MAT 226 - EQUAÇÕES DIFERENCIAIS i

Instituto de Matemática e Estatística da USP

Ano 2017

Professor Oswaldo R. B. de Oliveira

`http://www.ime.usp.br/~oliveira` oliveira@ime.usp.br

Este Capítulo 2 - Sequências e Topologia (em $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{C}$, e Noções de Espaços Métricos e Topológicos - se baseia em notas de aulas do Prof. Jorge Aragona, em E. L. Lima, *Curso de Análise*, Vol. 1 e Vol. 2; T. M. Apostol, *Análisis Matemático*, segunda edición, Editorial Reverté; M. Spivak, *Calculus*, fourth edition e em J. B. Conway, *Functions of One Complex Variable I*, second edition.

Capítulo 2 - SEQUÊNCIAS e TOPOLOGIA (em $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{C}$), e NOÇÕES DE ESPAÇOS MÉTRICOS e TOPOLÓGICOS

Capítulo 1

NÚMEROS COMPLEXOS

Capítulo 2

SEQUÊNCIAS E TOPOLOGIA (em $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{C}$). ESPAÇOS MÉTRICOS E TOPOLÓGICOS

2.1 - Introdução

Seja X um subconjunto não vazio de $\mathbb{R}$. Um número real M é um majorante para X se temos $x \leq M$, para todo $x \in X$. Um número real β é um supremo de X se β é um majorante de X e, ainda, o menor dos majorantes de X.

O supremo de X, indicado $\sup X$, se existir, é único (por favor, verifique). Se $\sup X \in X$, então $\sup X$ é um máximo para X, denotado $\max X$. Analogamente, definimos minorante para X, ínfimo de X [$\inf X$] e mínimo de X [$\min X$].

Dizemos que $X \subset \mathbb{R}$ é limitado superiormente [inferiormente] se existe um número real M tal que $x \leq M$ [$x \geq M$], para todo $x \in X$. Por fim, X é limitado se X é limitado superiormente e também inferiormente.

Doravante, assumimos que o corpo ordenado $\mathbb{R}$ satisfaz à propriedade abaixo.

2.1 Propriedade do Supremo. *Seja $X \subset \mathbb{R}$ tal que X é não vazio e limitado superiormente. Então, X tem supremo.*

2.2 Propriedade de Aproximação. *Seja $X \subset \mathbb{R}$ tal que existe $\beta = \sup X$. Então, para todo $\epsilon > 0$ existe $x \in X$ tal que $\beta - \epsilon < x \leq \beta$*

Prova.

Dado $\epsilon > 0$, como $\beta - \epsilon < \beta$ segue pela definição de supremo que $\beta - \epsilon$ não majora X. Logo, existe $x \in X$ tal que $\beta - \epsilon < x$ e então, $\beta - \epsilon < x \leq \beta$♣

2.3 Teorema. *(***Princípio dos Intervalos Encaixantes***.) Consideremos uma sequência* $[a_0, b_0], \ldots, [a_n, b_n], \ldots$ *de intervalos fechados em* $\mathbb{R}$*, satisfazendo:*

(i) $[a_{n+1}, b_{n+1}] \subset [a_n, b_n]$*, para todo* $n \in \mathbb{N}$*, e*

(ii) para todo $\epsilon > 0$ *existe* $n \in \mathbb{N}$ *tal que* $0 \leq b_n - a_n < \epsilon$*.*

Então, a intersecção $\bigcap\limits_{n \in \mathbb{N}} [a_n, b_n]$ *é um único ponto em* $\mathbb{R}$*.*

Prova.

Fixado $n \in \mathbb{N}$, de $a_n \leq a_{n+p} \leq b_{n+p} \leq b_n$ para p qualquer em $\mathbb{N}$, segue que todo b_n majora $A = \{a_n : n \in \mathbb{N}\}$. Pela propriedade do supremo existe $\alpha = \sup A \in \mathbb{R}$ e $a_n \leq \alpha \leq b_n$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Isto é, $\alpha \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} [a_n, b_n]$. Se $\beta \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} [a_n, b_n]$ então temos $|\beta - \alpha| \leq b_n - a_n$, para todo n, e $|\beta - \alpha| < \epsilon$ para todo $\epsilon > 0$. Logo, $\alpha = \beta$♣

2.2 - Topologia Básica de $\mathbb{C}$

As definições topológicas que seguem possuem correspondentes óbvios em $\mathbb{R}$ [e mesmo em um espaço métrico (M, d), exceto as noções de circunferência e esfera].

Dado $a \in \mathbb{C}$ e um raio $r > 0$ indicamos,

- $B(a; r) = B_r(a) = \{z \in \mathbb{C} : |z - a| < r\}$, a bola aberta de centro a e raio r.
- $D(a; r) = D_r(a) = \{z \in \mathbb{C} : |z - a| \leq r\}$, o disco fechado de centro a e raio r.
- $S_r(a) = \{z \in \mathbb{C} : |z - a| = r\}$, a circunferência de centro a e raio r.
- $S^1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$, a circunferência unitária centrada na origem.

2.4 Definição. *Seja* $A \subset \mathbb{C}$*. Um ponto* $a \in A$ *é* ponto interior *de* A *ou, equivalentemente,* A *é uma* vizinhança *de* a*, se existe* $r > 0$ *tal que* $B(a; r) \subset A$*. Ainda,*

$$o \text{ interior de } A \text{ é } int(A) = \{a \in A : a \text{ é interior a } A\}.$$

Ainda, A *é um* conjunto aberto *ou, simplesmente,* aberto *se* $int(A) = A$*.*

Dados dois conjuntos A e B, o complementar de B em relação a A é dado por $A \setminus B = \{a : a \in A \text{ e } a \notin B\}$. Dado $X \subset \mathbb{C}$, o complementar de X é $X^c = \mathbb{C} \setminus X$.

2.5 Definição. *Sejam $X \subset \mathbb{C}$ e $a \in \mathbb{C}$. [Analogamente, para espaços métricos].*

- *a é* um ponto de aderência (aderente) *de X se $B(a;r) \cap X \neq \varnothing$, $\forall r > 0$.*
- *O* fecho *de $X \neq \varnothing$ é $\overline{X} = \{a : a$ é aderente a $X\}$. É óbvio que $\overline{\varnothing} = \varnothing$.*
- *X é um* conjunto fechado*, ou simplesmente* fechado*, se $\overline{X} = X$.*
- *a é* um ponto de fronteira *de X se toda bola aberta centrada em a contém pontos de X e de $X^c = \mathbb{C} \setminus X$, o complementar de X.*
- *A* fronteira de *X é $\partial X = \{a : a$ é ponto de fronteira de $X\}$. Temos $\partial\varnothing = \varnothing$.*
- *a é* ponto de acumulação *de X se $B(a;r) \cap (X \setminus \{a\}) \neq \varnothing$, para todo $r > 0$.*
- *O* derivado de *X é $X' = \{a : a$ é ponto de acumulação de $X\}$. Logo, $\varnothing' = \varnothing$.*
- *a é* ponto isolado de *X se $a \in X$ e existe $r > 0$ tal que $B(a;r) \cap X = \{a\}$.*
- *X é* discreto *se todos os seus pontos são isolados.*

2.6 Proposição. *Seja $X \subset \mathbb{K}$, fixado $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Valem as propriedades:*

(a) $\overline{X} = int(X) \cup \partial X$.

(b)$\overline{X} = X \bigcup X'$.

(c) X *é fechado* $\Leftrightarrow X \supset X'$.

(d) $\partial X = \overline{X} \setminus int(X)$.

(e) X *é fechado* $\Leftrightarrow X \supset \partial X$.

(f) X é fechado $\Leftrightarrow X^c$ é aberto.

Prova.

(a) É claro que $\text{int}(X) \cup \partial X \subset \overline{X}$ e que $\overline{X} \setminus \text{int}(X) \subset \partial X$. Logo, $\overline{X} \subset \text{int}(X) \cup \partial X$.

(b) É claro que $X \cup X' \subset \overline{X}$. É também claro que $\overline{X} \setminus X \subset X'$; logo, $\overline{X} \subset X \cup X'$.

(c) Por definição e por (a) segue: X é fechado $\Leftrightarrow X \cup X' = X \Leftrightarrow X' \subset X$.

(d) É claro que $\partial X \subset \overline{X} - \text{int}(X)$. Ainda, é fácil ver que $\overline{X} \setminus \text{int}(X) \subset \partial X$.

(e) Por definição, e (a), segue: X é fechado $\Leftrightarrow \text{int}(X) \cup \partial X = X \Leftrightarrow \partial X \subset X$

(f) Se X é fechado, então $X^c = (\overline{X})^c$ e portanto $X^c \subset \text{int}(X^c) \subset X^c$. Se X^c é aberto, então um ponto de $\overline{X}$ não pertence a X^c e assim $\overline{X} \subset X \subset \overline{X}$♣

A Proposição 2.6 acima admite uma análoga em espaços métricos.

Doravante, por $\mathbb{K}$ designamos $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Suponhamos $X \subset Y \subset \mathbb{K}$. Dizemos que X é denso em Y se para todo $y \in Y$ e para todo $r > 0$, temos $B(y;r) \bigcap X \neq \varnothing$. Verifique que $\mathbb{Q} + i\mathbb{Q}$ é denso em $\mathbb{C}$. [De forma análoga, definimos o conceito de densidade em espaços métricos].

É usual dizer que $\mathbb{C}$ tem a topologia determinada pela aplicação bijetora

$$\Phi : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{R}^2\,, \quad \text{definida por } \Phi(z) = (x,y) \in \mathbb{R}^2\,, \text{ com } z = x + iy \in \mathbb{C}\,.$$

Claramente um conjunto $X \subset \mathbb{C}$ é aberto se e somente se $\Phi(X)$ é aberto em $\mathbb{R}^2$ [analogamente para os fechados]. O plano complexo herda a topologia de $\mathbb{R}^2$.

Doravante identificamos $\mathbb{C}$ e $\mathbb{R}^2 = \Phi(\mathbb{C})$, como espaços topológicos.

2.3 - Sequências e Propriedades Operatórias

A reta estendida é $\overline{\mathbb{R}} = [-\infty, +\infty] = \mathbb{R} \bigcup \{-\infty\} \bigcup \{+\infty\}$.

Uma sequência em um conjunto X é uma função $x : \mathbb{N} \to X$. Indicamo-la por $x = (x_n)$ ou $x = (x_n)_{\mathbb{N}}$, com $x_n = x(n)$ o termo geral da sequência.

Uma sequência $(z_n) \subset \mathbb{C}$, é convergente se existir $z \in \mathbb{C}$ tal que, $\forall \epsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $|z_n - z| < \epsilon$, $\forall n \geq n_0$. Notação: $\lim\limits_{n\to+\infty} z_n = z$, ou $\lim z_n = z$, ou $z_n \to z$.

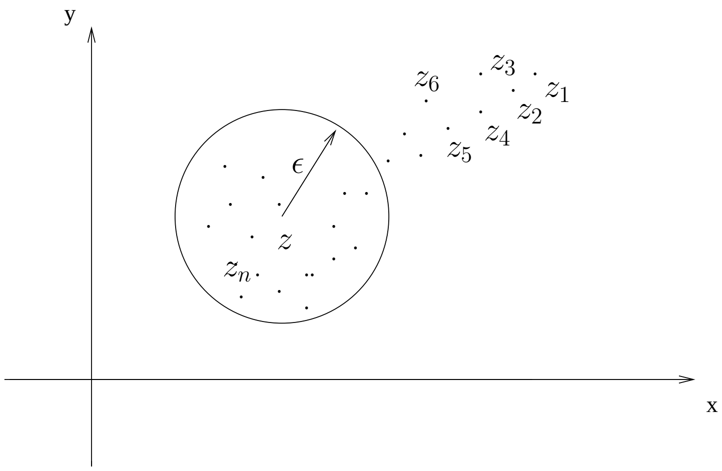

Figura 2.1: Se $\lim z_n = z$, segue que para todo $\epsilon > 0$ é finito $\{n : z_n \notin B(x;\epsilon)\}$.

Dado $z = a + ib$ [a, b reais], temos

$$\max(|a|, |b|) \leq |z| \leq |a| + |b|.$$

Segue que $z_n \to z$ se e somente se $\mathrm{Re}(z_n) \to \mathrm{Re}(z)$ e $\mathrm{Im}(z_n) \to \mathrm{Im}(z)$. O limite de uma sequência é único.

Uma sequência (em $\mathbb{K}$) é divergente se não converge (em $\mathbb{K}$). A sequência $(x_n) \subset \mathbb{R}$ diverge a $+\infty$ se dado $M > 0$, existe n_0 tal que temos $x_n > M$, $\forall n \geq n_0$, e indicamos $\lim x_n = +\infty$. Analogamente definimos e notamos a divergência a $-\infty$.

Dizemos que existe $\lim x_n$ se e só se a sequência (x_n) é convergente em $\mathbb{K}$. As sequências reais e divergentes a $+\infty$ ou a $-\infty$, são ditas convergentes em $\overline{\mathbb{R}}$. Escrevemos $\nexists \lim x_n$ se (x_n) não é convergente.

2.7 Exemplo. *Seja $a \in \mathbb{R}$. Verifique que*

$$\lim a^n = \begin{cases} \nexists, & \text{se } a \leq -1, \\ 0, & \text{se } a \in (-1,1), \\ 1, & \text{se } a = 1 \\ +\infty, & \text{se } a > 1 . \end{cases}$$

Dadas duas sequências (x_n) e (y_n) em $\mathbb{K}$ e um número $\lambda \in \mathbb{K}$, definimos

- a soma $(x_n) + (y_n) = (x_n + y_n)$,
- a multiplicação por escalar $\lambda(x_n) = (\lambda x_n)$,
- o produto $(x_n)(y_n) = (x_n y_n)$ e
- a divisão $(\frac{x_n}{y_n})$, onde supomos $y_n \neq 0$ para todo n.

2.8 Proposição. *Sejam (x_n) e (y_n) convergentes em $\mathbb{K}$, com $\lim y_n = y$. Então,*

(a) $\lim(x_n + y_n) = \lim x_n + \lim y_n$. *(b)* $\lim \lambda x_n = \lambda \lim x_n$, $\forall \lambda \in \mathbb{K}$.

(c) $\lim(x_n y_n) = (\lim x_n)(\lim y_n)$. *(d)* $\lim \frac{x_n}{y_n} = \frac{\lim x_n}{\lim y_n}$, *se* $y_n \neq 0, \forall n \in \mathbb{N}$, *e* $y \neq 0$.

Prova. Solicitamos ao leitor verificar os itens (a), (b) e (d).

(c) Obviamente, $|y_n - y| < 1$ se n é suficientemente grande e (y_n) é limitada. Seja $M > 0$ tal que $|y_n| \leq M$, para todo n e, ainda, $M > |x|$. Dado então $\epsilon > 0$ existem $n_1 \in \mathbb{N}$ e $n_2 \in \mathbb{N}$ tais que

$$\text{se } n > n_1 \text{ então } |x_n - x| < \frac{\epsilon}{2M} \text{ e, se } n > n_2,\ |y_n - y| < \frac{\epsilon}{2M}.$$

Logo, para todo $n > \max(n_1, n_2)$, com $n \in \mathbb{N}$, temos

$$|x_n y_n - xy| = |(x_n - x)y_n + x(y_n - y)| \leq |x_n - x|\,|y_n| + |x|\,|y_n - y| < \frac{\epsilon M}{2M} + \frac{\epsilon M}{2M} = \epsilon \clubsuit$$

2.9 Exemplo. *Se* $z \in \mathbb{C}$ *então,*

$$\begin{cases} \lim z^n = 0, & se\ |z| < 1\,, \\ \lim z^n = 1, & se\ z = 1\,, \end{cases} \quad e \quad \begin{cases} \lim |z^n| = +\infty, & se\ |z| > 1\,, \\ \ a\ sequência\ (z^n)\ diverge\ se\ |z| \geq 1, & com\ z \neq 1. \end{cases}$$

Verificação.

Se $|z| < 1$, pelo Exemplo 2.7 temos $\lim |z|^n = 0$ e, como $|z^n - 0| = |z|^n$, $\lim z^n = 0$.

Se $|z| > 1$, temos $|z^n| = |z|^n$ e pelo Exemplo 2.7 segue $+\infty = \lim |z|^n = \lim |z^n|$.

Se $z \in \mathbb{C} \smallsetminus \{1\}$ é tal que existe $\lim z^n = \zeta \in \mathbb{C}$, multiplicando a sequência (z^n) por z obtemos, pela Proposição 2.8(b), $\lim z^{n+1} = z\zeta$ e, é claro, $\lim z^{n+1} = \lim z^n = \zeta$. Assim temos, $z\zeta = \zeta$ e $\zeta(z-1) = 0$ e, então, $\zeta = 0$. Como para $|z| \geq 1$ temos $|z^n| = |z|^n \geq 1$, para todo n, a sequência (z^n) não tende a zero e, por fim, diverge♣

2.10 Proposição. *Sejam* (x_n),(y_n) *e* (t_n) *sequências reais, convergentes em* $\overline{\mathbb{R}}$.

(a) Se $\lim x_n = L > 0$ *então, existe* $n_0 \in \mathbb{N}$ *tal que* $n > n_0$ *implica* $x_n > 0$.

(b) Se $x_n \geq a$, *para todo* $n \in \mathbb{N}$, *então* $\lim x_n \geq a$.

(c) Se $x_n \geq y_n$, *para todo* $n \in \mathbb{N}$, *então* $\lim x_n \geq \lim y_n$.

(d) Se $x_n \leq y_n \leq t_n$, *para todo* $n \in \mathbb{N}$, *e* $\lim x_n = \lim t_n = L$, *então* $\lim y_n = L$.

Prova. Solicitamos ao leitor verificar.

Uma sequência real (x_n) é dita crescente (decrescente) se $x_{n+1} \geq x_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $(x_{n+1} \leq x_n,\ \forall n \in \mathbb{N})$. Em ambos os casos a sequência é dita monótona.

2.11 Teorema. *Toda sequência crescente e limitada superiormente, converge.*

Prova. Segue imeditamente da propriedade do supremo♣

Importante. Dado um conjunto não vazio X, em $\mathbb{R}$ e limitado superiormente, existe uma sequência (x_n) contida em X, crescente e convergindo a $\sup X$.

2.4 - Subsequências

Dada $(a_n) \subset \mathbb{K}$ e um conjunto infinito de índices $I = \{n_1 < n_2 < n_3 < \cdots\} \subset \mathbb{N}$, a sequência (b_k), onde $b_k = a_{n_k}$, é uma subsequência de (a_n), indexada em I [um conjunto infinito de números naturais distintos, em ordem estritamente crescente].

2.12 Teorema. *Toda sequência $(x_n) \subset \mathbb{R}$ admite uma subsequência monótona.*

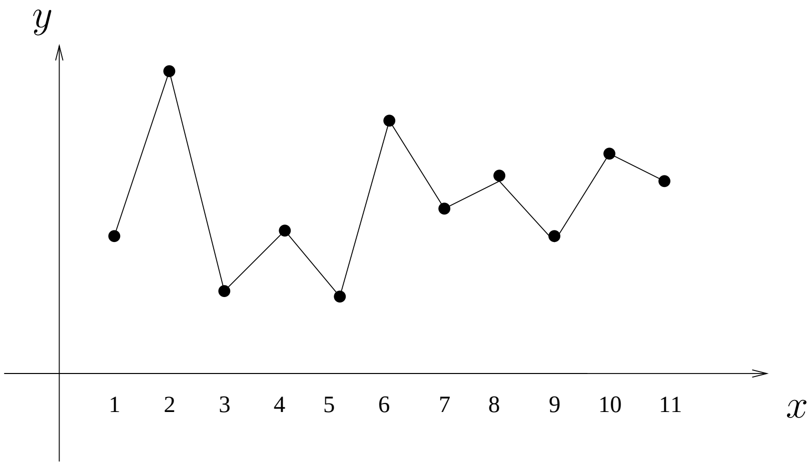

Figura 2.2: Função poligonal conectando os pontos $(n, x_n) \in \mathbb{R}^2$

Prova. (Vide figura 2.2.)

Seja $M = \{n \in \mathbb{N} : x_n > x_m, \text{ para todo } m > n\}$.

Se M é infinito, temos $M = \{n_1 < n_2 < \cdots\}$ e (x_{n_k}) decresce. Se M é finito, seja $n_1 = 1 + \max M$. Então, $n_1 \notin M$ e existe $n_2 > n_1$ tal que $x_{n_1} \le x_{n_2}$ e, analogamente, existe $n_3 > n_2$ tal que $x_{n_2} \le x_{n_3}$. Por recursão, construímos (x_{n_k}) crescente ♣

2.13 Corolário. *Toda sequência limitada, em $\mathbb{K}$, tem subsequência convergente.*

Prova.

Podemos supor $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Dada (z_n) limitada, vejamos as sequências $\big(\mathrm{Re}(z_n)\big)$ e $\big(\mathrm{Im}(z_n)\big)$. Pelo Teorema 2.12, existe uma subsequência monótona

$$\big(\mathrm{Re}(z_{n_1}), \ldots, \mathrm{Re}(z_{n_k}), \ldots\big).$$

Ainda pelo Teorema 2.12, segue que $\big(\mathrm{Im}(z_{n_1}), \ldots, \mathrm{Im}(z_{n_k}), \ldots, \big)$ tem subsequência monótona indexada em algum $I \subset \mathbb{N}$.

Pelo Teorema 2.11 segue que $\big(\mathrm{Re}(z_n)\big)_{n \in I}$ e $\big(\mathrm{Im}(z_n)\big)_{n \in I}$ convergem. Portanto, a subsequência $(z_n)_{n \in I}$ converge ♣

2.14 Proposição. *Seja* $(z_n) \subset \mathbb{C}$ *e convergente a* $z \in \mathbb{C}$. *Então, toda subsequência* (z_{n_k}) *converge a* z. *Analogamente para* (x_n) *real e convergente a* $+\infty$ *ou* $-\infty$.

Prova. Mostramos o caso $z \in \mathbb{C}$ e deixamos o outro caso ao leitor.

Dado $\epsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ com $|z_n - z| < \epsilon$, se $n \geq N$, e existe k_0 tal que $n_{k_0} > N$. Para $k > k_0$, temos $n_k > n_{k_0}$ e $|z_{n_k} - L| < \epsilon$ ♣

2.5 - Sequências de Cauchy

Uma sequência $(z_n) \subset \mathbb{C}$ é dita uma sequência de Cauchy se para todo $\epsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que temos $|z_n - z_m| < \epsilon$, quaisquer que sejam $n, m \geq N$.

2.15 Proposição. *Toda sequência convergente* $(z_n) \subset \mathbb{C}$ *é de Cauchy.*

Prova.

Seja $z = \lim z_n$. Dado $\epsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $|z_n - z| < \epsilon$, para todo $n \geq N$. Logo, para quaiquer $n, m \geq N$ temos

$$|z_n - z_m| \leq |z_n - z| + |z - z_m| \leq \epsilon + \epsilon = 2\epsilon \clubsuit$$

2.16 Teorema. *Toda sequência de Cauchy,* $(z_n) \subset \mathbb{C}$, *é convergente.*

Prova.

Mostremos que (z_n) é limitada. Seja N tal que $|z_n - z_m| < 1$ se $n, m \geq N$. Assim, $z_n \in B(z_N; 1)$ se $n \geq N$. Logo,

$$z_n \in B(0; |z_1| + \cdots + |z_{N-1}| + |z_N| + 1) \text{ para todo } n.$$

Pelo Corolário 2.13 existe uma subsequência $(z_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ convergente a z. Vejamos que (z_n) converge a z. Dado $\epsilon > 0$, existe N tal que $|z_n - z_m| < \epsilon$ se $n, m \geq N$ e $k_0 \in \mathbb{N}$ com $|z_{n_k} - z| < \epsilon$, se $k \geq k_0$. Existe também um sub-índice $n_{k'}$ tal que $k' \geq k_0$ e $n_{k'} \geq N$. Por fim, obtemos

$$|z_n - z| \leq |z_n - z_{n_{k'}}| + |z_{n_{k'}} - z| < \epsilon + \epsilon, \text{ para todo } n \geq N \clubsuit$$

2.6 - Valor de Aderência, $\limsup$ e $\liminf$.

Dado $X \subset \mathbb{R}$, ilimitado superiormente pomos $\sup X = +\infty$ (se X é ilimitado inferiormente pomos $\inf X = -\infty$).

2.17 Definição. *Seja (x_n) contida em $\mathbb{R}$. Então, $L \in [-\infty, +\infty]$ é um* valor de aderência *de (x_n) se existe uma subsequência (x_{n_k}) tal que $x_{n_k} \to L$, se $k \to +\infty$. Seja também o conjunto (não vazio, pelo Teorema 2.12)*

$$\mathcal{L} = \{L \in [-\infty, +\infty] : L \text{ é valor de aderência de } (x_n)\}.$$

Então, os valores (na reta estendida)

$$\liminf x_n = \underline{\lim}\, x_n = \inf \mathcal{L} \quad e \quad \limsup\, x_n = \overline{\lim}\, x_n = \sup \mathcal{L}.$$

são, respectivamente, o limite inferior de (x_n) *e o* limite superior de (x_n).

Alerta. O conceito de valor de aderência de uma sequência (x_n) é distinto dos de ponto de aderência ou acumulação do conjunto $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$. Exemplos:

(1) se (x_n) é ilimitada e crescente, então

$$\{x : x \text{ é valor de aderência de } (x_n)\} = \{+\infty\} \;\neq\; \overline{\{x_n : n \in \mathbb{N}\}} = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}.$$

(2) se (x_n) é constante e $x_n = a \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}$, então

$$\{x : x \text{ é valor de aderência de } (x_n)\} = \{a\} \;\neq\; \{x_n : n \in \mathbb{N}\}' = \varnothing.$$

Observação. Para todo $N \in \mathbb{N}$, as sequências

$$(x_n)_{\mathbb{N}} = (x_1, x_2, x_3, \ldots) \;\text{ e }\; (x_n)_{n>N} = (x_{N+1}, x_{N+2}, x_{N+3}, \ldots)$$

tem os mesmos valores de aderência e, portanto, os mesmos $\liminf$ e $\limsup$.

2.18 Teorema. *Dada $(x_n) \subset \mathbb{R}$ limitada,* $\liminf x_n$ *e* $\limsup x_n$ *são, respectivamente, o menor e o maior valor de aderência de (x_n).*

Prova. Basta vermos que $\limsup x_n$ é valor de aderência. Pois, $\underline{\lim} x_n = \overline{\lim}(-x_n)$.

Para $m = \limsup x_n$, por definição de sup existe um valor de aderência $m' \in (m-1, m]$. Logo, existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que $x_{n_1} \in (m-1, m+1)$. A sequência $(x_n)_{n>n_1}$, que tem mesmo $\limsup$ que (x_n), tem um valor de aderência em $m'' \in \left(m - \frac{1}{2}, m\right]$. Logo, existe $n_2 > n_1$ tal que $x_{n_2} \in \left(m - \frac{1}{2}, m + \frac{1}{2}\right)$. Iterando tal procedimento, obtemos índices $n_1 < n_2 < \cdots$ tais que $x_{n_k} \in \left(m - 1/k, m + 1/k\right)$♣

2.19 Exemplos. *Consideremos as sequências reais (x_n) abaixo indicadas.*

(1) Se $x_n = (-1)^n$, tem só dois valores aderentes: $\overline{\lim}(-1)^n = 1$ e $\underline{\lim}(-1)^n = -1$.

(2) Se (x_n) é uma enumeração de $\mathbb{Q}$, todo $x \in \mathbb{R}$ é valor aderente de (x_n). Ainda mais, $\liminf x_n = -\infty$ e $\limsup x_n = +\infty$.

2.20 Corolário. *Suponha $(x_n) \subset \mathbb{R}$ e limitada. Dado $\epsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que*

$$\liminf x_n - \epsilon \leq x_n \leq \limsup x_n + \epsilon, \text{ para todo } n \geq n_0.$$

Prova.

Trocando (x_n) por $(-x_n)$, vemos que basta provar uma desigualdade.

Por contradição. Suponhamos que exista $\epsilon > 0$ para o qual dado qualquer m existe $n > m$ satisfazendo $x_n > \overline{\lim} x_n + \epsilon$. Então, existe uma subsequência (x_{n_k}) limitada no intervalo

$$I = \left[\overline{\lim} x_n + \epsilon, +\infty\right).$$

Então [vide Corolário 2.13], a sequência (x_{n_k}) tem uma subsequência convergente em I. Tal subsequência também é subsequência de (x_n) e seu limite supera $\overline{\lim} x_n$ ↯

Consideremos uma sequência $(x_n) \subset [m, M] \subset \mathbb{R}$. Dado $n \in \mathbb{N}$, definamos

$$X_n = \{x_n, x_{n+1}, \ldots\}.$$

É evidente que $X_1 \supset X_2 \supset \cdots \supset X_n \supset \cdots$ e

$$\begin{aligned} m &\leq \inf X_1 \leq \cdots \leq \inf X_n \leq \inf X_{n+1} \leq \cdots \leq M \\ M &\geq \sup X_1 \geq \sup X_2 \geq \cdots \geq \sup X_n \geq \sup X_{n+1} \geq \cdots \geq m. \end{aligned}$$

As sequências $(\inf X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ e $(\sup X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ são limitadas, monótonas e convergentes [vide Teorema 2.11].

Mantendo tal notação temos o resultado que segue.

2.21 Teorema. *Se* $(x_n) \subset \mathbb{R}$ *é uma sequência limitada então*

$$\lim_{n\to+\infty} \inf X_n = \liminf x_n \quad e \quad \lim_{n\to+\infty} \sup X_n = \limsup x_n.$$

Prova.

Sejam $a_n = \inf X_n$, para cada $n \in \mathbb{N}$, e $a = \lim a_n$.

Vejamos que todo valor de aderência de (x_n) é maior ou igual a a. Seja $L = \lim x_{n_k}$, com (x_{n_k}) uma subsequência convergente de (x_n). Temos $a_{n_k} \leq x_{n_k}$, para todo $k \in \mathbb{N}$. Impondo $k \to +\infty$ obtemos $L = \lim x_{n_k} \geq \lim a_{n_k} = \lim a_n = a$.

A seguir, mostremos que a é valor de aderência de (x_n).

Como (a_n) é crescente e convergente a a, existe um índice m satisfazendo $a - 1 < a_m = \inf X_m \leq a < a + 1$ e então um índice $n_1 \geq m$ tal que $x_{n_1} \in (a-1, a+1)$. A seguir, existe $l > n_1$ tal que

$$a - \frac{1}{2} < a_l = \inf X_l \leq a < a + \frac{1}{2}$$

e então $n_2 \geq l$ tal que

$$x_{n_2} \in \left(a - \frac{1}{2}, a + \frac{1}{2}\right).$$

Iterando tal procedimento obtemos (x_{n_k}) convergente a a.

Provamos que $\liminf X_n = \liminf x_n$.

Trocando (x_n) por $(-x_n)$, segue $\limsup X_n = \limsup x_n$♣

Comentário. A prova acima mostra que se $(x_n)_{\mathbb{N}}$ é limitada inferiormente, mantendo a notação $X_n = \{x_n, x_{n+1}, \ldots\}$ ainda temos $\lim(\inf X_n) = \liminf x_n$. Analogamente, se $(x_n)_{\mathbb{N}}$ é limitada superiormente então $\lim(\sup X_n) = \limsup x_n$.

2.22 Corolário. *A sequência* $(x_n) \subset \mathbb{R}$ *converge em* $\overline{\mathbb{R}}$ *se e só se* $\underline{\lim}\, x_n = \overline{\lim}\, x_n$.

Prova.

($\Rightarrow$) Segue da Proposição 2.14.

($\Leftarrow$) Seja $L = \underline{\lim}\, x_n = \overline{\lim}\, x_n$.

O caso $L \in \mathbb{R}$ segue do Corolário 2.20.

O caso $L = +\infty$. É claro que (x_n) é limitada inferiormente. Pelo comentário acima segue $\inf X_n \leq x_n$, para todo n, e $\lim(\inf X_n) = \liminf x_n = +\infty$. Portanto, $x_n \to +\infty$.

O caso $L = -\infty$ é redutível ao caso $L = +\infty$ [analise $(-x_n)_{\mathbb{N}}$]♣

2.7 - Exemplos Clássicos de Sequências

2.23 Exemplos. *Deixamos ao leitor completar as provas das afirmações abaixo.*

(1) **Aplicações da propriedade do supremo.**

(a) Se $a > 1$ então $\sqrt[n]{a} \searrow 1$ [i.e., $(\sqrt[n]{a})_{\mathbb{N}}$ é decrescente e converge a 1].

Verificação.

Dados $a > 0$ e $b > 0$ e $n \in \mathbb{N}$ temos $a > b \Leftrightarrow a^n > b^n$ e $a > b \Leftrightarrow \sqrt[n]{a} > \sqrt[n]{b}$. Para $a > 1$, tem-se $1 < a^n < a^{n+1}$ e tomando a raíz de ordem $n(n+1)$,

$$1 < a^{\frac{1}{n+1}} = (a^n)^{\frac{1}{n(n+1)}} < (a^{n+1})^{\frac{1}{n(n+1)}} = a^{\frac{1}{n}} .$$

Assim, existe $\lim \sqrt[n]{a} = L \geq 1$. Para a subsequência $(\sqrt[2n]{a})$ temos, pela Proposição 2.14, $L = \lim \sqrt[2n]{a} = \lim \sqrt{\sqrt[n]{a}}$ e, pela continuidade da função raíz quadrada, $\lim \sqrt{\sqrt[n]{a}} = \sqrt{L}$. Logo, $L = \sqrt{L} \geq 1$ e então $L = 1$.

(b) Se $0 < a < 1$ então $\sqrt[n]{a} \nearrow 1$ [isto é, $(\sqrt[n]{a})_{\mathbb{N}}$ é crescente e converge a 1].

Verificação.

É claro que $a^{n+1} < a^n$ e, analogamente ao item anterior,

$$a^{\frac{1}{n}} = (a^{n+1})^{\frac{1}{n(n+1)}} < (a^n)^{\frac{1}{n(n+1)}} = a^{\frac{1}{n+1}} .$$

Logo, existe $L = \lim \sqrt[n]{a}$, $L > 0$ e então, analogamente ao item anterior, $L = \lim \sqrt[2n]{a} = \lim \sqrt{\sqrt[n]{a}} = \sqrt{L}$. Donde $L = \sqrt{L}$, com $L > 0$, e e $L = 0$.

(c) A sequência

$$s_m = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{m}, \text{ onde } m \in \mathbb{N},$$

não é limitada superiormente.

Verificação.

Escrevendo,

$$s_{2^n} = 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{2^{n-1}+1} + \cdots + \frac{1}{2^n}\right)$$

temos

$$\frac{1}{2^{n-1}+1} + \cdots + \frac{1}{2^n} = \frac{2^n - (2^{n-1}+1) + 1}{2^n} = \frac{2^n - 2^{n-1}}{2^n} = \frac{2^{n-1}}{2^n}$$

e portanto

$$s_{2^n} > 1 + \frac{1}{2} + \frac{2}{4} + \frac{4}{8} + \cdots + \frac{2^{n-1}}{2^n} = 1 + n\frac{1}{2}.$$

Logo, $s_{2^n} \xrightarrow{n \to +\infty} +\infty$ e para $m > 2^n$, temos $s_m > s_{2^n}$. Assim, $s_m \to +\infty$.

(d) A sequência (a_n), onde

$$a_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!}, \text{ para todo } n \in \mathbb{N},$$

é crescente e satisfaz a desigualdade $a_n < 3$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Logo, (a_n) é convergente.

Verificação.

É claro que $n! = 1.2.3\ldots(n-1)n \geq 2^{n-1}$, para todo $n \geq 1$. Logo,

$$\frac{1}{n!} \leq \frac{1}{2^{n-1}} \quad \text{e}$$

$$1 + \left(\frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!}\right) \leq 1 + \left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}}\right) \leq 1 + \frac{1 - \frac{1}{2^n}}{1 - \frac{1}{2}} < 3.$$

(e) A sequência $\left((1 + \frac{1}{n})^n\right)_{n \in \mathbb{N}}$ é crescente, limitada por 3, convergente e

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \leq 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!}, \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Verificação.

Pelo binômio de Newton temos,

$$b_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \sum_{p=0}^{p=n} \binom{n}{p} \frac{1}{n^p}.$$

Destaquemos nos coeficientes binomiais o fatorial de p, para $p \geq 1$,

$$\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!} = \frac{n(n-1)...2.1}{(n-p)!} \frac{1}{p!} = [n...(n-p+1)]\frac{1}{p!}.$$

Reintroduzindo n^p no denominador obtemos,

$$(*) \quad \binom{n}{p}\frac{1}{n^p} = \frac{n\ldots(n-p+1)}{n^p}\frac{1}{p!} = \left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right)\ldots\left(1 - \frac{p-1}{n}\right)\frac{1}{p!} \leq \frac{1}{p!}.$$

As $n+1$ parcelas $\binom{n}{p}\frac{1}{n^p}$ da expansão de $(1 + \frac{1}{n})^n$ são múltiplas positivas de $\frac{1}{p!}$. Se n cresce, o número de parcelas e o coeficiente de $\frac{1}{p!}$ crescem e assim $(b_n)_{\mathbb{N}}$ é crescente. De (*) obtemos

$$b_n \leq 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!}$$

e, pelo Exemplo 2.23 1(d) temos $b_n < 3$, para todo n. Logo, (b_n) converge em $\mathbb{R}$.

O limite de $(b_n)_{\mathbb{N}}$ é o **número de Euler** e.

(f) O **número de Euler** satisfaz

$$e = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \lim_{n\to+\infty}\left(1+1+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{n!}\right) = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n!}.$$

Prova.

◇ **A desigualdade direta.** No item (e) vimos que

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \leq 1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{n!},\ \text{para todo } n\in\mathbb{N}.$$

Donde segue a desigualdade direta

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \ \leq\ \lim_{n\to+\infty}\left(1+1+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{n!}\right).$$

◇ **A desigualdade reversa.** Observemos que

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \sum_{p=0}^{p=n}\binom{n}{p}\frac{1}{n^p}$$

$$= 1+1+\frac{n(n-1)}{2!}\frac{1}{n^2}+\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\frac{1}{n^3}+\cdots+\frac{n(n-1)\cdots[n-(n-1)]}{n!}\frac{1}{n^n}$$

$$= 1+1+\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)+\cdots+\frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{n-1}{n}\right).$$

Fixemos m tal que $m\leq n$. Então segue

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \geq$$

$$\geq 1+1+\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)+\cdots+\frac{1}{m!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{m-1}{n}\right).$$

A seguir, impondo $n\to+\infty$ concluímos que

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \geq 1+1+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{m!},\ \text{para todo } m\in\mathbb{N}.$$

A seguir, impondo $m\to+\infty$ obtemos

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \geq \lim_{m\to+\infty}\left(1+1+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{m!}\right).$$

Isto é, provamos que

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \ =\ \lim_{m\to+\infty}\left(1+1+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{m!}\right) \clubsuit$$

(g) A sequência $(\sqrt[n]{n}) = (1, \sqrt{2}, \sqrt[3]{3}, \sqrt[4]{4}, \ldots)$ converge a 1.

Verificação.

Mostremos que a sequência é, a partir do terceiro termo, decrescente e limitada inferiormente por 1. É óbvio que $\sqrt[n]{n} \geq 1$, $\forall n \in \mathbb{N}$, e

$$(n+1)^{\frac{1}{n+1}} < n^{\frac{1}{n}} \Leftrightarrow (n+1)^n < n^{n+1} \Leftrightarrow \frac{(n+1)^n}{n^n} < n \Leftrightarrow \left(1+\frac{1}{n}\right)^n < n \ ,$$

e então, como pelo exemplo 2.23 (e) acima temos

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < 3,$$

segue a desigualdade $\sqrt[n+1]{n+1} < \sqrt[n]{n}$, se $n \geq 3$. Pela Proposição 2.10(b) e Teorema 2.11, existe $L = \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n}$, com $L \geq 1$. Argumentando como nos Exemplos 2.23 1(a) e 1(b), e utilizando a igualdade $\lim \sqrt[n]{2} = 1$ [vide a Proposição 2.8 (c)], concluímos

$$L = \lim \sqrt[2n]{2n} = \lim \sqrt{\sqrt[n]{2n}} = \lim \sqrt{\sqrt[n]{2}\,\sqrt[n]{n}} = \sqrt{1.L} = \sqrt{L}\ .$$

Logo, $L = \sqrt{L}$, com $L \geq 1$; donde $L = 1$.

(2) (a) Se $a > 1$ então, $\lim_{n\to+\infty} \frac{a^n}{n^p} = +\infty$, para todo $p \in \mathbb{N}$.

Verificação.

Escrevemos $n = 1+\alpha, \alpha > 0$. Se $n > p$ temos,

$$\frac{(1+\alpha)^n}{n^p} = \frac{1}{n^p}\sum_{m=0}^{n}\binom{n}{m}\alpha^m \geq \binom{n}{p+1}\frac{\alpha^{p+1}}{n^p} = n\frac{(n-1)(n-2)...(n-p)}{n^p}\alpha^{p+1},$$

e é claro que

$$\lim_{n\to+\infty} n\frac{(n-1)(n-2)\cdots(n-p)}{n^p}\,\alpha^{p+1} = +\infty.$$

(b) $\lim_{n\to+\infty} \frac{z^n}{n!} = 0$, para todo $z \in \mathbb{C}$.

Verificação. O caso $z = 0$ é óbvio.

Suponhamos $z \neq 0$. Seja $n_0 \in \mathbb{N}$, com $\frac{n_0}{|z|} > 2$. Para $n > n_0$ obtemos

$$\frac{n!}{|z|^n} = \frac{n_0\,!}{|z|^{n_0}}\frac{n_0+1}{|z|}\cdots\frac{n}{|z|} > \frac{n_0\,!}{|z|^{n_0}}2^{n-n_0}\,.$$

Donde,

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{n!}{|z|^n} \geq \lim_{n\to+\infty}\frac{n_0\,!}{|z|^{n_0}}\,2^{n-n_0} = +\infty$$

$$\text{e } \lim_{n\to+\infty}\frac{|z|^n}{n!} = \lim_{n\to+\infty}\frac{z^n}{n!} = 0.$$

2.8 - Compacidade.

Dizemos que $K \subset \mathbb{R}^2$ é compacto se K tem a Propriedade de Heine-Borel: *toda cobertura de K por conjuntos abertos admite uma subcobertura finita. Isto é,*

$$\textit{se } K \subset \bigcup_{j\in J} O_j, \textit{ com } J \textit{ um conjunto de índices e cada } O_j \textit{ aberto em } \mathbb{R}^2,$$

então existem $j_1, \ldots, j_N \in J$ tais que

$$K \subset O_{j_1} \cup \cdots \cup O_{j_N}.$$

- Uma sequência de conjuntos $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é dita crescente se temos $X_n \subset X_{n+1}$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Ainda, $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é decrescente se temos $X_n \supset X_{n+1}$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Seja p é um ponto de acumulação de $X \subset \mathbb{R}^2$. Na bola $B(p;1)$ existe um ponto p_1 de $X \smallsetminus \{p\}$. Analogamente, na bola $B(p;r_2)$ de raio $r_2 = \min(1/2, |p_1 - p|)$ existe um ponto p_2 de $X \smallsetminus \{p\}$. Iterando o argumento construímos uma sequência (p_n) de pontos distintos de $X \smallsetminus \{p\}$ tal que p_n pertence à bola $B(p;r_n)$ de raio $r_n = \min(1/n, |p_{n-1} - p|)$. A sequência (p_n) converge a p. Assim, para todo $\epsilon > 0$, a bola $B(p;\epsilon)$ contém infinitos pontos de $X \smallsetminus \{p\}$.

2.24 Teorema. *Seja K um subconjunto não vazio de $\mathbb{R}^2$. São equivalentes:*

(a) K é compacto.

(b) K é fechado e limitado (Teorema de Heine, 1872 - Borel, 1895).

(c) Todo subconjunto infinito de K tem ponto de acumulação em K (Propriedade de Bolzano-Weierstrass).

(d) Toda sequência em K tem subsequência convergente em K (Frechet, 1906 - Definição de espaço sequencialmente compacto).

Prova.

$(a) \Rightarrow (b)$ Dado $z \in K^c$, temos $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} D(z;1/n) = \{z\}$ (v. Figura 2.3).

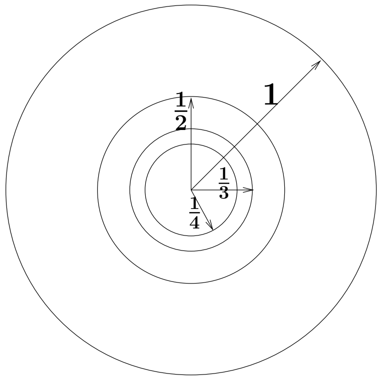

Figura 2.3: Ilustração 1 à prova do Teorema de Heine-Borel.

Então $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} D(z;1/n)^c = \{z\}^c = \mathbb{R}^2 \setminus \{z\}$, é uma cobertura de K por uma sequência crescente de abertos. Por hipótese, existe N tal que $K \subset D(z;1/N)^c$. Donde

$$K^c \supset D(z;1/N) \supset B(z;1/N) \supset \{z\}.$$

Logo, K^c é aberto e K é fechado. Vejamos que K é limitado. Já que $K \subset \bigcup_{z\in K} B(z;1)$, obtemos $z_1,\dots,z_n$ em K com $K \subset B(z_1;1)\cup\cdots\cup B(z_n;1)$. É claro que $K \subset D\big(0;|z_1|+\cdots+|z_n|+1\big)$ [vide Figura 2.4].

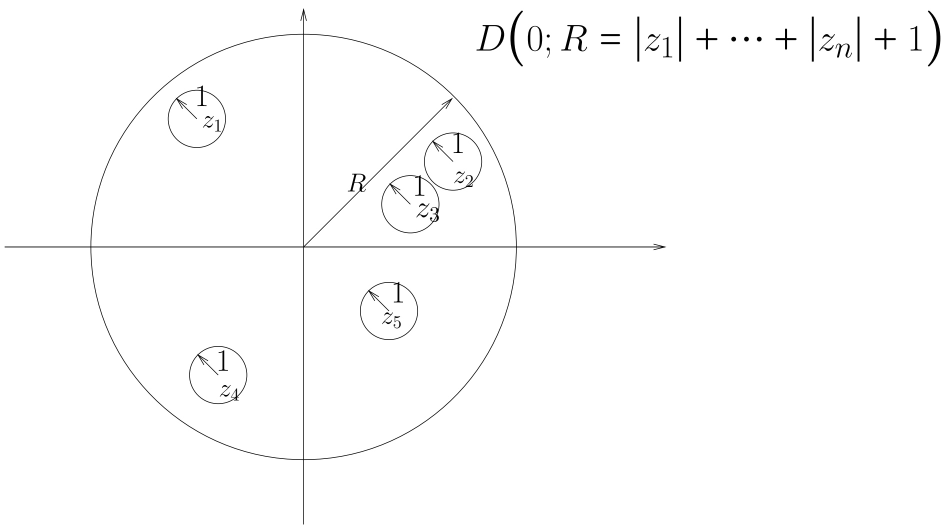

Figura 2.4: Ilustração 2 à prova do Teorema de Heine-Borel.

(b) $\Rightarrow$ (c) Seja Z um subconjunto infinito de pontos distintos de K. Seja Q_0 um quadrado fechado e limitado, com arestas de comprimento L, contendo K. É óbvio que Q_0 contém infinitos pontos de Z. Tendo construído o quadrado Q_n, com arestas de comprimento $L/2^n$, tal que $Q_n \cap Z$ é infinito, divimos Q_n em quatro sub-quadrados, com arestas de comprimento $L/2^{n+1}$, e escolhemos o sub-quadrado Q_{n+1} com infinitos pontos de Z (Fig. 2.5).

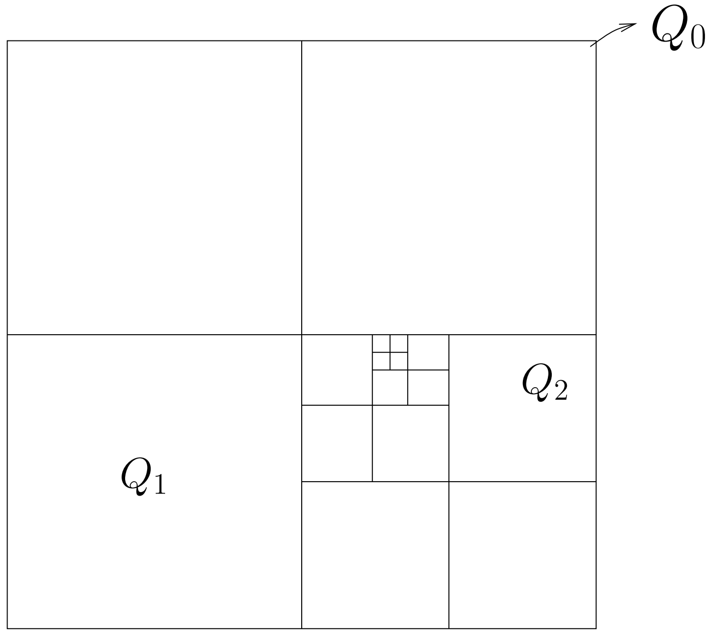

Figura 2.5: Esboço à prova da Propriedade de Bolzano-Weierstrass.

Construímos por indução uma sequência infinita de quadrados Q_n. Pelo Princípio dos Intervalos Encaixantes temos

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} Q_n = \{p\},$$

com p em $\mathbb{R}^2$.

Toda bola aberta centrada em p contém algum Q_n, com infinitos pontos de Z. Logo, p é um ponto de acumulação de Z. Ainda, $p \in \overline{Z} \subset \overline{K} = K$.

(c) $\Rightarrow (d)$ Seja $(z_n)_{\mathbb{N}}$ em K. Se $Z = \{z_n : n \in \mathbb{N}\}$ é finito então, existe $J = \{n_1 < n_2 < ...\}$ tal que (z_{n_k}) é constante e convergente. Se Z é infinito, por hipótese Z tem um ponto de acumulação $z \in K$. Então, toda bola $B(z;r)$, $r > 0$, contém infinitos pontos de Z. Assim, existem índices $n_1 < \cdots < n_k < \cdots$ tais que $z_{n_k} \in B(z;1/k)$ para cada k. Claramente (z_{n_k}) converge a $z \in K$.

(d) $\Rightarrow (a)$ Seja O aberto em $\mathbb{R}^2$. Dado $z \in O$, existe $n = n(z)$ tal que $B(z;1/n) \subset O$. Como $\mathbb{Q}\times\mathbb{Q}$ é denso em $\mathbb{R}^2$, existe $w = w(z;n) \in \mathbb{Q}\times\mathbb{Q}$ tal que $|w-z| < \frac{1}{2n}$. É fácil ver que $z \in B\big(w;\frac{1}{2n}\big) \subset O$ (vide Figura 2. 6).

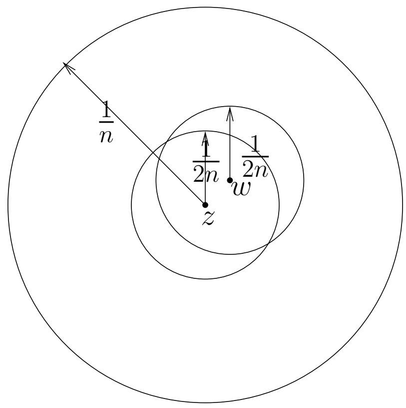

Figura 2.6: Ilustração à prova da Propriedade de Heine-Borel.

Logo, $O = \bigcup_{z\in O} B\big(w(z;n);\frac{1}{2n}\big)$. Assim, todo aberto O é uma união enumerável de bolas abertas da coleção enumerável $\mathcal{C} = \{B_1, B_2, \ldots, B_n, \ldots\}$, todas centradas em pontos de coordenadas racionais e de raio racional.

Desta forma, dada $\bigcup_{j\in J} O_j$ uma cobertura de K por conjuntos abertos, podemos extrair dela uma subcobertura enumerável $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} O_n$ de K. Trocando O_n por $O_1 \cup \cdots \cup O_n$, para todo $n \in \mathbb{N}$, podemos supor, sem perder a generalidade, que (O_n) é uma sequência crescente de abertos.

Suponhamos que $\bigcup_n O_n$ não admite uma subcobertura finita.

Então, para cada $n \in \mathbb{N}$, existe $z_n \in K \setminus O_n$. Por hipótese, a sequência (z_n) tem subsequência (z_{n_k}) convergente a $z \in K$. Assim, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $z \in O_N$. Logo, existe $n_k > N$ tal que $z_{n_k} \in O_N$. Por outro lado, por construção $z_{n_k} \notin O_{n_k}$ e $O_{n_k} \supset O_N$. Donde, $z_{n_k} \notin O_N$ ↯

2.9 - Continuidade

Consideramos uma função $f = f(z) : A \to \mathbb{C}$, com $\varnothing \neq A \subset \mathbb{C}$, e z_0 um ponto de acumulação de A (i.e., $z_0 \in A'$, o derivado de A) e w_1 e w_2 pontos em $\mathbb{C}$.

2.25 Definição. *Dado $z_0 \in A'$, dizemos $w_0 \in \mathbb{C}$ é o* limite de $f = f(z)$, para z tendendo a z_0, *se para todo $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que*

$$\textit{se } z \in A \cap [B(z_0;\delta) \smallsetminus \{z_0\}] \textit{então } |f(z) - w_0| < \epsilon \ .$$

Escrevemos então, $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = w_0$.

2.26 Proposição *Se* $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = w_1$ *e* $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = w_2$ *então* $w_1 = w_2$.

Prova. Seja $\epsilon > 0$ arbitrário.

Existem $\delta_1 > 0$ e $\delta_2 > 0$ tais que, para $j = 1$ e para $j = 2$, temos as implicações

$$z \in A \cap [B(z_0;\delta_j) \smallsetminus \{z_0\}] \Rightarrow |f(z) - w_j| < \frac{\epsilon}{2}.$$

Fixando $z \in A \cap [B(z_0;\delta) \smallsetminus \{z_0\}]$, com $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$, concluímos

$$|w_1 - w_2| \leq |w_1 - f(z)| + |f(z) - w_2| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon \clubsuit$$

Com as notações $z = x + iy$, $x = \mathrm{Re}(z)$ e $y = \mathrm{Im}(z)$, escrevamos

$$f(z) = u(x,y) + iv(x,y),$$

onde $u(x,y) = \mathrm{Re}f(z)$ e $v(x,y) = \mathrm{Im}f(z)$ são funções a valores reais.

Abaixo consideramos os números complexos $z_0 = x_0 + iy_0$ e $w_0 = u_0 + iv_0$.

2.27 Proposição. *É válida a propriedade,*

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = w_0 \textit{ se e somente se } \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} u(x,y) = u_0 \textit{ e } \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} v(x,y) = v_0.$$

Prova. Imediata pois,

$$0 \leq \max\big(|u(x,y) - u_0|, |v(x,y) - v_0|\big) \leq |f(z) - w_0| \leq |u(x,y) - u_0| + |v(x,y) - v_0| \clubsuit$$

2.28 Proposição. *Consideremos as funções* $f_1 : A \to \mathbb{C}$ *e* $f_2 : A \to \mathbb{C}$ *e* $z_0 \in A'$. *Suponhamos* $\lim_{z\to z_0} f_j(z) = w_j \in \mathbb{C}$, *com* $j = 1, 2$, *e* $\lambda \in \mathbb{C}$. *Valem as propriedades:*

(a) $\lim_{z\to z_0} \lambda f_1(z) = \lambda w_1$. *(b)* $\lim_{z\to z_0} (f_1 + f_2)(z) = w_1 + w_2$.

(c) $\lim_{z\to z_0} f_1(z) f_2(z) = w_1 w_2$. *(d)* $\lim_{z\to z_0} \frac{1}{f_1(z)} = \frac{1}{w_1}$, *se* $w_1 \neq 0$.

Prova. Seja $\epsilon > 0$ arbitrário.

(a) Se $\lambda \neq 0$, existe $\delta > 0$ tal que se $z \in A \cap [B(z_0;\delta) \smallsetminus \{z_0\}]$ então

$$|f_1(z) - w_1| < \frac{\epsilon}{|\lambda|}$$

e portanto $|\lambda f_1(z) - \lambda w_1| < \epsilon$.

O caso $\lambda = 0$ é trivial.

(b) Existem $\delta_1 > 0$ e $\delta_2 > 0$ tais que, para $j = 1$ e $j = 2$, se $z \in A \cap [B(z_0;\delta_j) \smallsetminus \{z_0\}]$ então

$$|f_j(z) - w_j| < \frac{\epsilon}{2}.$$

Logo, se $\delta = \min(\delta_1, \delta_2) > 0$ e $z \in A \cap [B(z_0;\delta) \smallsetminus \{z_0\}]$ então temos

$$|\,[f_1(z) + f_2(z)] - [w_1 + w_2]| \leq |f_1(z) - w_1| + |f_2(z) - w_2| < \epsilon.$$

(c) e (d) Deixamos ao leitor ♣

Para definirmos a continuidade de uma função $f : A \to \mathbb{C}$ em um ponto z_0 é necessário que $z_0 \in A$, mas não é preciso que z_0 seja ponto de acumulação de A.

2.29 Definição. *Seja* $f : A \to \mathbb{C}$ *e* $z_0 \in A$.

- f contínua *em* z_0 *se* $\forall \epsilon > 0$ *existe* $\delta > 0$ *tal que: se* $z \in B(z_0;\delta) \cap A$ *então* $|f(z) - f(z_0)| < \epsilon$ *ou, equivalentemente,* $f\big(B(z_0;\delta) \cap A\big) \subset B(f(z_0);\epsilon)$
- f *é* contínua em A *se é contínua em todos os pontos de* A.

Assim, toda função $f : A \to \mathbb{C}$ é contínua em todos os pontos isolados de A. Se z_0 é ponto de acumulação de A então, f é contínua em z_0 se e somente se

$$\lim_{z\to z_0} f(z) = f(z_0)\ .$$

2.30 Proposição. *Sejam* $f_1, f_2 : A \to \mathbb{C}$ *contínuas em* $z_0 \in A$ *e* $\lambda \in \mathbb{C}$.

(a) As funções λf_1, $f_1 + f_2$ *e* $f_1 f_2$ *são contínuas em* z_0.

(b) Se $f_1(z_0) \neq 0$, *a função*

$$\frac{1}{f_1} : \{z \in A : f_1(z) \neq 0\} \to \mathbb{C}$$

é contínua em z_0.

Prova.

Se z_0 é ponto isolado de A, claramente (a) e (b) valem. Se z_0 é ponto de acumulação de A, basta empregar a Proposição 2.28 e o comentário acima ♣

2.31 Proposição. *Sejam* $f : A \to B$ *e* $g : B \to \mathbb{C}$, *com* $A \subset \mathbb{C}$ *e* $B \subset \mathbb{C}$. *Suponhamos ainda que* $\lim_{z \to z_0} f(z) = w_0 \in B$ *e que* g *é contínua em* w_0. *Então,*

$$\lim_{z \to z_0} g\big(f(z)\big) = \lim_{w \to w_0} g(w) = g(w_0) \ .$$

Prova.

Utilizemos a notação $B^*(z_0;\delta) = B(z_0;\delta) \setminus \{z_0\}$. [Chamamos $B^*(z_0;\delta)$ de bola reduzida de centro z_0 e raio δ.]

Seja $\epsilon > 0$ arbitrário. Por hipótese, existe $r > 0$ tal que

$$g\big(B(w_0;r) \cap B\big) \subset B\big(g(w_0);\epsilon\big).$$

Para tal r, existe $\delta > 0$ tal que

$$f\big(A \cap B^*(z_0;\delta)\big) \subset B(w_0;r) \cap B.$$

Consequentemente,

$$g\Big[f\big(A \cap B^*(z_0;\delta)\big)\Big] \subset g\big(B(w_0;r) \cap B\big) \subset B\big(g(w_0);\epsilon\big) \clubsuit$$

2.32 Corolário. *Se* $f : A \to \mathbb{C}$ *é contínua em* z_0, $g : B \to \mathbb{C}$ *é contínua em* $f(z_0)$ *e* $f(A) \subset B$, *então a função composta* $g \circ f$ *é contínua em* z_0.

Prova. Segue da Proposição 2.31♣

2.33 Proposição. *Seja* $A \subset \mathbb{K}$ *e* $z_0 \in A'$. *Suponhamos que* $f : A \to \mathbb{K}$ *é uma função tal que*

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = L.$$

Seja $(z_n) \subset A \setminus \{z_0\}$ *tal que* $\lim z_n = z_0$. *Temos:*

(a) $\lim f(z_n) = L$.

(b) Se f *é contínua em* z_0 *então,* $\lim f(z_n) = f(z_0)$.

Prova. Seja $\epsilon > 0$ arbitrário.

(a) Seja $\delta > 0$ tal que se $0 < |z - z_0| < \delta$, e $z \in A$, então $|f(z) - L| < \epsilon$. Por hipótese, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $|z_n - z_0| < \delta$ se $n \geq n_0$. Logo,

$$\text{se } n > n_0 \text{ então } |f(z_n) - L| < \epsilon.$$

(b) Segue de (a)♣

2.34 Corolário. *Sejam* $A \subset \mathbb{C}$ *e* $f : A \to \mathbb{C}$. *Então,* f *é contínua em* $z_0 \in A$ *se e só se temos* $\lim f(z_n) = f(z_0)$ *para toda sequência* $(z_n) \subset A$ *tal que* $\lim z_n = z_0$.

Prova. Solicitamos ao leitor verificar ♣

2.35 Teorema. *Seja* $f : K \to \mathbb{C}$ *contínua e* K *compacto em* $\mathbb{C}$. *Então,* $f(K)$ *é compacto.*

Prova.

Dada uma sequência $\big(f(z_n)\big)$ em $f(K)$, com $(z_n) \subset K$, pelo Teorema 2.24(d) existe uma subsequência (z_{n_k}) convergente a um ponto $z \in K$. Pelo Corolário 2.34 segue

$$\lim f(z_{n_k}) = f(z).$$

Logo, pelo Teorema 2.24(d), $f(K)$ é compacto ♣

Uma $f : A \to \mathbb{C}$ é limitada se existe M tal que $|f(a)| \leq M$, para todo $a \in A$.

2.36 Teorema de Bolzano-Weierstrass. *Seja K compacto em $\mathbb{C}$ e $f : K \to \mathbb{R}$ contínua. Então, f assume máximo e mínimo em K.*

Prova.

Trocando f por $-f$, vemos que basta mostrar que f assume um máximo.

Pelo Teorema 2.35, a imagem $f(K)$ é limitada e fechada. Pelas propriedade do supremo e da aproximação, existe $M = \sup f(K)$ com M em $\overline{f(K)} = f(K)$♣

2.37 Definição. *Uma função $f : X \to \mathbb{C}$, onde $X \subset \mathbb{C}$, é* uniformemente contínua *se, dado $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ satisfazendo*

$$|f(p) - f(q)| < \epsilon \text{ se } |p - q| < \delta \quad [\text{onde } p \in X \text{ e } q \in X].$$

2.38 Teorema. *Sejam K um compacto, em $\mathbb{C}$, e $f : K \to \mathbb{C}$ contínua. Então, f é uniformemente contínua.*

Prova. Por contradição.

Seja $\epsilon > 0$ tal que para todo $\delta_n = 1/n$, existem a_n e b_n, ambos em K, tais que

$$|a_n - b_n| < \frac{1}{n} \text{ e } |f(a_n) - f(b_n)| > \epsilon, \text{ para todo } n = 1, 2, 3, \ldots.$$

Pelo Teorema 2.24(d), a sequência (a_n) tem uma subsequência (a_{n_k}) convergente a algum p em K [a sequência (n_k) é estritamente crescente e $n_k \to \infty$ se $k \to \infty$]. Se $k \to \infty$, então $\frac{1}{n_k} \to 0$ e portanto

$$|a_{n_k} - b_{n_k}| \to 0.$$

Logo, a sequência (b_{n_k}) também converge a p. Pela continuidade de f segue

$$0 < \epsilon \leq \lim_{k \to +\infty} |f(a_{n_k}) - f(b_{n_k})| = |f(p) - f(p)| = 0 \lightning$$

2.39 Definição. *Uma função $f : X \to \mathbb{C}$, onde $X \subset \mathbb{C}$, é* de Lipschitz *se existe $C > 0$ satisfazendo*

$$|f(p) - f(q)| \leq C|p - q|, \text{ para quaisquer } p \text{ e } q \text{ no conjunto } X.$$

2.10 - Conexidade em $\mathbb{R}$ e em $\mathbb{C}$

Seja $X \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$. Destaquemos que

$$\{U \cap X : U \text{ é aberto em } \mathbb{R}\} = \{V \cap X : V \text{ é aberto em } \mathbb{C}\}.$$

[Se U é aberto em $\mathbb{R}$, temos $U = V \cap \mathbb{R}$ com V aberto em $\mathbb{C}$ e consequentemente $U \cap X = V \cap \mathbb{R} \cap X = V \cap X$. Por outro lado, se V é aberto em $\mathbb{C}$, temos $V \cap X = V \cap X \cap \mathbb{R} = (V \cap \mathbb{R}) \cap X$ com $V \cap \mathbb{R}$ aberto em $\mathbb{R}$.]

Se A e B são conjuntos disjuntos indicamos sua união disjunta por

$$A \uplus B.$$

Dizemos que $X \subset \mathbb{R}$ é um intervalo se dados $a, b \in X$, então $\{t : a \leq t \leq b\} \subset X$.

O conjunto $\varnothing$ e também todo conjunto unitário $\{x\}$, onde $x \in \mathbb{R}$, são intervalos.

2.40 Definição. *Seja $X \subset \mathbb{K}$. Um subconjunto A de X é* aberto em X *se existe um aberto O em $\mathbb{K}$ tal que*

$$A = O \cap X.$$

Analogamente, um subconjunto B de X, é fechado em X *se existe um fechado F em $\mathbb{K}$ tal que*

$$B = F \cap X.$$

É fácil ver que A é aberto em X se e só se $X \setminus A$ (o complementar de A em relação a X) é fechado em X. Basta notarmos que dados X e O em $\mathbb{K}$ temos,

$$A = O \cap X \Leftrightarrow X \setminus A = (\mathbb{K} \setminus O) \cap X,$$

e também que um conjunto O é aberto em $\mathbb{K}$ se e só se $\mathbb{K} \setminus O$ é fechado em $\mathbb{K}$.

Os conjuntos X e $\varnothing$ são ambos abertos e fechados em X.

2.41 Definição. *Seja $X \subset \mathbb{K}$. Dizemos que X é*

- conexo, *se seus únicos subconjuntos abertos e fechados em X são: X e $\varnothing$;*
- desconexo, *se X não é conexo.*

Intuitivamente, um conjunto conexo é formado por "um único pedaço".

Dado $X \subset \mathbb{K}$, temos que X é desconexo se e somente se existe $A \subset X$, com $A \neq \varnothing$ e $A \neq X$, tal que A é aberto em X e também fechado em X. Assim decompomos

$$X = A \cup (X \setminus A),$$

com A e $X \setminus A$ não vazios, disjuntos e abertos em X.

O par (A, B), com $B = X \setminus A$, é chamado uma cisão de X.

Segue que X é conexo se e somente se X não admite uma cisão.

Claramente $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ é desconexo, e o par $\big((-\infty, 0), (0, +\infty)\big)$ cinde $\mathbb{R}^*$.

O conjunto $\varnothing$ é conexo. Todo conjunto unitário $X = \{x\} \subset \mathbb{K}$ é conexo.

2.42 Definição. *Dizemos que $X \subset \mathbb{C}$ é* conexo por caminhos *se dados $p \in X$ e $q \in X$, existe uma curva (caminho) contínua em X que une (conecta) p e q:*

$$\gamma : [0,1] \to X \quad \textit{tal que} \quad \gamma(0) = p \quad \textit{e} \quad \gamma(1) = q\ .$$

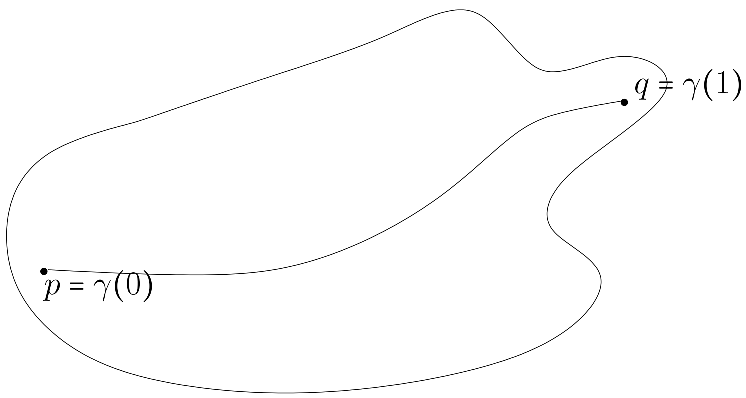

Figura 2.7: Ilustração a um conjunto conexo por caminhos

Um conjunto $X \subset \mathbb{C}$, é convexo se dados $p \in X$ e $q \in X$ então, o segmento

$$[p, q] = \{p + t(q - p) : 0 \leq t \leq 1\}$$

está contido em X. Evidentemente, todo conjunto convexo é conexo por caminhos.

O conjunto ilustrado na figura acima não é convexo.

2.43 Proposição. *Seja $X \subset \mathbb{C}$, com X conexo por caminhos. Então, X é conexo.*

Prova. Por contradição.

Suponhamos existir uma cisão (A, B) de X. Então, existem $a \in A$ e $b \in B$ $[a \neq b]$. Seja $\gamma : [0,1] \to X = A \cup\!\!\!\cdot\, B$ uma curva contínua com $\gamma(0) = a$ e $\gamma(1) = b$.

O conjunto

$$T = \{t \in [0,1] : \gamma(t) \in A\}$$

é não vazio e limitado. Sejam $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ abertos em $\mathbb{C}$ tais que $A = \mathcal{A} \cap X$ e $B = \mathcal{B} \cap X$. Então, $\gamma(0) = a \in \mathcal{A}$ e $\gamma(1) = b \in \mathcal{B}$ e, como γ é contínua, existe $\epsilon > 0$ tal que $\gamma\big(\,[0,\epsilon)\,\big) \subset \mathcal{A} \cap X = A$ e $\gamma\big(\,(1-\epsilon, 1]\,\big) \subset \mathcal{B} \cap X = B$. Logo, $t_0 = \sup T \in (0,1)$ e, então, ou $\gamma(t_0) \in A$ ou $\gamma(t_0) \in B$. Analisemos tais possibilidades.

- ⋄ Se $\gamma(t_0) \in A = \mathcal{A} \cap X$ então existe $r > 0$ tal que $\gamma\big((t_0 - r, t_0 + r)\big) \subset \mathcal{A} \cap X = A$ ↯
- ⋄ Se $\gamma(t_0) \in B = \mathcal{B} \cap X$ então existe $r > 0$ tal que $\gamma\big(\,(t_0 - r, t_0 + r)\,\big) \subset \mathcal{B} \cap X = B$. Mas, por definição de sup, no intervalo $(t_0 - r, t_0]$ existe t_1 tal que $\gamma(t_1) \in A$ ↯

Exercício. O conjunto $X = \Big\{\big(x, \sin\frac{1}{x}\big) : 0 < x \leq 1\Big\} \bigcup \{(0,0)\}$ é conexo mas não é conexo por caminhos.

2.44 Corolário. *Seja $\gamma : [0,1] \to \mathbb{C}$ contínua. Então, a imagem de γ é conexa.*

Prova. A imagem de γ é um conjunto conexo por caminhos. Logo, conexo♣

2.45 Teorema. *Seja $X \subset \mathbb{R}$. Então, X é conexo se e só se X é um intervalo.*

Prova. Já vimos que $X = \emptyset$ e X unitário são conexos e também intervalos.

($\Rightarrow$) Por contradição. Consideremos distintos $a, b \in X$ e um ponto $c \in (a,b) \setminus X$. O par $\big(\,(-\infty, c) \cap X, (c, +\infty) \cap X\,\big)$ cinde X ↯

($\Leftarrow$) Todo intervalo é convexo. Logo, conexo por caminhos e então conexo♣

2.46 Teorema do Valor Intermediário. *Seja $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ contínua. Seja c um número real entre $f(0)$ e $f(1)$. Então, existe $t \in [0,1]$ tal que $f(t) = c$.*

Prova. Pelo Corolário 2.44 e Teorema 2.45, a imagem de f é um intervalo♣

Uma **componente** de X, com $X \subset \mathbb{C}$, é um subconjunto conexo maximal de X.

Seja $X \subset \mathbb{C}$ e J um conjunto de índices. As seguintes propriedades são válidas.

(a) Se C_j é conexo, onde $C_j \subset X$ para cada $j \in J$, e $\bigcap_{j \in J} C_j \neq \emptyset$, então

$$\bigcup_{j \in J} C_j \text{ é conexo.}$$

(b) Dado $x \in X$, existe uma (única) componente de X que contém x.

(c) As componentes distintas de X são disjuntas.

(d) X se decompõe de forma única como união de uma família $(\mathcal{C}_j)_{j \in J}$ de conjuntos conexos maximais (**componentes conexas**) dois a dois disjuntos.

Verificação.

(a) Por hipótese, podemos considerar um ponto ω na intersecção $\bigcap_J C_j$.

Seja A um subconjunto de $\bigcup_J C_j$, com A aberto e fechado em $\bigcup_J C_j$. Então, o complementar $B = (\bigcup_J C_j) \setminus A$ também é aberto e fechado em $\bigcup_J C_j$.

Evidentemente, $\omega \in A$ ou $\omega \in B$.

Basta então mostrarmos que se $\omega \in A$ então $A = \bigcup_J C_j$. Suponhamos $\omega \in A$.

Fixemos $j \in J$. É trivial verificar que $A \cap C_j$ é aberto e fechado em C_j. Obviamente, $\omega \in A \cap C_j$. Portanto, já que C_j é conexo temos $A \cap C_j = C_j$.

Mostramos que $C_j \subset A$ para todo j. Portanto, $A = \bigcup_J C_j$.

(b) Seja $C(x)$ a união dos subconjuntos conexos de X que contém x [como $\{x\}$ é conexo, $x \in C(x)$]. Por (a), o conjunto $C(x)$ é conexo.

Supondo $C(x) \subset Y \subset X$, com Y conexo, segue que $x \in Y$ e $Y \subset C(x)$. Logo, $Y = C(x)$. Isto é, $C(x)$ é um conexo maximal. Concluímos então que $C(x)$ é uma componente contendo x.

(c) Segue trivialmente de (a). Por favor, verifique.

(d) Segue de (b) e (c). Por favor, verifique.

2.11 - Apêndice - Conexidade em Espaços Métricos

Fixemos um espaço métrico (X,d). Indiquemos tal espaço métrico por X.

Analogamente a $\mathbb{K}$, o espaço métrico X é dito conexo se seus únicos subconjuntos que são abertos e também fechados são $\varnothing$ e X. Ainda, X é desconexo (não conexo) se existirem subconjuntos abertos, e também fechados, A e B de X, não vazios e disjuntos e satisfazendo

$$X = A \cup B.$$

O par (A,B) é uma cisão de X.

Se $C \subset X$, então C é um subconjunto conexo do espaço métrico (X,d) se o sub-espaço métrico (C,d) é conexo. Uma componente (conexa) de X é um subconjunto conexo maximal [que indicaremos por $\mathcal{C}$] de X.

Seja Y contido em X. Consideremos em Y a métrica induzida pela métrica de X. Abusando da notação, indiquemos ainda por d a métrica então induzida. É trivial mostrar que um conjunto é aberto no espaço métrico (Y,d) se e somente se ele é da forma $O\cap Y$, com O aberto em X. Passando ao complementar, temos

$$Y \setminus (O \cap Y) = (X \setminus O) \cap Y$$

e vemos que um conjunto é fechado em Y se e só se ele é da forma $F \cap Y$, com F fechado em X. O conjunto $O \cap Y$ é dito um aberto relativo. Analogamente, o conjunto $F \cap Y$ é chamado um fechado relativo.

É costume chamar os abertos [fechados] de Y de abertos relativos [fechados relativos], para evitar confundi-los com os abertos e fechados de X. Abertos [fechados] relativos de Y não são necessariamente abertos [fechados] de X.

Segue então que Y [com $Y \subset X$] é desconexo se e somente existem A e B abertos em X satisfazendo $Y = (A\cap Y) \cup (B \cap Y)$, com $A\cap Y$ e $B\cap Y$ não vazios. Observemos que $A\cap Y$ e $B\cap Y$ são abertos relativos e também fechados relativos.

A noção de conexidade é absoluta. Isto é, dados C, Y e X, com $C \subset Y \subset X$, então C é conexo em Y se e somente se C é conexo em X. Isto é verdade pois a métrica que X induz em C e a métrica que Y induz em C são as mesmas.

2.47 Proposição. *Seja* (X, d) *um espaço métrico.*

(a) Se C_j *é conexo, com* $C_j \subset X$ *e* $j \in J$*, e* $\bigcap_{j \in J} C_j \neq \varnothing$*, então* $\bigcup_{j \in J} C_j$ *é conexo.*

(b) Dado $x \in X$*, existe uma (única) componente de* X *que contém* x*.*

(c) As componentes distintas de X *são disjuntas.*

(d) X *se decompõe de forma única como união de uma família* $(\mathcal{C}_j)_{j \in J}$ *de conjuntos conexos maximais (*componentes conexas*) dois a dois disjuntos.*

(e) Se C *é um subconjunto conexo de* X *então* $\overline{C}$ *é conexo.*

(f) As componentes de X *são fechadas.*

Prova.

(a) Seja A um subconjunto de $\bigcup_J C_j$, com A aberto e fechado em $\bigcup_J C_j$ e não vazio. É então fácil ver que $A \cap C_j$ é aberto e fechado em C_j, para cada j. Já que C_j é conexo, temos $A \cap C_j = \varnothing$ ou $A \cap C_j = C_j$. Como $A \neq \varnothing$, existe j_A em J tal que $A \cap C_{j_A} \neq \varnothing$. Logo, $A \cap C_{j_A} = C_{j_A}$ e $C_{j_A} \subset A$. Então, devido à hipótese, para j arbitrário temos $\varnothing \neq C_j \cap C_{j_A} \subset C_j \cap A$, com $C_j \cap A$ aberto e fechado em C_j. Pela conexidade de C_j segue $C_j \cap A = C_j$. Logo, $A = \bigcup_J C_j$.

(b) Seja $C(x)$ a união dos subconjuntos conexos de X que contém x [como $\{x\}$ é conexo, $x \in C(x)$]. Por (a), o conjunto $C(x)$ é conexo. Supondo $C(x) \subset Y \subset X$, com Y conexo, segue que $x \in Y$ e $Y \subset C(x)$. Logo, $Y = C(x)$. Isto é, $C(x)$ é um conexo maximal, donde uma componente, contendo x.

(c) Segue trivialmente de (a). Por favor, verifique.

(d) Segue de (b) e (c). Por favor, verifique.

(e) Seja $\overline{C} = A \cup B$ uma cisão de $\overline{C}$, com $A = \mathcal{A} \cap \overline{C}$ e $\mathcal{A}$ aberto em X. Então, A é um aberto (relativo) não vazio em $\overline{C}$ e portanto $A \cap C$ é não vazio. Também temos $A \cap C = \mathcal{A} \cap C$ e portanto $A \cap C$ é aberto (relativo) em C. Analogamente para B. Assim, $C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$ é uma cisão para C↯

(f) Se $\mathcal{C}$ é uma componente de X, por (e) o conjunto $\overline{\mathcal{C}}$ é conexo. Como $\overline{\mathcal{C}}$ contém o conexo maximal $\mathcal{C}$, concluímos que $\overline{\mathcal{C}} = \mathcal{C}$♣

2.12 - Apêndice - Espaços Métricos

Listamos aqui as principais definições e propriedades de espaços métricos.

Seja X um conjunto não vazio.
Uma métrica sobre X é uma função $d : X \times X \to \mathbb{R}$ tal que:

- $d(x,y) \geq 0$, para todo (x,y) em $X \times X$, e $d(x,y) = 0$ se e somente se $x = y$.
- (simetria) $d(x,y) = d(y,x)$, para todo (x,y) em $X \times X$.
- (desigualdade triangular) $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$, para todos x, y, z em X.

Notação. Consideremos x em X e um número $r > 0$.

- $B(x;r) = \{y \in X : d(y;x) < r\}$, é a bola aberta de centro x e raio r.
- $D(x;r) = \{y \in X : d(y,x) \leq r\}$, é a disco de centro x e raio r.
- $S_r(x) = \{y \in X : d(y,x) = r\}$, é a circunferência de centro x e raio r.

Definição. Seja A um subconjunto de X.

- A é aberto se para cada $a \in A$ existe $r > 0$ tal que $B(a;r) \subset A$.
- A é fechado se $A^c = X \setminus A$ é um conjunto aberto.
- Um ponto $a \in A$ é ponto interior a A se existir $r > 0$ tal que $B(a;r) \subset A$. O interior do conjunto A é $\text{int}(A) = \{a \in A : a \text{ é ponto interior a } A\}$.
- Um ponto $x \in X$ é um ponto de aderência de A (ou, aderente a A) se temos $B(x;r) \cap A \neq \varnothing$, qualquer que seja $r > 0$. O fecho do conjunto A é
$$\overline{A} = \{x \in X : x \text{ é ponto de aderência de } A\}.$$
- Um ponto $x \in X$ é ponto de fronteira de A se para todo $r > 0$ temos
$$B(x;r) \cap A \neq \varnothing \quad \text{e} \quad B(x;r) \cap A^c \neq \varnothing.$$
A fronteira de A é $\partial A = \{x \in X : x \text{ é ponto de fronteira de } A\}$.

- Um ponto $x \in X$ é chamado um ponto de acumulação de A se temos

$$B(x;r) \cap (A \setminus \{x\}) \neq \varnothing, \text{ para todo } r > 0.$$

O derivado de A é o conjunto $A' = \{x \in X : x \text{ é ponto de acumulação de } A\}$.

- Um ponto $a \in A$, é um ponto isolado de A se existe algum $r > 0$ tal que

$$B(a;r) \cap A = \{a\}.$$

O conjunto A é discreto se todo ponto de A é isolado.

- O conjunto A é denso em X se $\overline{A} = X$.
- O diâmetro de A é $\mathrm{diam}(A) = \sup\{d(x,y) : x, y \in A\}$.
- O conjunto A é limitado se $\mathrm{diam}(A) < \infty$.
- Uma cobertura de A é uma família $\{V_j : j \in J\}$ de subconjuntos de X satisfazendo $A \subset \bigcup_{j \in J} V_j$.
- A é compacto se toda cobertura de A por conjuntos abertos (cobertura aberta) admite uma subcobertura finita.

Definição. Seja x um ponto em um espaço métrico X. Um conjunto $V \subset X$ é uma vizinhança de x se existir uma bola $B(x;r)$, com $r > 0$, contida em V.

Proposição. Seja X um espaço métrico. Valem as propriedades abaixo.

- X e $\varnothing$ são abertos e fechados.
- Toda bola aberta é um conjunto aberto.
- A união de qualquer família de conjuntos abertos é um conjunto aberto.
- A intersecção de uma família de conjuntos fechados é um conjunto fechado.
- A intersecção de uma família finita de conjuntos abertos é um aberto.
- A união uma família finita de conjuntos fechados é um conjunto fechado.

Proposição. Seja $A \subset X$, com (X, d) métrico. Valem as propriedades abaixo.

- ◇ $\partial A = \overline{A} \setminus \mathrm{int}(A)$.
- ◇ $\overline{A} = \mathrm{int}(A) \cup \partial A = A \cup A'$.
- ◇ A é fechado se e só se $A \supset \partial A$.
- ◇ A é fechado se e só se $A \supset A'$.

Definição. Seja $(x_n)_{\mathbb{N}}$ uma sequência contida em X. Dizemos que

- ∘ (x_n) converge a $x \in X$ se $\lim_{n \to +\infty} d(x_n, x) = 0$. Utilizamos as seguintes notações: $x_n \to x$ se $n \to +\infty$ e, $\lim x_n = x$, e também $x_n \xrightarrow{X} x$.
- ∘ (x_n) é uma sequência de Cauchy se, para todo $\epsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que temos $d(x_n, x_m) < \epsilon$, quaisquer que sejam $n, m \geq N$.

Proposição. Seja (X, d) um espaço métrico, (x_n) uma sequência em X e $x \in X$.

(a) Se (x_n) é de Cauchy e admite subsequência convergente a x, então $x_n \to x$.

(b) (x_n) admite uma subsequência convergente a x se e somente se para quaisquer $\epsilon > 0$ e N em $\mathbb{N}$, existe $n > N$ tal que $d(x_n, x) < \epsilon$.

Definição. Seja (X, d) um espaço métrico. Dizemos que

- ∘ X é separável se X contém um subconjunto denso e enumerável.
- ∘ X possui um base enumerável de abertos se existe uma coleção enumerável de abertos de X tal que todo aberto de X é uma reunião de elementos da citada coleção.
- ∘ X é completo se toda sequência em X e de Cauchy é convergente em X.

Proposição. Seja X um espaço métrico e $E \subset X$. Valem as propriedades abaixo.

- ◇ Xé separável se e somente se X possui uma base enumerável de abertos.
- ◇ Dado x em X, temos que $x \in \overline{E}$ se e só existe $(x_n)_{\mathbb{N}} \subset E$ tal que $x_n \to x$.
- ◇ Suponhamos X completo. Então, E é completo se e somente se E é fechado.

Definição. Sejam (X, d) e (Y, ρ) espaços métricos e $f : X \to Y$ uma função.

- Dizemos que f é contínua em $p \in X$ se para todo $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que

$$\rho\big(f(x), f(p)\big) < \epsilon, \text{ para todo } x \in X \text{ satisfazendo } d(x, p) < \delta.$$

  Ainda, f é contínua se f é contínua em cada ponto de X.

- Dizemos que f é uniformemente contínua se dado $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$\rho\big(f(x), f(x')\big) < \epsilon, \text{ para quaisquer } x, x' \in X \text{ satisfazendo } d(x, x') < \delta.$$

- Seja p um ponto de acumulação X e $L \in Y$. Escrevemos $\lim_{x \to p} f(x) = L$ se, para todo $\epsilon > 0$ existe algum $\delta > 0$ tal que temos

$$\rho(f(x), L) < \epsilon, \text{ para todo } x \text{ satisfazendo } 0 < d(x, p) < \delta.$$

- Dizemos que f é localmente uniformemente contínua se para cada $x \in X$ existir alguma vizinhança de x na qual f é uniformemente contínua.

- Dizemos que f é de Lipschitz ou lipschtziana se existe algum $M > 0$ tal que

$$\rho(f(x); f(x')) \leq M d(x; x'), \quad \text{quaisquer que sejam } x, x' \in X.$$

- Dizemos que f é localmente lipschitziana se para cada $x \in X$ existe alguma vizinhança V de x na qual f é lipschitziana.

- Dizemos que f é bicontínua (um homeomorfismo) se f é contínua, bijetora e

$$f^{-1} : Y \to X \quad \text{é também contínua.}$$

Proposição. Seja $f : (X, d) \to (Y, \rho)$ uma função. Valem as afirmações abaixo.

- f é contínua em um ponto $p \in X$ se e só se dado $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que

$$f\big(B(p; \delta)\big) \subset B\big(f(p); \epsilon\big).$$

- f é contínua se e só se $f^{-1}(O)$ é aberto em X, para todo O aberto em Y.

- f é contínua em p se e somente se $\lim_{x \to p} f(x) = f(p)$.

- f é contínua em p se e somente se temos

$$\lim f(x_n) = f(p), \quad \text{para toda sequência } (x_n) \subset X \text{ tal que } \lim x_n = p.$$

Teorema. *Seja $f : (X, d) \to (Y, \rho)$ uma função contínua e K um subconjunto compacto de X. Então, $f(K)$ é compacto em Y.*

Prova.

Consideremos uma cobertura aberta: $f(K) \subset \bigcup_J O_j$. Então, $K \subset \bigcup_J f^{-1}(O_j)$ é uma cobertura aberta. Como K é compacto, obtemos uma subcobertura finita

$$K \subset f^{-1}(O_{j_1}) \cup \cdots \cup f^{-1}(O_{j_N}).$$

Logo, $f(K) \subset O_{j_1} \cup \cdots \cup O_{j_N}$ ♣

Definição. Sejam E e F subconjuntos de X, com (X, d) um espaço métrico.

- A distância entre E e F é

$$d(E; F) = \sup\{d(x, y) : x \in E \text{ e } y \in F\}.$$

- A bola aberta centrada em E e de raio r é

$$B(E; r) = \{x \in X : d(x; E) < r\}.$$

Definição. Dado um conjunto X, a diagonal de $X \times X$ é

$$\Delta = \{(x, x) : x \in X\}.$$

Definição. Duas métricas d_1 e d_2, sobre X, são métricas equivalentes se existem constantes m e M tais que

$$md_1(x, y) \leq d_2(x, y) \leq Md_1(x, y), \text{ para todo } x, y \in X.$$

Métricas equivalentes induzem os mesmos abertos em X.

Proposição. Sejam (X, d) e (Y, ρ) espaços métricos. As seguintes expressões definem métricas equivalentes sobre $X \times Y$:

$$\begin{aligned}
D_{\text{soma}}\big((x_1, y_1); (x_2, y_2)\big) &= d(x_1, x_2) + \rho(y_1, y_2),\\
D_{\text{máximo}}\big((x_1, y_1); (x_2, y_2)\big) &= \max\{d(x_1, x_2), \rho(y_1, y_2)\},\\
D\big((x_1, y_1); (x_2, y_2)\big) &= \sqrt{d(x_1, x_2)^2 + \rho(y_1, y_2)^2}.
\end{aligned}$$

2.13 - Apêndice - Espaços Topológicos

Definição. Seja X um conjunto não vazio e τ uma coleção de subconjuntos de X. Dizemos que τ é uma topologia sobre X se:

- X e $\varnothing$ pertencem a τ.
- A união qualquer de conjuntos pertencentes a τ também pertence a τ.
- A intersecção de uma família finita de conjuntos pertencentes a τ também pertence a τ.

Definição. Se τ é uma topologia sobre X, o par (X, τ) é dito um espaço topológico. Os conjuntos pertencentes à coleção τ são chamados abertos.

Definição. Seja (X, τ) um espaço topológico. Um conjunto $F \subset X$ é dito fechado se seu complementar $F^c = X \setminus F$ é aberto.

Propriedades. Seja (X, τ) um espaço topológico.

- X e $\varnothing$ são conjuntos fechados.
- A intersecção de uma família qualquer de conjuntos fechados é um fechado.
- A união uma família finita de conjuntos fechados é um conjunto fechado.

Definição. Seja (X, τ) um espaço topológico e $x \in X$. Uma vizinhança de x é um conjunto arbitrário $V \subset X$ tal que existe um aberto $O \in \tau$ tal que $x \in O \subset V$.

Definição. Seja A um subconjunto de X.

- $a \in A$ é ponto interior a A se existir um aberto $O \in \tau$ tal que $a \in O \subset A$.
- O interior de A é

$$\operatorname{int}(A) = \{a \in A : a \text{ é ponto interior a } A\}.$$

- Um ponto $x \in X$ é um ponto de aderência de A (ou, aderente a A) se temos $O \cap A \neq \varnothing$, qualquer que seja o aberto O que contém x.
- O fecho do conjunto A é

$$\overline{A} = \{x \in X : x \text{ é ponto de aderência de } A\}.$$

- $x \in X$ é ponto de fronteira de A se para todo aberto O que contém x temos

$$O \cap A \neq \varnothing \quad \text{e} \quad O \cap A^c \neq \varnothing.$$

  A fronteira de A é $\partial A = \{x \in X : x \text{ é ponto de fronteira de } A\}$.

- $x \in X$ é ponto de acumulação de A se dado um aberto O contendo x temos

$$O \cap (A \setminus \{x\}) \neq \varnothing.$$

  O derivado de A é o conjunto $A' = \{x \in X : x \text{ é ponto de acumulação de } A\}$.

- Um ponto $a \in A$ é um ponto isolado de A se existe algum aberto O tal que

$$O \cap A = \{x\}.$$

  O conjunto A é discreto se todo ponto de A é isolado.

- O conjunto A é denso em X se $\overline{A} = X$.
- Uma cobertura de A é uma família $\{V_j : j \in J\}$ de subconjuntos de X satisfazendo $A \subset \bigcup_{j \in J} V_j$.
- A é compacto se toda cobertura de A por conjuntos abertos admite subcobertura finita.

Definição. Seja (X, τ) um espaço topológico. Dizemos que X possui um base enumerável de abertos se existe uma coleção enumerável de abertos de X tal que todo aberto de X é uma reunião de elementos da citada coleção.

Definição. Sejam X e Y espaços com suas respectivas topologias e $f : X \to Y$.

- Dizemos que f é **contínua em** $p \in X$ se para toda vizinhança (aberta ou não) V de $f(p)$, existe uma vizinhança (aberta ou não) O de p tal que

  $$f(O) \subset V.$$

  Dizemos que f é **contínua** se f é contínua em cada ponto de X.

- Dizemos que f é um **homeomorfismo** se f é contínua, bijetora e

  $$f^{-1} : Y \to X \text{ é também contínua.}$$

Proposição. *Sejam X e Y espaços topológicos e $f : X \to Y$. Então, f é contínua se e somente se $f^{-1}(O)$ é aberto em X, para todo O aberto em Y.*
Prova. Exercício.

Teorema. *Sejam X e Y espaços topológicos, $f : X \to Y$ contínua e K um subconjunto compacto de X. Então, $f(K)$ é compacto em Y.*
Prova.

Consideremos uma cobertura aberta: $f(K) \subset \bigcup_J O_j$. Então, $K \subset \bigcup_J f^{-1}(O_j)$ é uma cobertura aberta. Como K é compacto, obtemos uma subcobertura finita

$$K \subset f^{-1}(O_{j_1}) \cup \cdots \cup f^{-1}(O_{j_N}).$$

Logo, $f(K) \subset O_{j_1} \cup \cdots \cup O_{j_N}$♣