Prova 2 de MAT0105, IME-USP

Aluno(a): Test System

Início da prova:

Instruções:

— Justifique suas afirmações. Respostas sem justificativa não serão consideradas.

— Escreva o nome e NUSP em todas as folhas. A prova pode ser escrita só pela caneta.

— É proibido consultar qualquer material pelo Internet, celular, ou pedir ajuda das outras pessoas. Pode usar apenas suas anotações.

Questões da Prova

Q1) [*1,0 ponto*]

Ache a equação vetorial da reta que passa pelo ponto $A = (-1, 0, -1)$ e é paralela aos planos

$$\pi_1 : 3x - y + 4z = -1, \quad \pi_2 : x - 6z = 1.$$

Q2) [*2 pontos*] Ache a posição relativa das retas r_1 e r_2 em funçao de parámetro m, onde

$$r_1 : \begin{cases} mx + 2y - 4z = -1 \\ 2y + 3z = -1 \end{cases} \quad \text{e} \quad r_2 : \begin{cases} 6x + 3z = 0 \\ 3x + 2y - 4z = 1 \end{cases}.$$

Q3) [*1,0 ponto*] Encontre a equação geral do plano que passa pelo ponto $P = (5, 0, -1)$ e é ortogonal à reta

$$r : \begin{cases} -3x + y + 2z = 3 \\ y - 5z = 1 \end{cases}.$$

Q4) [*3,5 pontos*] Dados 2 sistemas de coordenadas $\Sigma_1 = (O_1, E)$ e $\Sigma_2 = (O_2, F)$. A matriz de mudançã de F para E tem forma

$$M_{EF} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -1 \\ 0 & -4 & 2 \\ 3 & -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

a) Ache as coordenadas do ponto O_2 no sistema Σ_1 sabendo que $(3, 2, -1)_{\Sigma_1} = (1, -2, 0)_{\Sigma_2}$.

b) Ache a equação vetorial da reta $r : [X = (2, -1, 0) + t(2, -2, 0)]_{\Sigma_2}$ no sistema Σ_1.

c) Ache a equação geral do plano $\pi : [x - 3y + 4z = 1]_{\Sigma_1}$ no sistema Σ_2.

Q5) [*2,5 pontos*] Classifique a cônica:

a) $-3x^2 + 4x - 5y^2 + 8y + 1 = 0$;

b) $5x^2 - 13y^2 + 10xy - 9 = 0$.

Boa prova!

Gabaritos da P2

Q1. $\vec{n_1}=(3,-1,4)$, $\vec{n_2}=(1,0,-6)$ são vetores normais de π_1 e π_2 $\Rightarrow$ $\vec{v}=\vec{n_1}\times\vec{n_2}$ é vetor diretor de r.

$$\vec{v}=\det\begin{pmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 3 & -1 & 4\\ 1 & 0 & -6\end{pmatrix}=6\vec{i}-\vec{j}(-18-4)+\vec{k}=(6,22,1)$$

$$\Rightarrow r: \underline{\underline{X=(-1,0,-1)+t(6,22,1)}},\ t\in\mathbb{R}.$$

Q2 Procuremos vet-s diretores das r_1 e r_2:

$$\vec{v_1}=\det\begin{pmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ m & 2 & -4\\ 0 & 2 & 3\end{pmatrix}=14\vec{i}-3m\vec{j}+2m\vec{k}=(14,-3m,2m)$$

$$\vec{v_2}=\det\begin{pmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 6 & 0 & 3\\ 3 & 2 & -4\end{pmatrix}=-6\vec{i}-\vec{j}(-24-9)+12\vec{k}=(-6,33,12)$$

Procuremos $A_1\in r_1$ e $A_2\in r_2$:

A_1: seja $x=0$ $\Rightarrow \begin{cases}2y-4z=-1\\ 2y+3z=-1\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}7z=0\\ 2y+3z=-1\end{cases} \Rightarrow$

$$\begin{cases}z=0\\ y=-\frac{1}{2}\end{cases} \Rightarrow \underline{A_1=(0,-\tfrac{1}{2},0)}$$

A_2: $z=0 \Rightarrow \begin{cases}6x=0\\ 3x+2y=1\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x=0\\ y=\frac{1}{2}\end{cases} \Rightarrow A_2=(0,\frac{1}{2},0)$

Lembre que r_1 e r_2 são reversas <u>sse</u>

$(\vec{v_1}\times\vec{v_2})\cdot\overrightarrow{A_1A_2}\neq 0$ ou seja

$$(\vec{v_1}\times\vec{v_2})\cdot\vec{A_1A_2} = \det\begin{pmatrix}14 & -3m & 2m\\ -6 & 33 & 12\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix} = -14\cdot 12-12m = -12(14+m)\neq 0$$

$\vec{A_1A_2} \to$ $(0 \quad 1 \quad 0)$

$\Rightarrow$ para $m \neq -14$ r_1 e r_2 são reversas.

Seja $m=-14 \Rightarrow \vec{v_1} = 14(1,-3,2) \neq \lambda(-6,33,12) = \lambda\vec{v_2}$

$\Rightarrow \vec{v_1} \nparallel \vec{v_2} \Rightarrow \vec{v_1}$ e $\vec{v_2}$ são concorrentes.

Q3 Observe que o vetor diretor $\vec{v}$ da r é vetor normal do plano π. Temos $\vec{v}=\vec{n}=\det\begin{pmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ -3 & 1 & 2\\ 0 & 1 & -5\end{pmatrix} =$

$= -7\vec{i}-15\vec{j}-3\vec{k} = (-7,-15,-3) \Rightarrow$

$\pi: -7x-15y-3z=d$. Já que $P=(5,0,-1)\in\pi$, obtemos

$-7\cdot 5-15\cdot 0-3(-1) = -15+3 = -12 = d \Rightarrow$

$\pi: -7x-15y-3z=-12$ ou $7x+15y+3z=12$.

Q4 Temos $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}_{\Sigma_1} = (O_2)_{\Sigma_1} + M_{EF}\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix}_{\Sigma_2} \Rightarrow$

a) $\begin{pmatrix}3\\2\\-1\end{pmatrix} = O_2 + \begin{pmatrix}4 & 0 & -1\\ 0 & -4 & 2\\ 3 & -2 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\-2\\0\end{pmatrix} = O_2 + \begin{pmatrix}4\\8\\7\end{pmatrix} \Rightarrow$

$O_2 = \begin{pmatrix}-1\\-6\\-8\end{pmatrix}$

b) Temos $\begin{cases}x = -1+4x'-z'\\ y=-6-4y'+2z'\\ z=-8+3x'-2y'\end{cases}$ e $r: \begin{cases}x'=2+2t\\ y'=-1-2t\\ z'=0\end{cases} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \quad \begin{aligned} x &= -1 + 4(2+2t) \\ y &= -6 - 4(-1-2t) \\ z &= -8 + 3(2+2t) - 2(-1-2t) \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x = 7 + 8t \\ y = -2 + 8t \\ z = 10t \end{cases} \Rightarrow$$

$$r: \underline{\underline{[X = (7,-2,0) + t(8,8,10)]}}_{\Sigma_1}$$

c) $\pi: [x - 3y + 4z = 1]_{\Sigma_1} \Rightarrow$

$$-1 + 4x' - z' - 3(-6 - 4y' + 2z') + 4(-8 + 3x' - 2y') =$$

$$= 16x' + 4y' - 7z' - 15 = -1 \Rightarrow$$

$$\underline{\underline{[16x' + 4y' - 7z' = 14]}}_{\Sigma_2}$$

Q5 a) $-3x^2 + 4x - 5y^2 + 8y + 1 = -3\left(x^2 + \frac{4}{3}x\right) - 5\left(y^2 - \frac{8}{5}y\right) + 1$

$$= -3\left(x^2 + 2\cdot\frac{2}{3}x + \frac{4}{9} - \frac{4}{9}\right) - 5\left(y^2 - 2\cdot\frac{4}{5}y + \frac{16}{25} - \frac{16}{25}\right) + 1 =$$

$$= -3\left(x + \frac{2}{3}\right)^2 - 5\left(y - \frac{4}{5}\right)^2 + \frac{4}{3} + \frac{16}{5} + 1 = 0$$

$$\Rightarrow \quad 3\left(x + \frac{2}{3}\right)^2 + 5\left(y - \frac{4}{5}\right)^2 = \frac{83}{15} \Rightarrow$$

$$\frac{\left(x + \frac{2}{3}\right)^2}{\frac{1}{3}\cdot\frac{83}{15}} + \frac{\left(y - \frac{4}{5}\right)^2}{\frac{1}{5}\cdot\frac{83}{15}} = 1$$ é uma elipse!

b) $5x^2 - 13y^2 + 10xy - 9 = 0$. Temos: $a = 5, b = 10, c = -13$

Tiraremos termo xy fazendo rotação do sistema Oxy por angulo θ, onde $\operatorname{ctg} 2\theta = \frac{a-c}{b} = \frac{5+13}{10} = \frac{9}{5} \Rightarrow$

Os coeficientes a' e c' dos termos quadraticos novos são

$$\begin{cases} a' + c' = a + c = -8 \\ a' - c' = \frac{b}{\operatorname{sen} 2\theta} = \frac{10}{\sqrt{1 + \frac{81}{25}}} = \frac{50}{\sqrt{106}} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a' = -4 + \frac{25}{\sqrt{106}} < 0 \\ c' = -4 - \frac{25}{\sqrt{106}} < 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow$

$$\left(-4+\frac{25}{\sqrt{106}}\right)(x')^2+\left(-4-\frac{25}{\sqrt{106}}\right)(y')^2=9 \Rightarrow$$

$$\underset{\substack{\vee\\ 0}}{\left(4-\frac{25}{\sqrt{106}}\right)}(x')^2+\underset{\substack{\vee\\ 0}}{\left(4+\frac{25}{\sqrt{106}}\right)}(y')^2=\underset{\substack{\wedge\\ 0}}{-9} \Rightarrow$$

cônica é conjunto vasio !