Extensões autoadjuntas de operadores simétricos

Luis Antonio F. Alvarez

23 de junho de 2020

Objetivos

- Apresentar a teoria de extensão de von Neumann para se estender um operador simétrico densamente definido num espaço de Hilbert a um operador autoadjunto.
  - Transforma o problema de extensão num problema equivalente, “mais simples”, de se estender um operador isométrico a um operador unitário.
  - Caracteriza quando um operador tem extensão, e, se sim, quantas.
  - Expressão para todas as extensões autoadjuntas.

Notação

- $\mathcal{H}$: espaço de Hilbert complexo.
- $\mathcal{A} \oplus \mathcal{B}$: soma ortogonal entre subespaços de $\mathcal{H}$.
- $\mathcal{A} \dotplus \mathcal{B}$: soma direta.
- se $T : \mathcal{D}(\mathcal{H}) \mapsto \mathcal{H}$ é injetor, denotamos por T^{-1} a inversa de $\tilde{T} : \mathcal{D}(\mathcal{H}) \mapsto \mathcal{R}(T)$, $\tilde{T}x = Tx$.
  - nesse caso, num abuso de notação, dizemos que T é invertível.
- dim: dimensão **de Hilbert** de um (sub)espaço de Hilbert.
- $\mathbb{T} \coloneqq \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| = 1\}$.

Plano

1. Preliminares
   - Operadores simétricos, autoadjuntos, isométricos, unitários e fecháveis.
   - Pontos regulares e propriedades dos índices de deficiência
2. Transformada de Cayley e Teorema de von Neumann

Operadores simétricos e autoadjuntos

- Recorde-se que um operador linear $T : \mathcal{D}(T) \mapsto \mathcal{H}$ é dito simétrico se:

$$\langle Tx, y \rangle = \langle y, Tx \rangle \quad \forall x, y \in \mathcal{D}(T). \tag{1}$$

- Para um operador $S : \mathcal{D}(S) \mapsto \mathcal{H}$ densamente definido, definimos o operador adjunto como sendo o operador $S^* : \mathcal{D}(S^*) \mapsto \mathcal{H}$, onde:

$$\mathcal{D}(\mathcal{H}^*) = \{y \in \mathcal{H} : \exists z \in \mathcal{H}, \langle Sx, y \rangle = \langle x, z \rangle \quad \forall x \in \mathcal{D}(H)\} \tag{2}$$

  e $S^* y = z$. Como visto em aula, S^* está bem-definido e $y \in \mathcal{D}(\mathcal{S}^*)$ sse $x \mapsto \langle Sx, y \rangle$ é contínuo.

- Se S é densamente definido, S é simétrico sse $S \subseteq S^*$. S é dito **autoadjunto** se $S = S^*$.

Operadores simétricos e autoadjuntos: fato útil

Fato (1.1)

Seja $T : \mathcal{D}(T) \mapsto \mathcal{H}$ um operador simétrico. Se existe $\lambda \in \mathbb{C}$ tal que $\mathcal{R}(T - \lambda I) = \mathcal{H}$ e $\mathcal{R}(T - \bar{\lambda} I)$ é denso em $\mathcal{H}$, então T é autoadjunto. Além disso $\lambda, \bar{\lambda} \in \rho(T)$.

- Demonstração usa que subconjunto $M \subseteq \mathcal{H}$ é denso em $\mathcal{H}$ sse $M^{\perp} = \{0\}$; e relação, para operador S densamente definido, $\mathcal{R}(S)^{\perp} = \mathcal{N}(S^{*})$.

Operadores isométricos e unitários

- Um operador $V : \mathcal{D}(V) \mapsto \mathcal{H}$ é dito isométrico se:

$$\|Vx\| = \|x\| \quad \forall x \in \mathcal{D}(V) \tag{3}$$

- Da identidade de polarização, obtemos que:

$$\langle Vx, Vy\rangle = \langle x, y\rangle. \tag{4}$$

- Um operador é dito **unitário** se $\mathcal{D}(V) = \mathcal{R}(V) = \mathcal{H}$ e $V^* = V^{-1}$.

Fato (1.2)

Seja $V : \mathcal{D}(\mathcal{V}) \mapsto \mathcal{H}$ um operador linear. Se V é unitário, então V é isométrico. Por outro lado, se V é isométrico e $\mathcal{D}(V) = \mathcal{R}(V) = \mathcal{H}$, então V é unitário.

Operadores fecháveis

- Um operador $T : \mathcal{D}(\mathcal{H}) \mapsto \mathcal{H}$ é dito fechável se admite uma extensão fechada, i.e. existe C operador linear fechado, $T \subseteq C$.

Lema (1.3)

Um operador $A : \mathcal{D}(A) \mapsto \mathcal{H}$ é fechável se, e somente se, $(0, y) \in \overline{\mathcal{G}(A)}$ implica que $y = 0$.

Demonstração.

" $\implies$ " se C é extensão fechada de A, então $\overline{\mathcal{G}(A)} \subseteq \mathcal{G}(C)$ e temos que $(0, y) \in \overline{\mathcal{G}(A)} \implies (0, y) \in \mathcal{G}(C) \implies y = C0 = 0$.

" $\impliedby$ " defina $\mathcal{D} := \{x \in \mathcal{H} : \exists y_x, (x, y_x) \in \overline{\mathcal{G}(A)}\}$ e o operador $C : \mathcal{D} \mapsto \mathcal{H}$ como $Cx = y_x$. C está bem-definido e $\mathcal{G}(C) = \overline{\mathcal{G}(A)}$. $\square$

Operadores fecháveis: extensão minimal fechada

- O operador C construído na direção " $\Longleftarrow$ " do teorema anterior é conhecido como extensão minimal fechada de um operador fechável A, e é denotado por $\bar{A}$.

Lema (1.4)

Seja $T : \mathcal{D}(T) \mapsto \mathcal{H}$ *um operador linear. Então:*

1. *se* T *é isométrico,* T *é fechável;*
2. *se* T *é densamente definido,* T^* *é fechado (e, em particular, se* T *é autoadjunto,* T *é fechado);*
3. *se* T *é densamente definido, então* T *é fechável se, e somente se,* $\mathcal{D}(T^*)$ *é denso em* $\mathcal{H}$*. Nesse caso,* $(\bar{T})^* = T^*$ *e* $\bar{T} = T^{**}$*, onde* $T^{**} := (T^*)^*$*; e*
4. *se* T *é simétrico e densamente definido,* T *é fechável e* $\bar{T}$ *é simétrico.*

4 se T simétrico densamente definido, $T \subseteq T^*$. Como T^* é fechado, segue que T é fechável e $\bar{T} \subseteq T^*$. Que $\bar{T}$ é simétrico segue de (3).

Pontos regulares e índices de deficiência

Definição (1.5)

Um número complexo λ é dito ponto regular de um operador $T : \mathcal{D}(\mathcal{H}) \mapsto \mathcal{H}$ se existir um número $c_\lambda > 0$ tal que

$$\|(T - \lambda I)x\| \geq c_\lambda \|x\| \quad \forall x \in \mathcal{D}(\mathcal{H}) \tag{5}$$

- O conjunto de pontos regulares do operador T é denotado por $\pi(T)$.

Definição (1.6)

Seja $\lambda \in \pi(T)$. O subespaço $\mathcal{R}(T - \lambda I)^\perp$ é chamado de subespaço de deficiência de T em λ e sua dimensão de Hilbert $d_\lambda(T) := \dim \mathcal{R}(T - \lambda I)^\perp$ é chamada de número de deficiência de T em λ.

- O índice de deficiência acima está bem-definido, pois o complemento ortogonal de um conjunto é um subespaço fechado; logo uma base ortonormal sempre existirá.

Pontos regulares e índices de deficiência: propriedades

Proposição (1.7)

Seja $T : \mathcal{D}(\mathcal{H}) \mapsto \mathcal{H}$, e $\lambda \in \mathbb{C}$. Então temos:

1. $\lambda \in \pi(T)$ se, e somente se, $T - \lambda I$ tem uma inversa limitada definida em $\mathcal{R}(T - \lambda I)$. Nesse caso, c_λ em (5) pode ser tomado como $\|(T - \lambda I)^{-1}\|$. Em particular, disso segue que $\rho(T) \subseteq \pi(T)$.
2. $\pi(T)$ é aberto. Em particular, se $\lambda_0 \in \pi(T)$, então $\{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda - \lambda_0| < c_{\lambda_0}\} \subseteq \pi(T)$.

Proposição (1.8; Krasnosel'skii e Krein)

Seja $T : \mathcal{D}(\mathcal{H}) \mapsto \mathcal{H}$ um operador fechável. Então $d_\lambda(T)$ é constante em cada componente (conjunto maximal conectado) de $\pi(T)$.

Pontos regulares de operadores simétricos

Proposição (1.9)

Seja $T : \mathcal{D}(\mathcal{H}) \mapsto \mathcal{H}$ um operador simétrico, então:

1. $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R} \subseteq \pi(T)$.
2. Se T é densamente definido e $\lambda \in \pi(T)$, então $\mathcal{R}(T^* - \bar{\lambda} I) = \mathcal{H}$.

Demonstração.

1. Tome $\lambda = \alpha + \beta i$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ e note que:

$$\|(T - \lambda I)x\|^2 = \|(T - \alpha I)x\|^2 + \|\beta x\|^2 + i\beta\langle (T - \alpha)x, x\rangle - \\ -i\beta\langle x, (T - \alpha)x\rangle = \|(T - \alpha I)x\|^2 + \|\beta x\|^2 \geq |\beta|^2 \|x\|^2$$

2. Fixe $y \in \mathcal{H}$. Defina funcional linear F_y em $\mathcal{R}(T - \lambda I)$ por $F_y((T - \lambda I)x) = \langle x, y\rangle$. F_y limitado e bem-definido. Teo. de Riesz na extensão de F_y a fecho do domínio $\implies \exists w \in \overline{\mathcal{R}(T - \lambda I)}$, $\langle x, y\rangle = F_y((T - \lambda I)x) = \langle (T - \lambda I)x, w\rangle$ para todo $x \in \mathcal{D}(T - \lambda I)$. Disso concluímos que $w \in \mathcal{D}(T^* - \bar{\lambda} I)$ e $(T^* - \bar{\lambda} I)u = y$.

$\square$

Operadores simétricos: índices de deficiência positivo e negativo

- Tendo em vista o primeiro item da Proposição anterior e o Teorema de Krasnosel'skii e Krein, definimos, para um operador simétrico fechável, os índices de deficiência positivo e negativo como:

$$\begin{aligned} d_+(T) &:= d_{\bar{\lambda}}(T) \quad \mathrm{Im}\lambda > 0 \\ d_-(T) &:= d_{\bar{\lambda}}(T) \quad \mathrm{Im}\lambda < 0 \end{aligned} \tag{6}$$

- Note que, se T é simétrico densamente definido, T é fechável e:

$$\begin{aligned} d_+(T) &= \dim \mathcal{R}(T - \bar{\lambda} I)^{\perp} = \dim \mathcal{N}(T^* - \lambda I) \quad \mathrm{Im}\lambda > 0 \\ d_-(T) &= \dim \mathcal{R}(T - \bar{\lambda} I)^{\perp} = \dim \mathcal{N}(T^* - \lambda I) \quad \mathrm{Im}\lambda < 0 \end{aligned} \tag{7}$$

Fórmula de von Neumann e pontos regulares de operadores autoadjuntos

Proposição (1.10; von Neumann)

Seja T um operador simétrico densamente definido. Então:

$$\mathcal{D}(T^*) = \mathcal{D}(\bar{T}) \dot{+} \mathcal{N}(T^* - \lambda I) \dot{+} \mathcal{N}(T^* - \bar{\lambda} I) \tag{8}$$

Proposição (1.11)

Seja T um operador autoadjunto em $\mathcal{H}$. São equivalentes:

1. $\lambda \in \rho(T)$.
2. $\lambda \in \pi(T)$.
3. $\mathcal{R}(T - \lambda) = \mathcal{H}$.

Operadores isométricos: índices de deficiência interior e exterior

- Por fim, consideramos, agora, um operador $V : \mathcal{D}(V) \mapsto \mathcal{H}$ isométrico. Observe que:

$$\|(V-\lambda)x\| \geq |\|Vx\| - |\lambda|\|x\|| = |1-|\lambda|| \|x\| \quad \forall x \in \mathcal{D}(V) \tag{9}$$

donde concluímos que $\mathbb{C} \setminus \mathbb{T} \subseteq \pi(V)$.

- Como um operador isométrico é fechável, segue pelo Teorema de Krasnosel'skii e Krein que os índices de os índices:

$$\begin{aligned} d^i(V) &:= d_\lambda(V) \quad |\lambda| < 1 \\ d^e(V) &:= d_\lambda(V) \quad |\lambda| > 1 \end{aligned} \tag{10}$$

estão bem-definidos.

Índices interior e exterior: propriedades

Lema (1.13)

Para $V : \mathcal{D}(V) \mapsto \mathcal{H}$ isométrico, são válidos:

1. $d^i(V) = \dim \mathcal{R}(T)^\perp$.
2. $d^e(V) = \dim \mathcal{D}(V)^\perp$.
3. *Se $\mathcal{R}(I - V)$ é denso em $\mathcal{H}$, então $\mathcal{N}(I - V) = \{0\}$*

Demonstração.

1. $d^i(V) = d_0(V) = \dim \mathcal{R}(T)^\perp$.
2. para $0 < |\mu| < 1$, $(V^{-1} - \mu)Vx = (I - \mu V)x = -\mu(V - \mu^{-1})x$ para todo $x \in \mathcal{D}(x) \implies$,
   $d^e(V) = d^i(V^{-1}) = \dim \mathcal{R}(V^{-1})^\perp = \dim \mathcal{D}(V)^\perp$
3. Considere $x \in \mathcal{N}(I - V)$. Então, para todo $u \in \mathcal{D}(V)$, temos:

   $$\langle (I - V)u, x\rangle = \langle u, x\rangle - \langle Vu, x\rangle = \langle u, x\rangle - \langle Vu, Vx\rangle = \langle u, x\rangle - \langle u, x\rangle = 0$$

   donde concluímos que $x \in \mathcal{R}(I - V)^\perp = \{0\} \implies x = 0$.

Transformada de Cayley

- Consideramos $\lambda \in \mathbb{C}$ tal que Im $\lambda > 0$.
- Seja T um operador linear simétrico densamente definido.
- Como Im $\lambda > 0$, temos que que $\bar{\lambda} \in \pi(T)$, logo $(T - \bar{\lambda} I)$ é invertível e podemos definir

$$V_T := (T - \lambda I)(T - \bar{\lambda} I)^{-1} \quad \mathcal{D}(V_T) = \mathcal{R}(T - \bar{\lambda} I) \tag{11}$$

- V_T é a **transformada de Cayley de** T.

Transformada de Cayley: propriedades

Proposição (2.1)

Seja V_T a transformada de Cayley de um operador simétrico T densamente definido. Então temos:

1. A transformada de Cayley é um operador isométrico em $\mathcal{H}$ com $\mathcal{D}(V_T) = \mathcal{R}(T - \bar{\lambda} I)$ e $\mathcal{R}(V_T) = \mathcal{R}(T - \lambda I)$.
2. $\mathcal{R}(I - V_T) = \mathcal{D}(T)$ e $T = (\lambda I - \bar{\lambda} V_T)(I - V_T)^{-1}$.
3. T é fechado se, e somente se, V_T é fechado.
4. se S é outro operador simétrico em $\mathcal{H}$, então $T \subseteq S$ se, e somente se, $V_T \subseteq V_S$.
5. $d^i(V_T) = d_-(T)$ e $d^e(V_T) = d_+(T)$.

Propriedades da transformada de Cayley: demonstração I

1. Sejam α e β reais, $\lambda = \alpha + i\beta$. Então temos, para $x \in \mathcal{D}(T)$,

$$\|(T-\alpha)x \pm i\beta x\|^2 = \|(T-\alpha)x\|^2 + |\beta|^2\|x\|^2$$

   Fazendo $y := (T-\bar{\lambda})x$, temos $V_T y = (T-\lambda)x$, e:

$$\|V_T y\| = \|(T-\alpha)x - i\beta x\| = \|(T-\alpha)x + i\beta x\| = \|(T-\bar{\lambda})x\| = \|y\|$$

2. $\lambda - \bar{\lambda} \neq 0$ e $(I - V_T)y = (\lambda - \bar{\lambda})x$ para $y = (T - \bar{\lambda})x$, $x \in \mathcal{D}(T)$ $\implies \mathcal{R}(I - V_T) = \mathcal{D}(T)$.

   $\mathcal{D}(T)$ densamente definido + lema anterior $\implies \mathcal{N}(I - V_T) = \{0\}$. Assim, $(I - V_T)$ é invertível.

   Temos que $(I - V_T)y = (\lambda - \bar{\lambda})x$ e $(\lambda I - \bar{\lambda}V_T)y = (\lambda - \bar{\lambda})Tx \implies Tx = (\lambda I - \bar{\lambda}V_T)(I - V_T)^{-1}x$ para $x \in \mathcal{D}(T)$. Além disso, ambas as funções têm mesmo domínio.

Propriedades da transformada de Cayley: demonstração II

3. Notar que $\bar{\lambda} \in \pi(T)$, V_T isométrica é contínua e observar que:

$$T \text{ fechado} \iff \mathcal{R}(T - \bar{\lambda} I) = \mathcal{D}(V_T) \text{ fechado} \iff V_T \text{ fechado}$$

4. Imediato da definição e do item (2).
5. Pelo lema anterior, obtemos:

$$\begin{aligned} d^i(V_T) &= \dim \mathcal{R}(V_T)^\perp = \dim \mathcal{R}(T - \lambda I)^\perp = d_-(T) \\ d^e(V_T) &= \dim \mathcal{D}(V_T)^\perp = \dim \mathcal{R}(T - \bar{\lambda} I)^\perp = d_+(T) \end{aligned} \tag{12}$$

Transformada Inversa de Cayley I

- Procedemos na direção contrária.
- Suponha que V é um operador isométrico em $\mathcal{H}$ tal que $\mathcal{R}(I - V)$ é denso. Sabemos que $\mathcal{N}(I - V) = \{0\}$, i.e. $(I - V)$ é invertível. Definimos, então, o operador:

$$T_V := (\lambda I - \bar{\lambda} V)(I - V)^{-1} \quad \mathcal{D}(T_V) = \mathcal{R}(I - V) \tag{13}$$

que chamamos de **transformada inversa de Cayley de V**.

Proposição (2.2)

T_V é um operador simétrico densamente definido cuja transformada de Cayley é V.

Transformada Inversa de Cayley II

Demonstração.

Seja $x \in \mathcal{D}(T_V)$. Então $x = (I - V)y$ para $y \in \mathcal{D}(V)$, do que obtemos:

$$\begin{aligned}\langle T_V x, x\rangle = \langle T_V(I-V)y, (I-V)y\rangle = \langle(\lambda - \bar{\lambda}V)y, (I-V)y\rangle = \\ = \lambda\langle y, y\rangle + \bar{\lambda}\langle Vy, vy\rangle - \lambda\langle y, Vy\rangle - \bar{\lambda}\langle y, Vy\rangle = \\ = 2\mathrm{Re}\lambda\langle y, y\rangle - 2\mathrm{Re}\lambda\langle y, Vy\rangle \in \mathbb{R}\end{aligned}$$

do que concluímos que T_V é simétrico, pois o espaço de Hilbert é complexo. T_V é densamente definido por definição. Segunda parte segue de manipulação algébrica. $\square$

Transformação de Cayley

Teorema (2.3)

A transformação de Cayley $T \mapsto V_T = (T - \lambda I)(T - \bar{\lambda})^{-1}$ *constitui uma bijeção entre o espaço dos operadores simétricos densamente definidos e o espaço dos operadores isométricos* V *tais que* $\mathcal{R}(I - V)$ *é denso. A inversa da transformação de Cayley é dada por* $V \mapsto T_V = (\lambda - \bar{\lambda} V)(I - V)^{-1}$.

Corolário (2.4)

Um operador simétrico densamente definido é autoadjunto se, e somente se, sua transformada de Cayley V_T *é unitária.*

Demonstração.

Usar fatos anteriores para mostrar que T simétrico densamente definido é autoadjunto sse $\mathcal{R}(T - \bar{\lambda} I) = \mathcal{R}(T - \lambda I) = \mathcal{H}$, i.e. sse a transformada de Cayley é unitária. $\square$

Transformação de Cayley: outros corolários

Corolário (2.5)

Um operador unitário V é a transformada de Cayley de um operador autoadjunto se, e somente se, $\mathcal{N}(I - V) = \{0\}$.

Corolário (2.6)

Se um dos índices de deficiência $d_+(T)$ ou $d_-(T)$ de um operador simétrico densamente definido T em $\mathcal{H}$ são finitos, então qualquer operador simétrico S em $\mathcal{H}$ satisfazendo $S \supseteq \bar{T}$ é fechado.

- Veja o resumo para as demonstrações desses corolários.

Um teorema auxiliar

Teorema (2.7)

Seja T um operador simétrico densamente definido em $\mathcal{H}$. Suponha que $\mathcal{G}_+ \subseteq \mathcal{N}(T^* - \lambda I)$ e $\mathcal{G}_- \subseteq \mathcal{N}(T^* - \bar{\lambda} I)$ são subespaços lineares fechados de mesma dimensão de Hilbert e U é um operador isométrico entre $\mathcal{G}_+$ e $\mathcal{G}_-$ **sobrejetor**. Defina:

$$\mathcal{D}(T_U) = \mathcal{D}(\bar{T}) \dotplus (I - U)\mathcal{G}_+ \tag{14}$$

e considere o operador $T_U : \mathcal{D}(T_U) \mapsto \mathcal{H}$,
$T_U(x + (I - U)y) = \bar{T}x + \lambda y - \bar{\lambda} U y$. Então T_U está bem-definido, e é um operador simétrico fechado (densamente definido), tal que $T \subseteq T_U$. Qualquer extensão simétrica fechada de T tem essa forma. Além disso, $d_\pm(T) = \dim_\pm(T_U) + \dim \mathcal{G}_\pm$.

Etapas da demonstração do Teorema Auxiliar I

- Como qualquer extensão fechada C de T satisfaz $\bar{T} \subseteq C$; e $(\bar{T})^* = T^*$, supomos, sem perda de generalidade, que T é fechado.
- $\mathcal{D}(V_T)$ é fechado. Além disso, $S \supseteq T$ é simétrica fechada sse $V_S \supseteq V_T$ e $\mathcal{D}(V_S)$ é fechada.
- Notar que V_S é extensão isométrica de V_T com $\mathcal{D}(V_S)$ fechado sse $\mathcal{D}(V_S) = \mathcal{D}(V_T) \oplus \mathcal{F}_+$, $\mathcal{F}_+ \subseteq \mathcal{N}(T^* - \lambda I)$, $V_S|\mathcal{D}(V_T) = V_T$ e $V_S|\mathcal{F}_+$ é um mapa isométrico sobrejetor de $\mathcal{F}_+$ em $\mathcal{F}_- \subseteq \mathcal{N}(T^* - \bar{\lambda} I)$, onde $\mathcal{F}_+$ e $\mathcal{F}_-$ são subespaços fechados de mesma dimensão de Hilbert.
- Tomar $V := V_T \oplus U$. Colocar $T_U := (\lambda I - \bar{\lambda} V)(I - V)^{-1}$. Notar que:

$$\begin{aligned} \mathcal{D}(T_U) = \mathcal{R}(I - V) = (I - V)(\mathcal{D}(V_T) \oplus \mathcal{G}_+) = \\ = (I - V_T)\mathcal{D}(V_T) \dotplus (I - U)\mathcal{G}_+ = \\ = \mathcal{D}(T) \dotplus (I - U)\mathcal{G}_+ \end{aligned}$$

  onde a soma é direta pois $(I - V)$ é injetora, e usamos as proposições anteriores.

Etapas da demonstração do Teorema Auxiliar II

- Concluir que $T \subseteq T_U$, com T_U simétrica. Mas disso $T_U \subseteq T_U^* \subseteq T^*$, de onde obtemos que:

$$T_U(x + (I - U)y) = T^*(x + (I - U)y) = T^*x + \bar{\lambda}y - \bar{\lambda}Uy \tag{15}$$

- Ponto final segue de manipulação algébrica.

Teorema de von Neumann

Teorema (2.8; von Neumann)

Um operador simétrico densamente definido possui extensão autoadjunta em $\mathcal{H}$, *se, e somente se,* $d_+(T) = d_-(T)$. *Quando* $d_+(T) = d_-(T)$, *todas as extensões autoadjuntas são dadas por* T_U *do Teorema anterior com* $\mathcal{G}_+ = \mathcal{N}(T^* - \lambda I)$ *e* $\mathcal{G}_- = \mathcal{N}(T^* - \bar{\lambda} I)$, *e* U *um operador isométrico entre* $\mathcal{G}_+$ *e* $\mathcal{G}_-$.

Demonstração.

Sabemos que S é extensão autoadjunta de T sse V_S é extensão unitária de V_T. Pelo teorema anterior (note que operador autoadjunto é fechado), a extensão é unitária sse $\mathcal{G}_+ = \mathcal{N}(T^* - \lambda I)$ e $\mathcal{G}_- = \mathcal{N}(T^* - \bar{\lambda} I)$ na fórmula do teorema anterior. Logo, a fórmula do teorema anterior com essas escolhas de $\mathcal{G}_+$ e $\mathcal{G}_-$ caracteriza todas as extensões autoadjuntas. Mas a existência de um operador isométrico sobrejetor (unitário) entre $\mathcal{N}(T^* - \lambda I)$ e $\mathcal{N}(T^* - \bar{\lambda} I)$ é equivalente a $d_+(T) = d_-(T)$. $\square$

Extensão em um espaço maior

Corolário (2.9)

Todo operador simétrico densamente definido admite uma extensão autoadjunta definida num espaço (possivelmente) maior.

Demonstração.

Defina $S := (T) \otimes (-T)$ no espaço produto $\mathcal{H} \otimes \mathcal{H}$. Como $S^* = T^* \otimes (-T^*)$, temos que $\mathcal{N}(S^* \pm \lambda I) = \mathcal{N}(S^* \pm \lambda I) \otimes \mathcal{N}(S^* \mp \lambda I)$. Mas então, aplicando o Teorema de Von Neumann, S admite extensão autoadjuta. Se identificarmos T com o subespaço $\mathcal{H} \times \{0\}$, temos o resultado desjeado. $\square$

Casos possíveis

1. Se $d_+(T) = d_-(T) = 0$, $\bar{T}$ é a única extensão autoadjunta de T.
2. Se $d_+(T) = d_-(T) \neq 0$, existem infinitos operadores unitários entre $\mathcal{N}(T^* - \lambda I)$ e $\mathcal{N}(T^* - \bar{\lambda} I)$, logo infinitas extensões autoadjuntas.
3. Se $d_+(T) \neq d_-(T)$, não existem extensões autoadjuntas.

Exemplo I

- Consideramos o operador fechado simétrico $T = -i\frac{d}{dx}$, com $\mathcal{D}(T) = \mathcal{H}_0^1(a,b) \subseteq L^2(a,b)$, onde temos que:

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_0^1((a,b)) &:= \{f \in \mathcal{H}^1(a,b) : f(a) = f(b) = 0\} \\ \mathcal{H}^1(a,b) &:= \{f \in \mathrm{AC}[a,b] : f' \in L^2(a,b)\} \end{aligned} \tag{16}$$

  e $\mathrm{AC}[a,b]$ é o conjunto de funções absolutamente contínuas em $[a,b]$.
- Tome $\lambda = i$. É possível mostrar que $\mathcal{N}_{+i} := \mathcal{N}(T^* - iI) = \mathbb{C} \cdot e^{-x}$ e $\mathcal{N}_{-i} := \mathcal{N}(T^* + iI) = \mathbb{C} \cdot e^{x}$.
- Vamos caracterizar as extensões autoadjuntas de T.
- De $\|e^{a+b-x}\|_2 = \|e^x\|_2 \implies$ qualquer transformação unitária entre $\mathcal{N}_{+i}$ e $\mathcal{N}_{-i}$ se escreve como o operador linear que satisfaz $U_w(e^{a+b-x}) = we^x$ para algum $w \in \mathbb{T}$.

Exemplo II

- Vamos dar cara a $\mathcal{D}(T_{U_w})$. Se $f \in \mathcal{D}(T_{U_w})$:

$$f(x) = f_0(x) + \alpha(I - U_w)e^{a+b-x} \quad f_0 \in \mathcal{H}_0^1, \alpha \in \mathbb{C} \tag{17}$$

em particular, $f \in H^1(a,b)$ e, como $f_0(a) = f_0(b) = 0$, obtemos:

$$f(b) = z(w)f(a) \quad z(w) := (e^a - we^b)(e^b - we^a)^{-1} \tag{18}$$

- Na outra direção, se $f \in H^1(a,b)$ satisfaz a condição acima, então colocando $\alpha := f(b)(e^b - we^b)^{-1}$ e $f_0(x) := f(x) - \alpha(I - U_w)e^{a+b-x}$, obtemos que $f \in \mathcal{D}(T_{U_w})$. Assim. Assim.

$$\mathcal{D}(T_{U_w}) = \{f \in H^1(a,b) : f(b) = z(w)f(a)\} \tag{19}$$

$$T_{U_w}f = -i\frac{df}{dx} \tag{20}$$

Exemplo III

- Se $\mathcal{D}(T) = \mathcal{H}_0^1(0, \infty)$, então $d_+(T) \neq d_-(T)$ e não existem extensões autoadjuntas (no mesmo espaço).
- Se $\mathcal{D}(T) = \mathcal{H}_0^1(\mathbb{R})$, então $d_+(T) = d_-(T) = 0$ e $\bar{T}$ é a única extensão autoadjunta de T. Como T é fechado, segue que T é autoadjunta.