λ, ou o tipo de ordem de $\lambda \setminus X$ é λ, sendo que em ambos os casos, a ordem é aquela induzida pela ordem de λ;

4. $\exists \delta \, (\lambda = \omega^\delta)$.

Exercício 13 Demonstre, por indução em α, o **Teorema da Forma Normal de Cantor**, que declara:

> *Para todo ordinal $\alpha > 0$, existe um único $n \in \omega \setminus \{0\}$, únicos ordinais $\beta_n < \ldots < \beta_1 \leq \alpha$ e únicos $k_1, \ldots, k_n \in \omega \setminus \{0\}$, tais que*
> $$\alpha = \omega^{\beta_1} \cdot k_1 + \ldots \omega^{\beta_n} \cdot k_n.$$

Exercício 14 Dados ordinais α e β, seja $F(\alpha, \beta)$ o conjunto das funções $f : \beta \to \alpha$, tais que $\{\gamma \in \beta : f(\gamma) \neq 0\}$ seja finito. Definimos a relação $\lhd$ em $F(\alpha, \beta)$ por $f \lhd g$ se $f(\xi) < g(\xi)$, onde ξ é o maior dos ordinais $\zeta < \beta$, tais que $f(\zeta) \neq g(\zeta)$. Mostre que $\lhd$ é uma boa ordem em $F(\alpha, \beta)$, cujo tipo de ordem é α^β.

Definição: Uma função $f : \mathsf{Ord} \to \mathsf{Ord}$ é chamada de **função normal**, se satisfizer as duas condições:

1. $\forall \alpha, \beta \, (\alpha < \beta \to f(\alpha) < f(\beta))$;
2. se λ for ordinal limite, então $f(\lambda) = \bigcup_{\alpha < \lambda} f(\alpha)$.

Por exemplo, $f(\alpha) = \alpha$, $f(\alpha) = \beta + \alpha$, $f(\alpha) = \beta \cdot \alpha$, são todas funções normais.

Exercício 15 Mostre que se f for uma função normal, então $\forall \alpha \, (f(\alpha) \geq \alpha)$.

Exercício 16 Mostre que para toda função normal f, $\forall \alpha \exists \beta \, (\alpha < \beta \wedge f(\beta) = \beta)$, ou seja, toda função normal tem pontos fixos arbitrariamente grandes. (Sugestão: seja $\beta_0 = \alpha + 1$, $\beta_{n+1} = f(\beta_n)$ e $\beta = \bigcup_{n \in \omega} \beta_n$, etc.)

Exercício 17 Seja f uma função normal e definamos $g : \mathsf{Ord} \to \mathsf{Ord}$ a função que enumera os pontos fixos de f: ou seja, $g(0)$ é o menor ponto fixo de f, e $g(\alpha)$ é o menor ponto fixo de f em Ord menos $\{g(\beta) : \beta < \alpha\}$. Mostre que g é uma função normal.

Exercício 18 Dadas duas funções normais f e g, é sempre verdade que $f + g$ é uma função normal? Se sua resposta for sim, demonstre-a. Se for não, mostre um contraexemplo.