Prova Sub de MAT0105, IME-USP

Aluno(a): Test System

Início da prova:

Instruções:

— Justifique suas afirmações. Respostas sem justificativa não serão consideradas.

— Escreva o nome e NUSP em todas as folhas. A prova pode ser escrita só pela caneta.

— É proibido consultar qualquer material pelo Internet, celular, ou pedir ajuda das outras pessoas. Pode usar apenas suas anotações.

Questões da Prova

Q1) [*2,5 ponto*]

Dada uma pirâmide $OABCD$ regular de vertice O e a base quadrada $ABCD$. Seja M um ponto do segmento AC tal que $9\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{MC}$.

a) Ache as coordenadas do vetor $\overrightarrow{OM}$ no sistema $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AO})$.

b) Seja N o ponto médio do lado AO. Ache as coordenadas do ponto N no sistema $(M, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AO})$.

Q2) [*2 pontos*] Dados os pontos $A = (3, -2)_{\Sigma_1}$, e $B = (4, 0)_{\Sigma_1}$ no sistema $\Sigma_1 = (O, E)$. O sistema $\Sigma_2 = (O, F)$ foi obtido pela rotação do sistema Σ_1 por ângulo de $\pi/3$ radianos no sentido anti-horário. Ache as coordenadas dos pontos A e B no sistema Σ_2. Dado o ponto $C = (0, 2)_{\Sigma_2}$, ache as coordenadas do ponto C no sistema Σ_1.

Q3) [*1,5 ponto*] Ache a equação geral do plano que contém as retas

$$r_1 : \ \frac{x-1}{3} = \frac{y}{4} = \frac{z}{4}, \quad r_2 : \begin{cases} x + y - 2z = 1 \\ y + 3z = 0 \end{cases} .$$

Q4) [*2 pontos*] Classifique a cônica. Ache o centro, semi-eixos (se tiver) e faça desenho.

$$-3x^2 - 8x + 2y^2 + 12y - 6 = 0.$$

Q5) [*2 pontos*] Dados 2 pontos $A = (1, -1, 0)$ e $B = (1, 3, 0)$ num sistema de coordenadas cartesiano. Ache um ponto C pertencente à reta

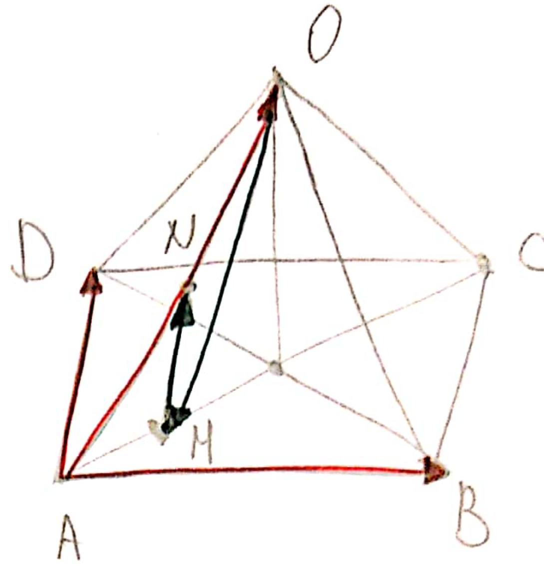
$$r : \ X = (1, 1, 1) + t(3, 2, 0),$$

tal que a área do triângulo ABC seja 2.

Boa prova!

Gabarito PSub

Q1



a) $\vec{OM} = \vec{AM} - \vec{AO} =$

$= \frac{1}{10}\vec{AC} - \vec{AO} = \frac{1}{10}(\vec{AB} + \vec{AD}) -$

$- \vec{AO} \Rightarrow \vec{OM} = \left(\frac{1}{10}, \frac{1}{10}, -1\right)$

na base $(\vec{AB}, \vec{AD}, \vec{AO})$

b) $\vec{MN} = \vec{AN} - \vec{AM} = \frac{1}{2}\vec{AO} - \frac{1}{10}\vec{AC} = -\frac{1}{10}(\vec{AB} + \vec{AD}) + \frac{1}{2}\vec{AO}$

$\Rightarrow \vec{MN} = \left(-\frac{1}{10}, -\frac{1}{10}, \frac{1}{2}\right) \Rightarrow N = \left(-\frac{1}{10}, -\frac{1}{10}, \frac{1}{2}\right)$ no

sistema $(M, \vec{AB}, \vec{AD}, \vec{AO})$.

Q2

A matriz de mudança $M_{EF} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix} =$

$= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}_{\Sigma_1} = M_{EF} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}_{\Sigma_2}$

Temos $C_{\Sigma_1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}_{\Sigma_2} = \begin{pmatrix} -\sqrt{3} \\ 1 \end{pmatrix}_{\Sigma_1}$

Observe que $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}_{\Sigma_2} = M_{EF}^T \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}_{\Sigma_1} \Rightarrow$

(2)

$$A_{\Sigma_2} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}_{\Sigma_1} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} - \sqrt{3} \\ -\frac{3\sqrt{3}}{2} + 1 \end{pmatrix}_{\Sigma_2}.$$

$$B_{\Sigma_2} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix}_{\Sigma_1} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2\sqrt{3} \end{pmatrix}_{\Sigma_2}$$

Q3 Vetores diretores das r_1 e r_2 são:

$$\vec{v_1} = (3,4,4), \quad \vec{v_2} = \det \begin{pmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} = (5,-3,1)$$

$\Rightarrow$ vetor normal do plano é:

$$\vec{n} = \vec{v_1} \times \vec{v_2} = \det \begin{pmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & 4 & 4 \\ 5 & -3 & 1 \end{pmatrix} = (16, 17, -29) \Rightarrow$$

$\pi: 16x + 17y - 29z = d$. Observe que $(1,0,0) \in r_1$

$\Rightarrow (1,0,0) \in \pi \Rightarrow 16 \cdot 1 + 17 \cdot 0 - 29 \cdot 0 = 16 = d \Rightarrow$

$\pi: 16x + 17y - 29z = 16$

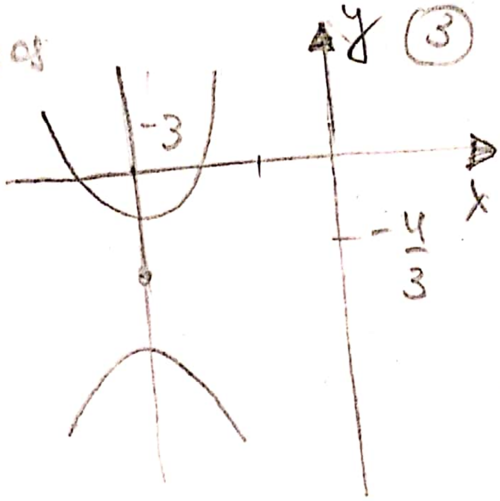
Q4 $-3x^2 - 8x + 2y^2 + 12y - 6 = -3(x^2 + \frac{8}{3}x) + 2(y^2 + 6y) - 6$

$= -3(x^2 + 2 \cdot \frac{4}{3}x + \frac{16}{9} - \frac{16}{9}) + 2(y^2 + 2 \cdot 3y + 9 - 9) - 6 =$

$= -3(x + \frac{4}{3})^2 + 2(y+3)^2 + \frac{16}{3} - 18 - 6 = 0 \Rightarrow$

$$\frac{(y+3)^2}{\frac{56}{6}} - \frac{(x+\frac{4}{3})^2}{\frac{56}{9}} = 1 \Rightarrow \text{é uma hipérbole}$$

De centro $(-3, -\frac{4}{3})$ e os semi-eixos



(3)

$a = \sqrt{\frac{56}{6}}$, $b = \frac{\sqrt{56}}{3}$

Q5 Temos $\vec{AB} = (0, 4, 0)$ e

$C = (1 + 3t_0, 1 + 2t_0, 1) \Rightarrow \vec{AC} = (3t_0, 2 + 2t_0, 1)$

Observe que $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} \| \vec{AB} \times \vec{BC} \| = 5 \Rightarrow$

$\| \vec{AB} \times \vec{BC} \| = 10.$

$$\vec{AB} \times \vec{AC} = \det \begin{pmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 4 & 0 \\ 3t_0 & 2+2t_0 & 1 \end{pmatrix} = (4, 0, -12t_0)$$

$\Rightarrow \| \vec{AB} \times \vec{AC} \|^2 = 16 + 144 t_0^2 = 100 \Rightarrow$

$144 t_0^2 = 84 \Rightarrow 38 t^2 = 21 \Rightarrow t = \pm \sqrt{\frac{21}{38}}$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} C = \left(1 + 3\sqrt{\frac{21}{38}}, 1 + 2\sqrt{\frac{21}{38}}, 1\right) \\ C = \left(1 - 3\sqrt{\frac{21}{38}}, 1 - 2\sqrt{\frac{21}{38}}, 1\right) \end{array} \right.$$