MAT1352 - Cálculo II - IFUSP

O NÚMERO e

Segundo semestre de 2023

Professor Oswaldo Rio Branco de Oliveira

Proposição 1. *A sequência numérica* $a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots$, *onde*

$$a_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!}, \text{ para todo } n \in \mathbb{N},$$

é crescente e satisfaz a desigualdade $a_n < 3$, *para todo* $n \in \mathbb{N}$. *Logo, a sequência numérica* $(a_n)_{\mathbb{N}}$ *é crescente e limitada e portanto convergente a um número real.*

Prova.

É claro que $n! = 1.2.3\ldots(n-1)n \geq 2^{n-1}$, para todo $n \geq 1$. Logo,

$$\frac{1}{n!} \leq \frac{1}{2^{n-1}} \quad \text{e}$$

$$1 + \left(\frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!}\right) \leq 1 + \left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}}\right) \leq 1 + \frac{1 - \frac{1}{2^n}}{1 - \frac{1}{2}} < 3 \clubsuit$$

Proposição 2. *A sequência numérica*

$$\left(\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right)_{n \in \mathbb{N}}$$

é crescente e limitada por 3. *Logo, tal sequência é convergente a um número real. Ainda mais, tal sequência numérica satisfaz*

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \leq 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!}, \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Prova.

Pelo binômio de Newton temos,

$$b_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \sum_{p=0}^{p=n} \binom{n}{p} \frac{1}{n^p}.$$

Destaquemos nos coeficientes binomiais o fatorial de p, para $p \geq 1$,

$$\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!} = \frac{n(n-1)...2.1}{(n-p)!}\frac{1}{p!} = [n...(n-p+1)]\frac{1}{p!}.$$

Reintroduzindo n^p no denominador obtemos,

$$(*) \quad \binom{n}{p}\frac{1}{n^p} = \frac{n\ldots(n-p+1)}{n^p}\frac{1}{p!} = \left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right)\ldots\left(1 - \frac{p-1}{n}\right)\frac{1}{p!} \leq \frac{1}{p!}.$$

As $n+1$ parcelas da forma
$$\binom{n}{p}\frac{1}{n^p}$$
presentes na expansão de
$$b_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$
são múltiplas positivas de
$$\frac{1}{p\,!}.$$
Se n cresce, o número de parcelas e o coeficiente de $\frac{1}{p!}$ crescem e assim a sequência numérica $(b_n)_{\mathbb{N}}$ é crescente.

Por outro lado, a identidade (*) garante
$$b_n \leq 1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{n!}.$$
Pela Proposição 1 então segue $b_n < 3$, para todo n.

Logo, a sequência numérica (b_n) converge a um número real ♣

Teorema 3. *Vale a seguinte identidade*
$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \lim_{n\to+\infty}\left(1+1+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{n!}\right) = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n!}.$$

Prova.

◇ **A desigualdade direta.** Na Proposição 2 vimos que
$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \leq 1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{n!}, \text{ para todo } n\in\mathbb{N}.$$
Donde segue a desigualdade
$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \leq \lim_{n\to+\infty}\left(1+1+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{n!}\right).$$
Está provada a desigualdade direta.

◇ **A desigualdade reversa.** Observemos que

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \sum_{p=0}^{p=n} \binom{n}{p} \frac{1}{n^p}$$

$$= 1+1+\frac{n(n-1)}{2!}\frac{1}{n^2}+\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\frac{1}{n^3}+\cdots+\frac{n(n-1)\cdots[n-(n-1)]}{n!}\frac{1}{n^n}$$

$$= 1+1+\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)+\cdots+\frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{n-1}{n}\right).$$

Fixemos m tal que $m \leq n$. Então segue

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \geq$$

$$\geq 1+1+\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)+\cdots+\frac{1}{m!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{m-1}{n}\right).$$

A seguir, impondo $n \to +\infty$ concluímos que

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \geq 1+1+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{m!}, \text{ para todo } m \in \mathbb{N}.$$

A seguir, impondo $m \to +\infty$ obtemos

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \geq \lim_{m\to+\infty}\left(1+1+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{m!}\right).$$

Isto é, provamos que

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \lim_{m\to+\infty}\left(1+1+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{m!}\right) \clubsuit$$

Definição. *O número de Euler é*

$$\boxed{e = \lim_{n\to+\infty}\left(1+\tfrac{1}{n}\right)^n = \lim_{m\to+\infty}\left(1+1+\tfrac{1}{2!}+\cdots+\tfrac{1}{m!}\right).}$$