MAT-5865: Prova 1. Entregar até o dia 9 de maio.

Escolha 4 questões (cada uma vale 2,5 pontos):

1. Seja U um ultrafiltro sobre I, e para cada $i \in I$, $F_i : M_{i,1} \to M_{i,2}$, um monomorfismo elementar. Defina o que seria o correspondente $F_U : \prod_{i\in I} M_{i,1}/_U \to \prod_{i\in I} M_{i,2}/_U$ e mostre que também será monomorfismo elementar.

2. Sejam D e E dois filtros sobre I, com $D \subseteq E$. Mostre que esta inclusão induz um epimorfismo (morfismo sobrejetor) $F : \prod_{i\in I} M_i/_D \to \prod_{i\in I} M_i/_E$.

3. Seja $(T_n : n < \omega)$ uma sequência estritamente crescente de L-teorias (não necessariamente completas) em uma assinatura finita. Mostre que $\bigcup_{n<\omega} T_n$ possui modelos infinitos.

4. Seja T uma teoria de primeira ordem numa linguagem enumerável, e sejam $\Sigma(x)$ e $\Delta(y)$ dois conjuntos de fórmulas que são consistentes com T. Suponha que para toda fórmula $\phi(x)$ existe $\sigma(x) \in \Sigma(x)$, tal que para todas $\delta_1(y), \ldots, \delta_n(y) \in \Delta(y)$, se $\{\phi, \delta_1, \ldots, \delta_n, \sigma\}$ for consistente com T, então $\{\phi, \delta_1, \ldots, \delta_n, \neg\sigma\}$ também será consistente com T. Mostre que existe $M \models T$ que realiza $\Delta(y)$ e omite $\Sigma(x)$.

5. Mostre que se $\phi(x_0, \ldots, x_n)$ for uma fórmula completa para a teoria T em relação às variáveis $x_0, \ldots, x_n$ (isto é, para toda fórmula $\psi(x_1, \ldots, x_n)$, exatamente uma entre $T \vdash \phi \to \psi$ ou $T \vdash \phi \to \neg\psi$ ocorre), então a fórmula $\exists x_0 \phi(x_0, x_1, \ldots, x_n)$ será completa para T em relação a $x_1, \ldots, x_n$.

6. Sejam $c_1, \ldots, c_m$ novos símbolos de constantes. Mostre que para cada $n \geq 1$, a aplicação $p(x_1, \ldots, x_{n+m}) \in S_{n+m} \mapsto p(x_1, \ldots, x_n, \bar{c}) \in S_n(\bar{c})$ é injetora e contínua.

7. Seja T uma L-teoria (de primeira ordem) axiomatizada por um conjunto de $\forall_2$-sentenças. Mostre que se $M \models T$ e $M' \preceq_1 M$ (M' existencialmente fechado em M), então $M' \models T$.

8. Dada a teoria de primeira ordem T, seja T^f o conjunto das sentenças forçadas fracamente por 1 em uma (qualquer) noção de forcing. Mostre que T e T^f têm as mesmas consequências universais ($T_\forall = (T^f)_\forall$). Mostre que $(T^f)^f = T^f$ e que $(T_\forall)^f = T^f$.