

Teoria dos Modelos: Funções de Skolem e Indiscerníveis

Ricardo Bianconi

Sumário

1	Introdução	1
2	Funções de Skolem	1
3	Indiscerníveis	3
4	Exercícios	9

1 Introdução

Vamos estudar neste texto duas técnicas correlatas de construção de modelos que são muito usadas no estudo de Teoria da Estabilidade (continuação da Teoria de Modelos), que são as funções de Skolem e seqüências indiscerníveis. Falaremos um pouco sobre Teorias Modelo Completas em relação às funções de Skolem, deixando um tratamento mais detalhado desse assunto para outro texto.

2 Funções de Skolem

Dada uma assinatura L , para cada L -fórmula $\phi(x, x_1, \dots, x_n)$, cujas variáveis livres são as listadas, acrescentamos o símbolo de função n -ária F_ϕ , chamada de função de Skolem obtendo, assim, um assinatura expandida L^* , chamada de expansão de Skolem de L .

A Teoria de Skolem de uma assinatura L é o conjunto Σ_L das seguintes sentenças de L^* , para cada L -fórmula $\phi(x, x_1, \dots, x_n)$, cujas variáveis livres são as listadas:

$$\forall y_1 \dots y_n [\exists x \phi(x, y_1, \dots, y_n) \rightarrow \phi(F_\phi(y_1, \dots, y_n), y_1, \dots, y_n)],$$

sendo que y_1, \dots, y_n são novas variáveis que não ocorrem na fórmula original ϕ .

Uma L -estrutura A pode ser expandida a uma L^* -estrutura A^* (em geral de várias maneiras) que satisfaça a teoria de Skolem Σ_L .

Se T é uma L -teoria, então a L^* -teoria $T^* = T \cup \Sigma_L$ é chamada de *skolemização* de T .

- Lema 2.1**
1. Toda L -estrutura A admite uma expansão de Skolem A^* .
 2. Se T é uma L -teoria consistente, então sua skolemização T^* também é consistente.
 3. Sejam A e B duas L -estruturas, B^* uma expansão de Skolem de B e A' uma expansão qualquer de A na assinatura L^* . Se A^* for subestrutura de B , então $A \prec B$.

Demonstração: Exercício. □

Seja A uma L -estrutura, A^* uma expansão de Skolem da A e $X \subset A$ um conjunto qualquer. A envoltória de Skolem de X em A^* é o menor conjunto $Y \subset A$ que contenha X , as interpretações dos símbolos de constantes de L e seja fechado por todos os símbolos de função de L^* . Restringindo a esse conjunto Y as interpretações dos símbolos relacionais de L obtemos uma L^* -estrutura que será denotada por $\mathcal{H}(X)$.

Lema 2.2 Sejam A uma L -estrutura, $X \subset A$ e A^* uma expansão de Skolem de A . Então $\mathcal{H}(X) \preceq A$, e $|\mathcal{H}(X)| \leq |X| + |L| + \omega$.

Demonstração: Exercício. □

Uma L -teoria T de funções de Skolem internas de, para cada fórmula $\phi(x, x_1, \dots, x_n)$, cujas variáveis livres são as listadas, existe um termo t_ϕ contendo as variáveis x_1, \dots, x_n , tal que

$$T \models \forall y_1 \dots y_n [\exists x \phi(x, y_1, \dots, y_n) \rightarrow \phi(t_\phi(y_1, \dots, y_n), y_1, \dots, y_n)],$$

sendo que y_1, \dots, y_n são novas variáveis que não ocorrem na fórmula original ϕ .

Uma L -teoria T é modelo completa se, dados $A, B \models T$, tais que $A \subseteq B$, então $A \preceq B$.

Lema 2.3 Se a L -teoria T tem funções de Skolem internas, então ela é modelo completa.

Demonstração: Exercício. □

Lema 2.4 Dada uma L -teoria T , existe uma assinatura $\bar{L} \supset L$ e uma extensão de T a uma \bar{L} -teoria \bar{T} que tem funções de Skolem internas. Todo modelo $A \models T$ pode ser expandido a um modelo de \bar{T} .

Demonstração: Exercício. □

3 Indiscerníveis

Os elementos indiscerníveis de que falaremos agora são na verdade uma generalização da ideia de um conjunto de vetores linearmente independentes em um espaço vetorial, que não podem ser distinguidos pelas fórmulas da linguagem (combinações lineares não nulas, no caso). A primeira ferramenta essencial ao nosso estudo do assunto é o Teorema de Ramsey, um resultado combinatório importantíssimo que transcendeu em muito sua intenção original.

Fixemos as notações: dado um conjunto X e $n \in \mathbb{N}$, $[X]^n$ é o conjunto de todos os subconjuntos de X contendo exatamente n elementos (em particular, $[X]^0 = \{\emptyset\}$). Podemos identificar $[X]^n$ com o subconjunto das n -uplas

$(x_1, \dots, x_n) \in X^n$, tais que $x_1 < x_2 < \dots < x_n$, sendo que $<$ é alguma ordem linear em X (por exemplo, herdada de alguma enumeração de X por um ordinal). Para não sobrecarregar a notação, apresentaremos apenas a notação $x_1 < x_2 < \dots < x_n$ com o intuito de indicar o conjunto $\{x_1, \dots, x_n\} \in [X]^n$.

Teorema 3.1 (Ramsey) Seja I um conjunto infinito e $n \in \mathbb{N}$, $n > 0$, e suponha que $[I]^n = A_0 \cup A_1$. Então existe um subconjunto infinito $J \subseteq I$, tal que $[J]^n \subset A_0$ ou $[J]^n \subset A_1$.

Demonstração: Observemos que o caso $n = 1$ é imediato (é o chamado Princípio dos Escaninhos ou das Casas de Pombos): se a união de dois conjuntos é um conjunto infinito, então um deles deve também ser infinito. Assumiremos, então que $n > 1$.

Tomando um subconjunto de I , se necessário, podemos supor que $|I| = \omega$. Vamos assumir que $I = \{i_r : r \in \omega\}$ e que a enumeração induz a ordem linear em I dada por $i_l < i_m$ se $l < m < \omega$.

Seja U um ultrafiltro não principal sobre I . Observemos que, para todo $m < \omega$, $\{i \in I : i_m < i\} \in U$.

Sejam $A_0^n = A_0$ e $A_1^n = A_1$ os conjuntos dados no enunciado. Por hipótese, temos que $[I]^n \subseteq A_0^n \cup A_1^n$.

Suponhamos que já tenhamos definido os conjuntos A_0^{n-r} e A_1^{n-r} , com a propriedade de que $[I]^{n-r} \subseteq A_0^{n-r} \cup A_1^{n-r}$, para todo r , tal que $0 \leq r < p < n$. Para $k = 0, 1$, sejam

$$A_k^{n-p} = \{y_1 < \dots < y_{n-p} : \{i \in I : y_{n-p} < i \ \& \ \{y_1, \dots, y_{n-p}, i\} \in A_k^{n-p+1}\} \in U\}.$$

Mostremos que $[I]^{n-p} \subseteq A_0^{n-p} \cup A_1^{n-p}$. Suponha que $\{y_1, \dots, y_{n-p}\} \notin A_0^{n-p}$. Então $\{i \in I : y_{n-p} < i \ \& \ \{y_1, \dots, y_{n-p}, i\} \in A_0^{n-p+1}\} \notin U$. Como U é ultrafiltro e $[I]^{n-p+1} \subseteq A_0^{n-p+1} \cup A_1^{n-p+1}$, $\{i \in I : i \leq y_{n-p} \ \text{ou} \ \{y_1, \dots, y_{n-p}, i\} \in A_1^{n-p+1}\} \in U$. Como U é não principal, $\{i \in I : y_{n-p} < i \ \& \ \{y_1, \dots, y_{n-p}, i\} \in A_1^{n-p+1}\} \in U$, ou seja, $\{y_1, \dots, y_{n-p}\} \in A_1^{n-p}$, como queríamos.

Desse modo chegamos ao caso $p = n - 1$, que é $I \subseteq A_0^1 \cup A_1^1$. Temos que para algum $k = 0, 1$, $A_k^1 \in U$, pois U é um ultrafiltro.

Seja $j_0 \in A_k^1$ um elemento qualquer. Suponhamos escolhidos $j_0 < j_1 < \dots < j_m$, tais que

(*) para todo r , $1 \leq r \leq \min\{m+1, n\}$, e todos $y_1 < \dots < y_r$ escolhidos em $\{j_0, \dots, j_m\}$, temos que $\{y_1, \dots, y_r\} \in A_k^r$.

Definiremos o elemento j_{m+1} da seguinte maneira: dados $r < n$ e $y_1 < \dots < y_r$ escolhidos em $\{j_0, \dots, j_m\}$, consideremos o conjunto $X_{y_1 \dots y_r} = \{i \in I : y_r < i \text{ e } \{y_1, \dots, y_r, i\} \in A_k^{r+1} \in U\}$. Existe uma quantidade finita de tais conjuntos e, portanto, sua intersecção X está no ultrafiltro U . Como U é não principal, X é infinito e podemos escolher $j_{m+1} \in X$, tal que $j_{m+1} > j_m$. Pela construção desse elemento, temos que $j_0 < j_1 < \dots < j_{m+1}$ também satisfaz a condição (*) acima. \square

Seja A uma L -estrutura, $X \subset A$ e suponha que $(X, <)$ seja uma ordem linear, sendo que a relação de ordem de X não precisa fazer parte da assinatura de A . Dizemos que X (com a ordem subentendida) é seqüência indiscernível em A se para todo $n \geq 1$ e toda fórmula $\phi(x_1, \dots, x_n)$, cujas variáveis livres sejam as listadas, e todos $x_1 < \dots < x_n$ e $y_1 < \dots < y_n$ em X , $A \models \phi(x_1, \dots, x_n)$ se, e somente se, $A \models \phi(y_1, \dots, y_n)$.

O próximo resultado é ferramenta para a construção de modelos contendo seqüências de indiscerníveis.

Lema 3.1 Sejam L uma assinatura, $C = \{c_n : n \in \omega\}$ novos símbolos de constantes e T uma L -teoria que tenha modelos infinitos. Então o conjunto de $L(C)$ -sentenças $T' = T \cup \{c_i \neq c_j : i < j < \omega\} \cup \{\phi(c_{i_1}, \dots, c_{i_n}) \leftrightarrow \phi(c_{j_1}, \dots, c_{j_n}) : \phi(x_1, \dots, x_n) \text{ é } L\text{-fórmula, } n < \omega, i_1 < \dots < i_n \text{ e } j_1 < \dots < j_n\}$ é consistente.

Demonstração: Seja $A \models T$ infinito e $I = \{i_n : n < \omega\} \subset A$ um subconjunto qualquer, com a ordem induzida da enumeração.

Afirmação: Dado um conjunto finito $\Delta \subset T'$, existe um subconjunto infinito $J_\Delta \subseteq I$, tal que para cada subconjunto infinito $j_0 < j_1 < \dots$ de J_Δ , $(A, j_n)_{n \in \omega} \models \Delta$.

Esta afirmação implica a consistência de T , pelo Teorema da Compacidade.

Provaremos a afirmação por indução no número de sentenças da forma $\phi(c_{i_1}, \dots, c_{i_n}) \leftrightarrow \phi(c_{j_1}, \dots, c_{j_n})$ que estiverem contidas em Δ . O caso inicial é imediato da hipótese de que T tem modelos infinitos. Suponha agora dado um conjunto finito Δ e conjunto J_Δ que satisfaça a afirmação. Seja $\phi(x_1, \dots, x_m)$ uma L -fórmula. Sejam

$$A_0 = \{a_1 < \dots < a_m : a_i \in J_\Delta \text{ e } A \models \phi(\bar{a})\},$$

$$A_1 = \{a_1 < \dots < a_m : a_i \in J_\Delta \text{ e } A \models \neg\phi(\bar{a})\}.$$

Então temos que $[J_\Delta]^m \subseteq A_0 \cup A_1$. Pelo Teorema 3.1 (de Ramsey) existe um subconjunto infinito $K \subseteq J_\Delta$, tal que $[K]^m \subset A_0$ ou $[K]^m \subset A_1$. Seja $k_0 < k_1 < \dots$ um subconjunto infinito de K . Certamente que $(A, k_i)_{i < \omega}$ satisfaz todas as fórmulas de Δ e também a sentença $\phi(c_{i_1}, \dots, c_{i_n}) \leftrightarrow \phi(c_{j_1}, \dots, c_{j_n})$, como queríamos. \square

Teorema 3.2 Seja T uma L -teoria que tenha modelos infinitos e $(X, <)$ um conjunto linearmente ordenado. Então existe um modelos $A \models T$ contendo X como seqüência de indiscerníveis.

Demonstração: Considere o seguinte conjunto de $L(X)$ -sentenças $T' = T \cup \{c_x \neq c_y : x, y \in X, x < y\} \cup \{\phi(c_{x_1}, \dots, c_{x_n}) \leftrightarrow \phi(c_{y_1}, \dots, c_{y_n}) : \phi(x_1, \dots, x_n) \text{ é } L\text{-fórmula, } n < \omega, i_1 < \dots < i_n \text{ e } j_1 < \dots < j_n\}$. Por compacidade e pelo lema acima, T tem modelo A contendo X como seqüência de indiscerníveis. \square

Sejam $A \models T$, $X \subset A$ uma seqüência de indiscerníveis e suponhamos que T tenha funções de Skolem internas. Já vimos que $\mathcal{H}(X)$ (a envoltória de Skolem de X) é subestrutura elementar de A . Diremos que $\mathcal{H}(X)$ é o modelo gerado pelo conjunto de indiscerníveis X . Estudaremos algumas de suas propriedades a seguir.

Teorema 3.3 Seja $X = (X, <)$ um conjunto de indiscerníveis num modelo $A \models T$, sendo que T tenha funções de Skolem internas.

1. Se $Y \subseteq X$, então com a ordem induzida, Y é conjunto de indiscerníveis em $\mathcal{H}(Y)$ e $\mathcal{H}(Y) \preceq \mathcal{H}(X)$.
2. Suponham que $(X, <)$ e $(Y, <)$ sejam ordens lineares infinitas. Então existe uma estrutura B tendo Y como seqüência— de indiscerníveis e tal que o conjunto de fórmulas satisfeitas por seqüências crescentes de elementos de X em A é o mesmo que o o conjunto de fórmulas satisfeitas por seqüências crescentes de elementos de Y em B .
3. Seja B estrutura contendo a ordem linear Y como seqüência de indiscerníveis e suponha que o conjunto de fórmulas satisfeitas por seqüências

crescentes de elementos de X em A é o mesmo que o o conjunto de fórmulas satisfeitas por seqüências crescentes de elementos de Y em B . Suponha que existe uma inclusão crescente $f : X \rightarrow Y$. Então f pode ser estendida a uma inclusão elementar $\bar{f} : \mathcal{H}(X) \rightarrow \mathcal{H}(Y)$, cuja imagem é $\mathcal{H}(\text{im}(f))$.

4. Seja $f : (X, <) \rightarrow (X, <)$ um automorfismo (bijeção crescente). Então f pode ser estendida a um automorfismo da estrutura $\mathcal{H}(X)$.
5. Seja B estrutura contendo a ordem linear Y como seqüência de indiscerníveis e suponha que o conjunto de fórmulas satisfeitas por seqüências crescentes de elementos de X em A é o mesmo que o o conjunto de fórmulas satisfeitas por seqüências crescentes de elementos de Y em B . Suponha também que X e Y sejam infinitos. Então, dado um n -tipo de L $\Gamma(v_1, \dots, v_n)$, $\mathcal{H}(X)$ realiza Γ se, e somente se, $\mathcal{H}(Y)$ realizá-lo também.

Demonstração:

(1) Basta observarmos que se $Y \subseteq X$ e X é seqüência de indiscerníveis em A , então Y também o será, por definição.

(2) Um argumento direto de compacidade.

(3) Este é o único item realmente trabalhoso para se demonstrar. Sabemos que cada elemento $z \in \mathcal{H}(X)$ é da forma $t(x_1, \dots, x_n)$, sendo t um termo. Renomeando variáveis, etc, podemos supor que $x_1 < \dots < x_n$ em X . Assim, definimos $\bar{f}(z) = t(f(x_1), \dots, f(x_n))$. Se tivéssemos também a representação $z = t'(x'_1, \dots, x'_m)$, para outro termo t' e outra seqüência $x'_1 < \dots < x'_m$ em X , seja $u_1 < \dots < u_k$ a listagem em ordem crescente do conjunto $\{x_1, \dots, x_n\} \cup \{x'_1, \dots, x'_m\}$. A igualdade $t(x_1, \dots, x_n) = t'(x'_1, \dots, x'_m)$ pode ser expressa por uma fórmula em termos de u_1, \dots, u_k . Pela hipótese sobre o modelo B , obtemos que $t(f(x_1), \dots, f(x_n)) = t'(f(x'_1), \dots, f(x'_m))$ em B , provando que \bar{f} está bem definida.

Esta aplicação $\bar{f} : \mathcal{H}(X) \rightarrow \mathcal{H}(Y)$ é elementar, pois se $\phi(v_1, \dots, v_n)$ é uma L -fórmula e $x_1 < \dots < x_n$ é uma seqüência de elementos de X , então $\mathcal{H}(X) \models \phi(\bar{x})$ se, e somente se, $A \models \phi(\bar{x})$ (pois $\mathcal{H}(X) \prec A$), se e somente se, pela hipótese sobre B , $B \models \phi(f(x_1), \dots, f(x_n))$, se, e somente se, $\mathcal{H}(Y) \models \phi(f(x_1), \dots, f(x_n))$.

Por fim, é claro que a imagem de $\mathcal{H}(X)$ pela aplicação \bar{f} é a subestrutura $\mathcal{H}(\text{im}(f))$.

(4) Segue imediatamente de (3).

(5) Se $\mathcal{H}(X)$ realiza o tipo $\Gamma(v_1, \dots, v_n)$ com a n -upla $(t_1(x_1, \dots, x_m), \dots, t_n(x_1, \dots, x_m))$, então a subestrutura elementar $\mathcal{H}(\{x_1, \dots, x_m\})$ também o faz. Daí, basta aplicar o item (3), com qualquer inclusão $f : \{x_1, \dots, x_m\} \rightarrow Y$ estritamente crescente. \square

Como uma primeira consequência deste teorema, temos o seguinte resultado.

Teorema 3.4 Suponha que $|L| \leq \omega$ e que T seja uma L -teoria possuindo modelos infinitos. Então existe uma coleção enumerável Δ de tipos de L , tal que T tem modelos arbitrariamente grandes que realizam somente os tipos em Δ .

Demonstração: Expandimos L a \bar{L} com funções de Skolem internas e estendemos T a uma \bar{L} -teoria \bar{T} com funções de Skolem internas. Como $|\bar{L}| = \omega$, temos que $|\bar{T}| = \omega$ e podemos construir um modelo infinito de \bar{T} contendo um conjunto enumerável X como seqüência de indiscerníveis. Como $\mathcal{H}(X)$ é enumerável, realiza somente uma quantidade enumerável de tipos de L . Qualquer conjunto ordenado Y , tal que as seqüências crescentes finitas de Y satisfazem as mesmas fórmulas que as seqüências crescentes e finitas de X gera um modelo $\mathcal{H}(Y) \equiv \mathcal{H}(X)$, que, portanto, realiza exatamente os mesmos tipos que $\mathcal{H}(X)$. \square

Teorema 3.5 Toda estrutura infinita tem extensões elementares com grupos de automorfismos arbitrariamente grandes.

Demonstração: Basta começarmos com uma L -estrutura infinita A , expandirmos L a uma assinatura \bar{L} , tal que a teoria de A tenha funções de Skolem internas. Se T for o diagrama elementar da expansão de A à assinatura \bar{L} , então T terá funções de Skolem internas. Seja X um conjunto de indiscerníveis e $\mathcal{H}(X)$ a envoltória de Skolem de X em alguma extensão elementar, grande o suficiente, de A . Como os automorfismos de X geram automorfismos de $\mathcal{H}(X)$, basta começarmos com uma ordem linear X com automorfismos em quantidade suficiente para nossos propósitos. \square

Uma última aplicação está relacionada à teoria da Estabilidade. Diremos que uma L -teoria completa T que tenha modelos infinitos é estável se não existir um modelo $A \models T$ com um subconjunto infinito $I = \{\bar{a}_i : i < \omega\}$ de n -uplas de A e uma fórmula $\phi(\bar{x}, \bar{y})$ que defina uma ordem linear em I .

Teorema 3.6 Se T for estável e tiver modelos infinitos, então todo conjunto infinito indiscernível em modelos de T é totalmente indiscernível (ou seja, se $A \models T$ contém o conjunto infinito X de indiscerníveis, então, para toda fórmula $\phi(v_1, \dots, v_n)$, todos $x_1, \dots, x_n \in X$ distintos e toda permutação $\sigma : \{1, \dots, n\} \rightarrow \{1, \dots, n\}$, $A \models \phi(x_1, \dots, x_n)$ se, e somente se, $A \models \phi(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(n)})$).

Demonstração: Seja $X = \{a_n : n \in \omega\}$ enumerado em ordem crescente.

Primeiramente mostraremos que, dados $n > 0$, $1 \leq k < n$ e $\phi(v_1, \dots, v_n)$, então

$$A \models \phi(a_1, \dots, a_{k-1}, a_k, a_{k+1}, \dots, a_n) \Leftrightarrow A \models \phi(a_1, \dots, a_{k-1}, a_{k+1}, a_k, \dots, a_n).$$

Como todas as transposições (permutações que apenas trocam de lugar dois elementos) geram todo o grupo de permutações de um conjunto de n elementos, concluiremos o teorema.

Suponha que tal não ocorra. Trocando ϕ por $\neg\phi$, se necessário, podemos supor que

$$A \models \phi(a_1, \dots, a_{k-1}, a_k, a_{k+1}, \dots, a_n) \wedge \neg\phi(a_1, \dots, a_{k-1}, a_{k+1}, a_k, \dots, a_n).$$

Seja $B \succ A$ contendo uma extensão final $Y = \{a_\eta : \eta < \omega + \omega\}$ de X . Sejam $\bar{a} = (a_1, \dots, a_{k-1})$ e $\bar{b} = (a_{\omega+1}, \dots, a_{\omega+n-k-1})$ (ou $\bar{b} = \emptyset$, se $k = n - 1$). pela indiscernibilidade de Y , se $k \leq i < j < \omega$, temos que $A \models \phi(\bar{a}, a_i, a_j, \bar{b}) \wedge \neg\phi(\bar{a}, a_j, a_i, \bar{b})$. Ou seja, ϕ define uma ordem infinita em B , contradizendo a hipótese da estabilidade de T . \square

4 Exercícios

Exercício 4.1 Prove as seguintes asserções:

1. Toda L -estrutura A admite uma expansão de Skolem A^* .
2. Se T é uma L -teoria consistente, então sua skolemização T^* também é consistente.
3. Sejam A e B duas L -estruturas, B^* uma expansão de Skolem de B e A' uma expansão qualquer de A na assinatura L^* . Se A^* for subestrutura de B , então $A \prec B$.
4. Sejam A uma L -estrutura, $X \subset A$ e A^* uma expansão de Skolem de A . Mostre que $\mathcal{H}(X) \preceq A$, e que $|\mathcal{H}(X)| \leq |X| + |L| + \omega$.
5. Se a L -teoria T tem funções de Skolem internas, então ela é modelo completa.
6. Dada uma L -teoria T , existe uma assinatura $\bar{L} \supset L$ e uma extensão de T a uma \bar{L} -teoria \bar{T} que tem funções de Skolem internas. Todo modelo $A \models T$ pode ser expandido a um modelo de \bar{T} .

Exercício 4.2 Mostre que $(\mathbb{Q}, <)$ tem 2^{\aleph_0} automorfismos. [Sugestão: pense em $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ e, para cada par de irracionais $x < y$ em \mathbb{R} , uma transformação que leva o corte determinado por x naquele determinado por y .]

Exercício 4.3 Mostre que a estrutura $(\omega, <)$ admite duas expansões de Skolem não sejam elementarmente equivalentes como L^* -estruturas.

Exercício 4.4 Seja X um conjunto de indiscerníveis em $\mathcal{H}(X)$. Mostre que existe um homomorfismo injetor do grupo de todos os automorfismos de $(X, <)$ no de $\mathcal{H}(X)$. Mostre que, se $<$ fizer parte da assinatura L , então esse homomorfismo também será sobrejetor.

Índice Remissivo

expansão de Skolem, 1

função de Skolem, 1
 interna, 3

indiscernível
 seqüência, 5

modelo completa, 3

Ramsey
 teorema, 4

seqüência
 indiscernível, 5

Skolem
 envoltória, 2
 expansão, 1
 função, 1
 interna, 3
 teoria, 2
skolemização, 2

teorema
 Ramsey, 4

teoria
 modelo completa, 3