

MAE 5905: Introdução à Ciência de Dados

Pedro A. Morettin

Instituto de Matemática e Estatística
Universidade de São Paulo
pam@ime.usp.br
<http://www.ime.usp.br/~pam>

Aula 6

19 de março de 2025

Sumário

- 1 Regularização
 - Regularização Ridge
 - Regularização Lasso
 - Outras propostas
- 2 Regularização: teoria
- 3 Modelos aditivos generalizados

Um exemplo

- Consideremos um exemplo [proposto em Bishop (2006)] cujo objetivo é ajustar um modelo de regressão polinomial a um conjunto de 10 pontos gerados por meio da expressão $y_i = \text{sen}(2\pi x_i) + e_i$ em que e_i segue um distribuição Normal com média nula e variância σ^2 .
- Os dados estão representados na Figura 1 por pontos em azul. A curva verde corresponde a $y_i = \text{sen}(2\pi x_i)$; em vermelho estão representados os ajustes baseados em regressões polinomiais de graus, 0, 1, 3 e 9.
- Claramente, a curva baseada no polinômio do terceiro grau consegue reproduzir o padrão da curva geradora dos dados sem, no entanto, prever os dados com total precisão. A curva baseada no polinômio de grau 9, por outro lado, tem um ajuste perfeito, mas não reproduz o padrão da curva utilizada para gerar os dados, Esse fenômeno é conhecido como **sobreajuste**.

Um exemplo

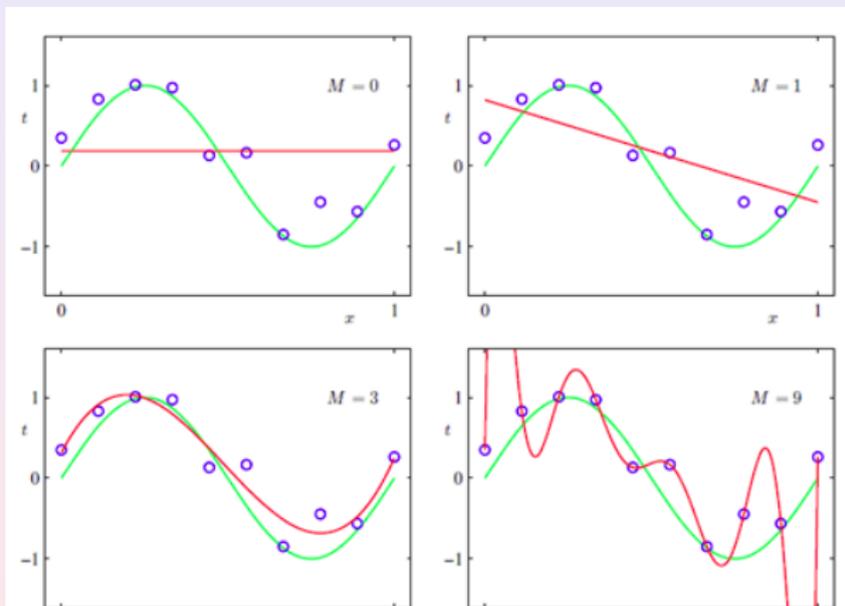


Figura 1: Ajuste de modelos polinomiais a um conjunto de dados hipotéticos.

Quando usar EMQ?

- Se a relação entre resposta e preditores for aproximadamente linear, então um modelo de regressão linear múltipla (RLM) pode ser adequado e estimadores de mínimos quadrados (EMQ) tenderão a ter baixo viés e conduzir a previsões boas.
- Se $n \gg p$, EMQ terão também baixa variância.
- Se n não for muito maior do que p , EMQ apresentarão muita variabilidade (sobreajuste) e previsões ruins.
- Se $p > n$, não existirão EMQ univocamente determinados. Aumentando-se o número de variáveis, $R^2 \rightarrow 1$, o EQM de treinamento tenderá zero e o EQM de teste crescerá. **Não use MQ!**

Possíveis abordagens

Possíveis alternativas para remover variáveis irrelevantes de um modelo de RLM, de modo a obter maior interpretabilidade:

- **Seleção de subconjuntos de variáveis (subset selection)** ; vários procedimentos podem ser usados (stepwise (forward e backward), uso de critérios de informação (AIC, BIC), R^2 ajustado, validação cruzada).
- **Encolhimento (shrinkage)**: usa todos os preditores mas os coeficientes são encolhidos para zero; pode funcionar para selecionar variáveis. Reduz variância. Também chamada **regularização**.
- **Redução da dimensão**: projetar os preditores sobre um subespaço de dimensão menor $q < p$, que consiste em obter combinações lineares (ou projeções) dos preditores. Essas q projeções são usadas como novos preditores no ajuste de MQ. ACP, AF, ICA.
- **Triagem (Screening)**.

Regularização

- O termo **regularização** refere-se a um conjunto de técnicas utilizadas para especificar modelos que se ajustem a um conjunto de dados evitando o **sobreajuste** (*overfitting*).
- Essencialmente, essas técnicas servem para ajustar modelos de regressão em que a função de perda contém um termo de penalização cuja finalidade é reduzir a influência de coeficientes responsáveis por flutuações excessivas.
- Embora haja várias técnicas de regularização, consideraremos apenas a regularização L_2 , ou **Ridge**, a regularização L_1 ou **Lasso** (*least absolute shrinkage and selection operator*) e uma mistura dessas duas, chamada de **Elastic net**.

Regularização

- O termo de regularização da técnica Lasso usa uma soma de valores absolutos dos parâmetros e um **coeficiente de penalização** que os encolhe para zero. Essa técnica serve para seleção de modelos, porque associa pesos nulos a parâmetros não significativos.
- Isso implica uma **solução esparsa** (Dizemos que um modelo é esparsos se a maioria dos elementos do correspondente vetor de parâmetros é nula ou desprezável).
- Na regularização L_2 , por outro lado, o termo de regularização usa uma soma de quadrados dos parâmetros e um coeficiente de penalização que força alguns pesos a serem pequenos, mas não os anula e conseqüentemente não conduz a soluções esparsas. Essa técnica de regularização não é robusta com relação a valores atípicos, pois pode conduzir a valores muito grandes do termo de penalização.

O contexto

- Consideremos o modelo de regressão

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 x_{1i} + \dots + \beta_p x_{pi} + e_i, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (1)$$

ou

$$y_i = \beta_0 + \beta_i^\top \mathbf{x}_i + e_i, \quad (2)$$

com as p variáveis preditoras reunidas no vetor $\mathbf{x}_i = (x_{1i}, \dots, x_{pi})^\top$, y_i representando a variável resposta, e_i indicando as inovações de média zero e $\beta = (\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_p)^\top$ denotando o vetor de parâmetros a serem estimados.

- Vamos considerar $\mathbf{x}_i = (\mathbf{x}_i(1)^\top, \mathbf{x}_i(2)^\top)^\top$, com $\mathbf{x}_i(1) \in \mathbb{R}^s$ o vetor de variáveis **relevantes** e $\mathbf{x}_i(2) \in \mathbb{R}^{p-s}$ o vetor de variáveis **irrelevantes**, $\beta = (\beta(1)^\top, \beta(2)^\top)^\top$.
- Objetivos:**
 - Selecione o conjunto de variáveis correto: $\hat{\beta}(1) \neq 0$ e $\hat{\beta}(2) = 0$ (**seleção do modelo**);
 - Estime $\beta(1)$ como se o conjunto de variáveis correto fosse conhecido.

Regularização Ridge

- Supomos adicionalmente que $\beta_0 = 0$ e consideremos estimadores de mínimos quadrados (EMQ) penalizados da forma

$$\hat{\beta}_{\text{Ridge}}(\lambda) = \arg \min_{\beta} \left[\frac{1}{2n} \sum_{t=1}^n (y_t - \beta^\top \mathbf{x}_t)^2 + \lambda \sum_{j=1}^p \beta_j^2 \right], \quad (3)$$

em que λ é o coeficiente de regularização, que controla o número de parâmetros do modelo. Se $\lambda = \infty$, não há variáveis a serem incluídas no modelo e se $\lambda = 0$, obtemos os EMQ usuais.

- Dizemos que $\hat{\beta}_{\text{Ridge}}(\lambda)$ é o **estimador Ridge**.

Ridge - Propriedades

Pode-se mostrar que

$$\hat{\beta}_{\text{Ridge}}(\lambda) = (\mathbf{X}^T \mathbf{X} + \lambda \mathbf{I})^{-1} \mathbf{X}^T \mathbf{y}, \quad (4)$$

em que $\mathbf{X} = (\mathbf{x}_1^T, \dots, \mathbf{x}_n^T)^T$ é a matriz de especificação do modelo e $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_n)^T$.

Alguns resultados sobre as propriedades dessa classe de estimadores são:

- 1) Em geral, o estimador *Ridge* não é consistente. Sua consistência assintótica vale quando $\lambda = v\lambda_n \rightarrow \infty$, $\lambda_n/n \rightarrow 0$ e $p < n$.
- 2) O estimador *Ridge* é enviesado para os parâmetros não nulos.
- 3) A técnica de regularização *Ridge* não serve para a seleção de modelos.
- 4) A escolha do coeficiente de regularização λ pode ser feita via validação cruzada ou por meio de algum critério de informação.
- 5) A técnica de regressão *Ridge* foi introduzida por Hoerl e Kennard (1970) para tratar do problema da multicolinearidade.

Ridge - Propriedades

Obter o mínimo em (3) é equivalente a minimizar a soma de quadrados não regularizada sujeita à restrição

$$\sum_{j=1}^p \beta_j^2 \leq m, \quad (5)$$

para algum valor apropriado m , ou seja, é um problema de otimização com multiplicadores de Lagrange.

Na Figura 2 (a) apresentamos um esquema com o valor ótimo do vetor β , a região circular correspondente à restrição (5) e os círculos representando as curvas de nível da função erro não regularizada.

Ridge - Propriedades

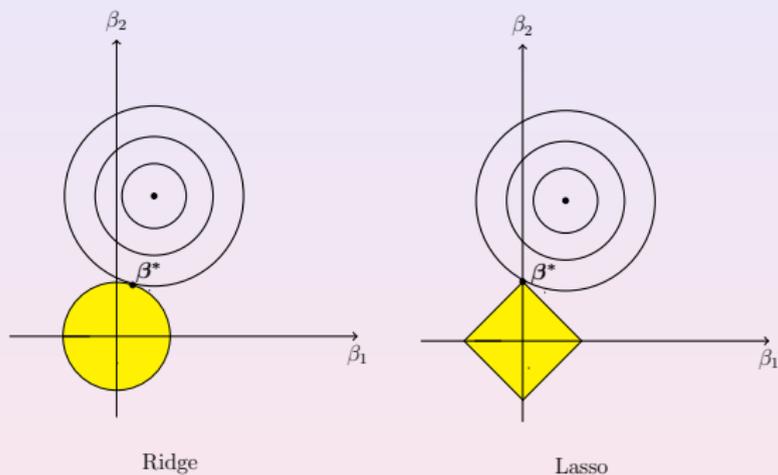


Figura 2: Esparsidade do modelo: (a) Ridge; (b) Lasso.

Regularização Lasso

- Consideremos, agora, o **estimador Lasso**, obtido de

$$\hat{\beta}_{\text{Lasso}}(\lambda) = \arg \min_{\beta} \left[\frac{1}{2n} \sum_{t=1}^n (y_t - \beta^\top \mathbf{x}_t)^2 + \lambda \sum_{j=1}^p |\beta_j| \right], \quad (6)$$

- Neste caso, a restrição (5) é substituída por

$$\sum_{j=1}^p |\beta_j| \leq m, \quad (7)$$

- No painel (b) da Figura 2 (b), podemos observar que a regularização Lasso pode gerar uma solução esparsa, ou seja com $\beta_1^* = 0$.

Regularização Lasso

- Existe uma correspondência 1 – 1 entre as formulações (6) e (7): para cada valor de m para a qual (7) vale, existe um valor de λ que fornece a mesma solução para (6). Reciprocamente, a solução $\hat{\beta}(\lambda)$ de (6) resolve o problema restrito, com $m = \|\hat{\beta}(\lambda)\|_1$.
- Tanto no caso Ridge, como no Lasso, a constante $1/2n$ pode ser substituída por $1/2$ ou mesmo 1. Essa padronização torna os valores de λ comparáveis para diferentes tamanhos amostrais (por exemplo ao usar CV).
- Em análise convexa, a condição necessária e suficiente para a solução de (6) é

$$-\frac{1}{n} \langle \mathbf{x}_j, \mathbf{y} - \mathbf{X}\beta \rangle + \lambda s_j = 0, \quad j = 1, \dots, p, \quad (8)$$

onde s_j é uma quantidade desconhecida, igual a $\text{sign}(\beta_j)$, se $\beta_j \neq 0$ e algum valor no intervalo $[-1, 1]$, se $\beta_j = 0$ (sub-gradiente para a função valor absoluto).

- O sistema (8) é uma forma das chamadas condições de Karush-Kuhn-Tucker (KKT) para o problema (6).

Lasso - Propriedades

Algumas propriedades estatísticas do estimador Lasso:

- 1) O estimador Lasso encolhe para zero os parâmetros que correspondem a preditores redundantes.
- 2) O estimador é enviesado para parâmetros não nulos.
- 3) Sob certas condições, o estimador Lasso seleciona as variáveis relevantes do modelo atribuindo pesos nulos aos respectivos coeficientes.
- 4) O estimador não é consistente em geral.
- 5) Quando $p = n$, ou seja, quando o número de variáveis preditoras é igual ao número de observações, a técnica Lasso corresponde à aplicação de um **limiar suave** (*soft threshold*) a $Z_j = \mathbf{x}_j^\top \mathbf{y} / n$, ou seja,

$$\hat{\beta}_j(\lambda) = \text{sign}(Z_j) (|Z_j| - \lambda/2)_+, \quad (9)$$

em que $(x)_+ = \max\{x, 0\}$.

Threshold dado por (9)

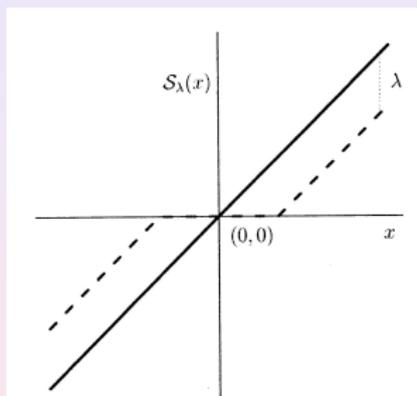


Figura 3: Threshold: MQ (linha cheia) e Lasso (linha tracejada), para o caso $p = n$.

Elastic net

- O estimador *Elastic net* é

$$\hat{\beta}_{\text{EN}}(\lambda_1, \lambda_2) = \arg \min_{\beta} \left[\sum_{t=1}^n \frac{1}{2n} (y_t - \beta^\top \mathbf{x}_t)^2 + \lambda_2 \sum_{i=1}^p \beta_i^2 + \lambda_1 \sum_{i=1}^p |\beta_i| \right]. \quad (10)$$

- Na Figura 4 apresentamos esquematicamente uma região delimitada pela restrição $J(\beta) \leq m$, em que $J(\beta) = \alpha \sum_{j=1}^p \beta_j^2 + (1 - \alpha) \sum_{j=1}^p |\beta_j|$, para algum m , com $\alpha = \lambda_2 / (\lambda_1 + \lambda_2)$, além daquelas delimitadas pelas restrições *Ridge* e *Lasso*.
- Pode-se mostrar que sob determinadas condições, o estimador *Elastic Net* é consistente.

Elastic net

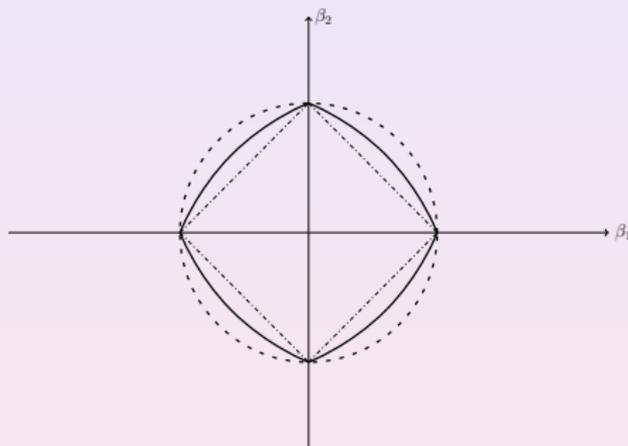


Figura 4: Geometria das restrições *Elastic Net* (curva contínua), *Ridge* (curva tracejada) e *Lasso* (curva pontilhada).

Lasso adaptativo

- O estimador **Lasso adaptativo** (adaLASSO) é dado por

$$\hat{\beta}_{AL}(\lambda) = \arg \min_{\beta} \left[\frac{1}{2n} \sum_{t=1}^n (y_t - \beta^T \mathbf{x}_t)^2 + \lambda \sum_{i=1}^p w_i |\beta_i| \right], \quad (11)$$

em que w_1, \dots, w_p são pesos não negativos pré-definidos.

- Usualmente, toma-se $w_j = |\tilde{\beta}_j|^{-\tau}$, para $0 < \tau \leq 1$ e $\tilde{\beta}_j$ é um estimador inicial (por exemplo o estimador Lasso).
- O estimador **Lasso adaptativo** é consistente sob condições não muito fortes.
- A função `adaLasso` do pacote `parcor` do R pode ser usada para calcular esse estimador.
- O pacote `glmnet` do R pode ser usado para obter estimadores Lasso e *Elastic net* sob modelos de regressão linear, regressão logística e multinomial, regressão Poisson além de modelos de Cox. Para detalhes, veja Friedman et al. (2010).

Comparação entre os métodos

- Tanto Ridge como o Lasso encolhem os coeficiente para zero. No caso do Lasso, a penalidade L_1 tem a finalidade de tornar alguns dos coeficientes serem efetivamente nulos. Logo, o Lasso realiza **seleção de modelos**.
- Lasso resulta em modelos **esparsos**, ou seja, mais fáceis de interpretar.
- Tanto no Ridge, quanto no Lasso, a variância decresce e o viés cresce à medida que λ cresce.
- Ridge tem desempenho melhor que o Lasso nos caso que um número grande de preditores tem relação com a variável resposta. Em caso contrário, o Lasso tem desempenho melhor (em termos de EQM).
- Em geral, nenhum método domina os outros em **todas** as situações.

Viés da regularização Ridge

Supondo $p < n$, fazendo $\mathbf{R} = \mathbf{X}^\top \mathbf{X}$, e usando a expressão do estimador *ridge* (3), obtemos

$$\begin{aligned}\hat{\beta}_{\text{Ridge}}(\lambda) &= (\mathbf{X}^\top \mathbf{X} + \lambda \mathbf{I})^{-1} \mathbf{X}^\top \mathbf{y} \\ &= (\mathbf{R} + \lambda \mathbf{I})^{-1} \mathbf{R} [\mathbf{R}^{-1} \mathbf{X}^\top \mathbf{y}] \\ &= [\mathbf{R} (\mathbf{I} + \lambda \mathbf{R}^{-1})]^{-1} \mathbf{R} ((\mathbf{X}^\top \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^\top \mathbf{y}) \\ &= (\mathbf{I} + \lambda \mathbf{R}^{-1})^{-1} \mathbf{R}^{-1} \mathbf{R} \hat{\beta}_{\text{MQ}} \\ &= (\mathbf{I} + \lambda \mathbf{R}^{-1}) \hat{\beta}_{\text{MQ}},\end{aligned}$$

em que $\hat{\beta}_{\text{MQ}}$ denota o estimador de mínimos quadrados ordinários. Tomando a esperança condicional da expressão anterior, dada \mathbf{X} , obtemos

$$\begin{aligned}E[\hat{\beta}_{\text{Ridge}}(\lambda) | \mathbf{X}] &= E[(\mathbf{I} + \lambda \mathbf{R}^{-1}) \hat{\beta}_{\text{MQ}}] \\ &= (\mathbf{I} + \lambda \mathbf{R}^{-1}) \beta,\end{aligned}$$

de onde segue

$$E[\hat{\beta}_{\text{Ridge}}(\lambda)] = (\mathbf{I} + \lambda \mathbf{R}^{-1}) \beta \neq \beta.$$

Ridge: um resultado

Pode-se provar que

$$\hat{\beta}_{\text{Ridge}}(\lambda) = \mathbf{V} \text{diag} \left(\frac{d_1}{d_1^2 + \lambda}, \frac{d_2}{d_2^2 + \lambda}, \dots, \frac{d_p}{d_p^2 + \lambda} \right) \mathbf{U}^\top \mathbf{y},$$

em que $\mathbf{X} = \mathbf{U}\mathbf{D}\mathbf{V}^\top$ é a decomposição em valores singulares de \mathbf{X} , com \mathbf{U} denotando uma matriz ortogonal de dimensão $n \times p$, \mathbf{V} uma matriz ortogonal de dimensão $p \times p$ e \mathbf{D} uma matriz diagonal com dimensão $p \times p$, contendo os correspondentes valores singulares $d_1 \geq d_2 \geq \dots \geq d_p \geq 0$ (raízes quadradas dos autovalores de $\mathbf{X}^\top \mathbf{X}$).

Ridge quando \mathbf{X} é ortogonal

Quando $\mathbf{X}^\top \mathbf{X} = \mathbf{I}$, pode-se provar que:

1. Ridge e EMQ:

$$\hat{\beta}_{\text{Ridge}}(\lambda) = \frac{1}{1 + \lambda} \hat{\beta}_{\text{MQ}}. \quad (12)$$

2. A escolha ótima de λ minimizando o erro de previsão esperado é

$$\lambda^* = \frac{p\sigma^2}{\sum_{j=1}^p \beta_j^2}. \quad (13)$$

Ridge e Lasso: escolha do parâmetro λ

- A escolha do parâmetro de regularização λ pode ser baseada em **validação cruzada** ou em algum **critério de informação**.
- Seja $\Lambda = \{\lambda_1, \dots, \lambda_M\}$ uma grade de valores para λ . No segundo caso,

$$\hat{\lambda} = \arg \min_{\lambda \in \Lambda} [-\log \text{verossimilhança} + \text{penalização}],$$

como

$$AIC = \log[\hat{\sigma}^2(\lambda)] + \text{gl}(\lambda) \frac{2}{n},$$

$$BIC = \log[\hat{\sigma}^2(\lambda)] + \text{gl}(\lambda) \frac{\log n}{n},$$

$$HQ = \log[\hat{\sigma}^2(\lambda)] + \text{gl}(\lambda) \frac{\log \log n}{n},$$

em que $\text{gl}(\lambda)$ é o número de graus de liberdade associado a λ , nomeadamente

$$\text{gl}(\lambda) = \text{tr} \left[\mathbf{X}(\mathbf{X}^\top \mathbf{X} + \lambda \mathbf{I})^{-1} \mathbf{X}^\top \right] = \sum_{j=1}^p \frac{d_j^2}{d_j^2 + \lambda},$$

e

$$\hat{\sigma}^2(\lambda) = \frac{1}{n - \text{gl}(\lambda)} \sum_{i=1}^n [y_i - \hat{\beta}_{\text{Ridge}}(\lambda)^\top \mathbf{x}_i]^2.$$

Ridge e Lasso: escolha do parâmetro λ

No caso de validação cruzada (VC):

- Calcule o erro da validação cruzada, como descrito abaixo, para cada valor de λ nessa grade.
- Escolha λ para o qual o erro da VC seja mínimo.
- O modelo é re-ajustado usando **todas** as observações disponíveis e o valor selecionado de λ .
- Pode-se usar o método LOOCV ou KFCV.

Ridge - Consistência

- Quando $\lambda = \lambda_n$ e $p < n$.
- O estimador Ridge pode ser escrito na forma

$$\begin{aligned}\hat{\beta}_{\text{Ridge}}(\lambda_n) &= (\mathbf{X}^\top \mathbf{X} + \lambda_n \mathbf{I})^{-1} \mathbf{X}^\top \mathbf{y} \\ &= \beta - \lambda_n (n^{-1} \mathbf{X}^\top \mathbf{X} + \lambda_n \mathbf{I})^{-1} \beta \\ &\quad + (n^{-1} \mathbf{X}^\top \mathbf{X} + \lambda_n \mathbf{I})^{-1} n^{-1} \mathbf{X} \mathbf{e}.\end{aligned}$$

- Quando $\lambda_n \rightarrow 0$, para $n \rightarrow \infty$, pelo Lema de Slutsky,

$$\begin{aligned}\lambda_n (n^{-1} \mathbf{X}^\top \mathbf{X} + \lambda_n \mathbf{I})^{-1} \beta &\rightarrow 0, \\ (n^{-1} \mathbf{X}^\top \mathbf{X} + \lambda_n \mathbf{I})^{-1} n^{-1} \mathbf{X} \mathbf{e} &\rightarrow 0.\end{aligned}$$

- Pode ainda ser provado que, quando $\sqrt{n} \lambda_n \rightarrow \lambda_0 \geq 0$, quando $n \rightarrow \infty$,

$$\sqrt{n}(\hat{\beta}_{\text{Ridge}} - \beta) + \lambda_0 \mathbf{Q}^{-1} \beta \rightarrow N(\mathbf{0}, \mathbf{Q}^{-1} \mathbf{V} \mathbf{Q}^{-1}),$$

onde $\mathbf{Q} = p \lim n^{-1} \mathbf{X}^\top \mathbf{X}$ e \mathbf{V} é a matriz de variância assintótica de $n^{-1/2} \mathbf{X} \mathbf{e}$.

Lasso: teoria

Considere o caso de \mathbf{X} ortogonal e $p < n$. Então, pode-se provar que

$$\begin{aligned}\hat{\beta}_{\text{Lasso}}(\lambda) &= \arg \min_{\beta \in \mathbb{R}^p} \frac{1}{2} \|\mathbf{y} - \mathbf{X}\beta\|^2 + \lambda \|\beta\|_1 \\ &= \arg \min_{\beta \in \mathbb{R}^p} \left(-\mathbf{y}^\top \mathbf{X}\beta + \frac{1}{2} \|\beta\|_2^2 \right) + \lambda \|\beta\|_1 \\ &= \arg \min_{\beta \in \mathbb{R}^p} \sum_{i=1}^p \left(-\hat{\beta}_{MQ,i} \beta_i + \frac{1}{2} \beta_i^2 + \lambda |\beta_i| \right).\end{aligned}$$

- Como o problema é um programa de otimização quadrática com restrição convexa, a função objetivo torna-se uma soma de funções objetivos.
- Para cada i , minimiza-se $Q_i = -\hat{\beta}_{MQ,i} \beta_i + \frac{1}{2} \beta_i^2 + \lambda |\beta_i|$.

Lasso: teoria

- No modelo RLM, suponha \mathbf{X} fixa ou iid e o erro normal, com média $\mathbf{0}$ e variância $\sigma^2 \mathbf{I}$.
- O número de variáveis $p = p_n$ e $p \gg n$.
- No caso de \mathbf{X} fixa, resultados de consistência dependem da condição

$$\|\beta^0\|_1 = \|\beta_n^0\|_1 = o\left(\sqrt{\frac{n}{\log p}}\right).$$

- No caso de \mathbf{X} aleatória, sob condições sobre o erro e

$$\|\beta^0\|_1 = o\left(\left(\frac{n}{\log n}\right)^{1/4}\right),$$

e para λ da ordem de $\sqrt{\log p/n}$, o estimador Lasso é consistente:

$$\left[\hat{\beta}_{\text{Lasso}}(\lambda) - \beta^0\right] \Sigma \left[\hat{\beta}_{\text{Lasso}}(\lambda) - \beta^0\right]^T = o_p(1), \quad n \rightarrow \infty,$$

com $\Sigma = \frac{1}{n} \mathbf{X}^T \mathbf{X}$ no caso fixo ou Σ sendo a matriz de covariância de \mathbf{X} , no caso aleatório.

Exemplo

Consideremos os dados do arquivo *antracose*, extraídos de um estudo cuja finalidade era avaliar o efeito da idade (*idade*), tempo vivendo em São Paulo (*tmunic*), horas diárias em trânsito (*htransp*), carga tabágica (*cargatabag*), classificação sócio-econômica (*ses*), densidade de tráfego na região onde habitou (*densid*) e distância mínima entre a residência a vias com alta intensidade de tráfego (*distmin*) num índice de antracose (*antracose*) que é uma medida de fuligem (*black carbon*) depositada no pulmão. Como esse índice varia entre 0 e 1, consideramos

$$\logrc = \log[\text{índice de antracose}/(1 - \text{índice de antracose})]$$

Exemplo - MQ

Os estimadores de mínimos quadrados para um modelo linear podem ser obtidos por meio dos comandos

```
pulmao_lm <- lm(logrc ~ idade + tmunic + htransp + cargatabag +
                ses + densid + distmin, data=pulmao)
```

```
summary(pulmao_lm)
```

Coefficients:

	Estimate	Std. Error	t value	Pr(> t)	
(Intercept)	-3.977e+00	2.459e-01	-16.169	< 2e-16	***
idade	2.554e-02	2.979e-03	8.574	< 2e-16	***
tmunic	2.436e-04	2.191e-03	0.111	0.911485	
htransp	7.505e-02	1.634e-02	4.592	5.35e-06	***
cargatabag	6.464e-03	1.055e-03	6.128	1.61e-09	***
ses	-4.120e-01	1.238e-01	-3.329	0.000926	***
densid	7.570e+00	6.349e+00	1.192	0.233582	
distmin	3.014e-05	2.396e-04	0.126	0.899950	

Residual standard error: 1.014 on 598 degrees of freedom

Multiple R-squared: 0.1965, Adjusted R-squared: 0.1871

F-statistic: 20.89 on 7 and 598 DF, p-value: < 2.2e-16

Exemplo - Ridge

O ajuste dos modelos de regressão *Ridge*, *Lasso* ou *Elastic net* pode ser obtido com o pacote `glmnet`.

Utilizando esse pacote, ajustamos o modelo de regressão *Ridge* por meio de validação cruzada e obtivemos o gráfico da Figura 2 em que o erro quadrático médio (*MSE*) é expresso em função do logaritmo do coeficiente de regularização λ .

```
regridgecv = cv.glmnet(X, y, alpha = 0)
plot(regridgecv)
```

Exemplo - Ridge

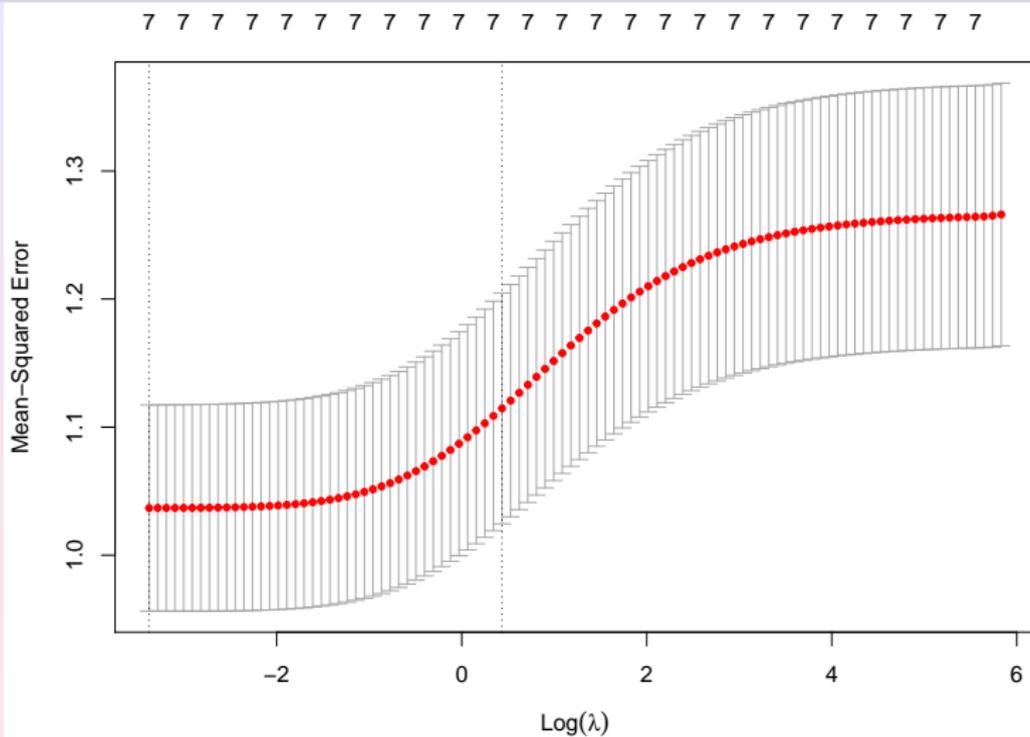


Figure 2: Gráfico para avaliação do efeito do coeficiente de regularização (Ridge).

Exemplo - Ridge

Os coeficientes do ajuste correspondentes ao valor mínimo do coeficiente λ , juntamente com esse valor, são obtidos com os comandos

```
coef(regridgecv, s = "lambda.min")
8 x 1 sparse Matrix of class "dgCMatrix"
      1
(Intercept) -3.905299e+00
idade       2.456715e-02
tmunic      4.905597e-04
htransp     7.251095e-02
cargatabag  6.265919e-03
ses         -3.953787e-01
densid      7.368120e+00
distmin     3.401372e-05
> regridgecv$lambda.min
[1] 0.03410028
```

Exemplo -Ridge

Com exceção das estimativas dos coeficientes das variáveis `tmunic` e `distmin` as demais foram encolhidas em direção a zero relativamente àquelas obtidas por mínimos quadrados. Os valores preditos e a correspondente raiz quadrada do *MSE* (usualmente denotada *RMSE*) são obtidos por meio de

```
predict(regridgecv, X, s = "lambda.min")
sqrt(regridgecv$cvm[regridgecv$lambda == regridgecv$lambda.min])
[1] 1.050218
```

Exemplo - Lasso

O ajuste do modelo de regressão **Lasso** juntamente com o gráfico para a escolha do coeficiente λ , disposto na Figura 3, são obtidos com

```
reglassocv = cv.glmnet(X, y, alpha = 1)  
plot(reglassocv)
```

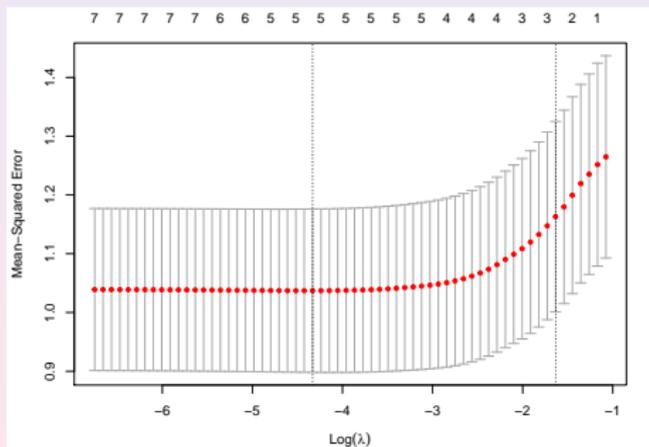


Figura 3: Gráfico para avaliação do efeito do coeficiente de regularização (*Lasso*).

Exemplo - Lasso

Os coeficientes correspondentes à regularização *Lasso*, o valor mínimo do coeficiente λ e o *RMSE* são gerados por intermédio dos comandos

```
coef(reglassocv, s = "lambda.min")
8 x 1 sparse Matrix of class "dgCMatrix"
      1
(Intercept) -3.820975473
idade       0.024549358
tmunic      .
htransp     0.069750435
cargatabag  0.006177662
ses         -0.365713282
densid      5.166969594
distmin     .
reglassocv$lambda.min
[1] 0.01314064
sqrt(reglassocv$cvm[reglassocv$lambda == reglassocv$lambda.min])
[1] 1.018408
```

Neste caso, todos os coeficientes foram encolhidos em direção ao zero, e aqueles correspondentes às variáveis *tmunic* e *distmin* foram anulados.

Exemplo - Elastic Net

Para o modelo **Elastic Net** com $\alpha = 0,5$ os resultados são

```

regelncv = cv.glmnet(X, y, alpha = 0.5)
regelncv$lambda.min
[1] 0.02884367
coef(regelncv, s = "lambda.min")
8 x 1 sparse Matrix of class "dgCMatrix"
              1
(Intercept) -3.776354935
idade        0.024089256
tmunic      .
htransp     0.068289153
cargatabag  0.006070319
ses         -0.354080190
densid      4.889074555
distmin     .
sqrt(regelncv$cvm[regelncv$lambda == regelncv$lambda.min])
[1] 1.0183

```

Vemos que os 3 procedimentos resultam em EQM similares, com pequena vantagem para Elastic Net.

Triagem em regressão paramétrica

- Se p for muito grande, o desempenho dos métodos de regularização podem não funcionar bem.
- Em tais cenários, muitas vezes se faz uma triagem inicial das covariáveis para reduzir o problema a uma dimensão $p_n \ll p$.
- Triagem clássica seleciona uma subamostra de covariáveis correlacionadas com a variável resposta.
- Contudo, características importantes podem ter uma relação não linear com a resposta.
- Muitas aplicações em Biologia têm centenas de covariáveis, alcançando mesmo milhares em Genética.

Triagem em regressão paramétrica

- Algumas medidas comumente usadas:

- i) Coeficiente de correlação de Pearson entre a resposta e cada covariável. Adequado para relações lineares.
- ii) Hall and Miller (2009): correlação generalizada, usando o coeficiente de Pearson entre a resposta e uma curva suave estimada da covariável:

$$\rho(X_j, Y) = \sup_{f_j \in \mathcal{H}} \frac{\text{Cov}\{f_j(X_j), Y\}}{\sqrt{\text{Var}\{f_j(X_j)\}\text{Var}(Y)}}.$$

- iii) Fan et al. (2011): ajustar splines a esta função e usar a norma da função ajustada.
- iv) Fonseca et al. (2023): ajustar ondaletas e usar a norma da função ajustada.

Hall, P. and H. Miller (2009). Using generalized correlation to effect variable selection in very high dimensional problems. *Journal of Computational and Graphical Statistics*, **18**, 533-550.

Fan, J., Y. Feng, and R. Song (2011). Nonparametric independence screening in sparse ultra-high-dimensional additive models. *Journal of the American Statistical Association*, **106**, 544-557.

Fonseca, R., Morettin, P.A. and Pinheiro, A.S. (2024). Wavelet feature screening. *Journal of Computational and Graphical Statistics*, **33**, 1310-1319.

MAG

- Modelos lineares têm um papel muito importante na análise de dados, tanto pela facilidade de ajuste quanto de interpretação. De uma forma geral, os modelos lineares podem ser expressos como

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 f_1(x_{i1}) + \dots + \beta_p f_p(x_{ip}) + e_i \quad (14)$$

$i = 1, \dots, n$ em que as funções f_i são conhecidas. No modelo de regressão polinomial de segundo grau, por exemplo, $f_1(x_{i1}) = x_{i1}$ e $f_2(x_{i2}) = x_{ij}^2$. Em casos mais gerais, poderíamos ter $f_1(x_{i1}) = x_{ij}$ e $f_2(x_{i2}) = \exp(x_{i2})$. Em muitos problemas reais, no entanto, nem sempre é fácil especificar a forma das funções f_i e uma alternativa proposta por Hastie e Tibshirani (1996) são os chamados **Modelos Aditivos Generalizados** (*Generalized Additive Models* - GAM) que são expressos como (14) sem a especificação da forma das funções f_i .

- Quando a distribuição da variável resposta y_i pertence à **família exponencial**, o modelo pode ser considerado como uma extensão dos **Modelos Lineares Generalizados** (*Generalized Linear Models* - GLM) e é expresso como

$$g(\mu_i) = \beta_0 + \beta_1 f_1(x_{i1}) + \dots + \beta_p f_p(x_{ip}) \quad (15)$$

em que g é uma **função de ligação** e $\mu_i = E(y_i)$ (ver Nota de Capítulo 3).

- Existem diversas propostas para a representação das funções f_i que incluem o uso de **splines naturais**, **splines suavizadas** e **regressões locais**.
- A suavidade dessas funções é controlada por parâmetros de suavização, que devem ser determinados *a priori*. Curvas muito suaves podem ser muito restritivas, enquanto curvas muito rugosas podem causar sobreajuste.
- O procedimento de ajuste dos modelos aditivos generalizados depende da forma escolhida para as funções f_i . A utilização de **splines naturais**, por exemplo, permite a aplicação direta do método de mínimos quadrados, graças à sua construção a partir de **funções base**.
- Para **splines penalizadas**, o processo de estimação envolve algoritmos um pouco mais complexos, como aqueles conhecidos sob a denominação de **retroajustamento** (*backfitting*). Para detalhes sobre o ajuste dos modelos aditivos generalizados, consulte Hastie e Tibshirani (1990) e Hastie et al. (2008).

Splines

- Para entender o conceito de *splines*, consideremos o seguinte modelo linear com apenas uma variável explicativa

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + e_i, \quad i = 1, \dots, n. \quad (16)$$

- A ideia subjacente aos modelos aditivos generalizados é a utilização de funções base e consiste na substituição do termo $\beta_1 x_i$ em (16) por um conjunto de transformações conhecidas $b_1(x_i), \dots, b_t(x_i)$, gerando o modelo

$$y_i = \alpha_0 + \alpha_1 b_1(x_i) + \dots + \alpha_t b_t(x_i) + e_i, \quad i = 1, \dots, n. \quad (17)$$

O modelo de regressão polinomial de grau t é um caso particular de (17) com $b_j(x_i) = x_i^j$, $j = 1, \dots, t$.

Splines

- Uma proposta para aumentar a flexibilidade da curva ajustada consiste em segmentar o domínio da variável preditora e ajustar diferentes polinômios de grau d aos dados de cada um dos intervalos gerados pela segmentação. Cada ponto de segmentação é chamado de **nó** e uma segmentação com k nós gera $k + 1$ polinômios. Na Figura 45, apresentamos um exemplo com polinômios de terceiro grau e 4 nós.
- Nesse exemplo, a expressão (17) tem a forma

$$y_i = \begin{cases} \alpha_{01} + \alpha_{11}x_i + \alpha_{21}x_i^2 + \alpha_{31}x_i^3 + e_i, & \text{se } x_i \leq -0.5, \\ \alpha_{02} + \alpha_{12}x_i + \alpha_{22}x_i^2 + \alpha_{32}x_i^3 + e_i, & \text{se } -0.5 < x_i \leq 0, \\ \alpha_{02} + \alpha_{13}x_i + \alpha_{23}x_i^2 + \alpha_{33}x_i^3 + e_i, & \text{se } 0 < x_i \leq 0.5, \\ \alpha_{02} + \alpha_{14}x_i + \alpha_{24}x_i^2 + \alpha_{34}x_i^3 + e_i, & \text{se } 0.5 < x_i \leq 1, \\ \alpha_{05} + \alpha_{15}x_i + \alpha_{25}x_i^2 + \alpha_{35}x_i^3 + e_i, & \text{se } x_i > 1, \end{cases} \quad (18)$$

sendo que nesse caso, as funções base $b_1(X), b_2(X), \dots, b_k(X)$ são construídas com a ajuda de funções indicadoras. Esse modelo é conhecido como **modelo polinomial cúbico segmentado**.

Splines

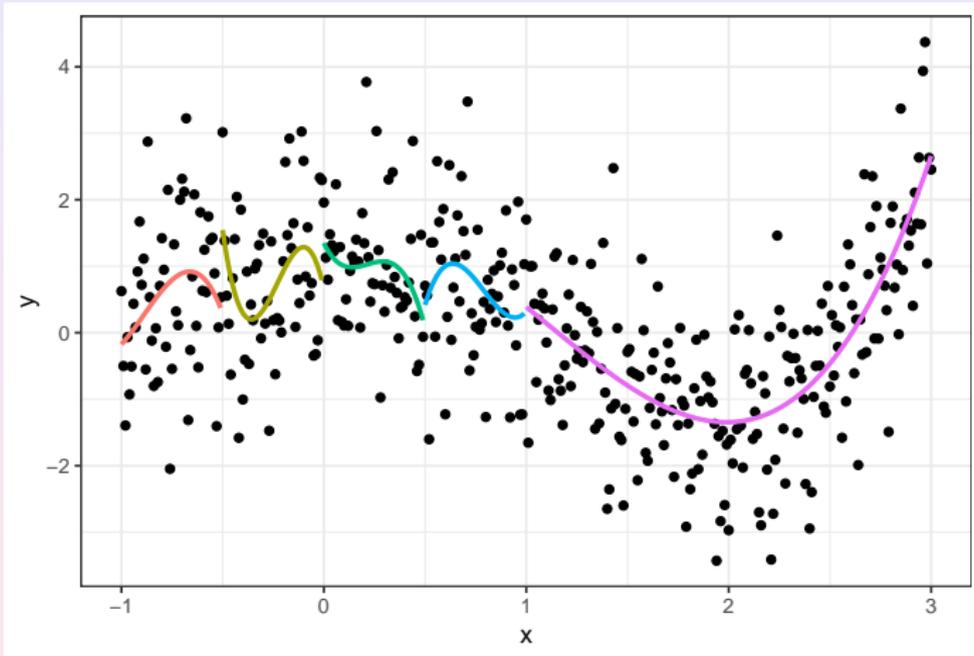


Figura 4: Polinômios de terceiro grau ajustados aos dados de cada região segmentada da variável X . Os nós são os pontos $x = -0.5$, $x = 0$, $x = 0.5$ e $x = 1$.

Splines

- A curva formada pela junção de cada um dos polinômios na Figura 45 não é contínua, apresentando “saltos” nos nós.

Essa característica não é desejável, pois essas descontinuidades não são interpretáveis. Para contornar esse problema, podemos definir um *spline* de grau d como um polinômio segmentado de grau d com as $d - 1$ primeiras derivadas contínuas em cada nó. Essa restrição garante a continuidade e suavidade (ausência de vértices) da curva obtida.

- Utilizando a representação por bases (17), um *spline* cúbico com k nós pode ser expresso como

$$y_i = \alpha_0 + \alpha_1 b_1(x_i) + \alpha_2 b_2(x_i) + \dots + \alpha_{k+3} b_{k+3}(x_i) + e_i, \quad i = 1, \dots, n, \quad (19)$$

com as funções $b_1(x), b_2(x), \dots, b_{k+3}(x)$ escolhidas apropriadamente.

- Usualmente, essas funções envolvem três termos polinomiais, a saber, x , x^2 e x^3 e k termos $h(x, c_1), \dots, h(x, c_k)$ da forma

$$h(x, c_j) = (x - c_j)_+^3 = \begin{cases} (x - c_j)^3, & \text{se } x < c_j, \\ 0, & \text{em caso contrário,} \end{cases}$$

com c_1, \dots, c_k indicando os nós.

Splines

- Com a inclusão do termo α_0 , o ajuste de um *spline* cúbico com k nós envolve a estimação de $k + 4$ parâmetros e, portanto, utiliza $k + 4$ graus de liberdade. Mais detalhes sobre a construção desses modelos podem ser encontrados em Hastie (2008) e James et al. (2017).
- Além das restrições sobre as derivadas, podemos adicionar **restrições de fronteira**, exigindo que a função seja linear na região de x abaixo do menor nó e acima do maior nó. Essas restrições diminuem a variância dos valores extremos gerados pelo preditor, produzindo estimativas mais estáveis. Um *spline* cúbico com restrições de fronteira é chamado de **spline natural**.
- No ajuste de *splines* cúbicos ou naturais, o número de nós determina o grau de suavidade da curva e a sua escolha pode ser feita por validação cruzada conforme indicado em James et al. (2017). De uma forma geral, a maior parte dos nós é posicionada nas regiões do preditor com mais informação, isto é, com mais observações. Por pragmatismo, para modelos com mais de uma variável explicativa, costuma-se adotar o mesmo número de nós para todos os preditores.

Splines

- Os *splines* suavizados constituem uma classe de funções suavizadoras que não utilizam a abordagem por funções bases. De maneira resumida, um *spline* suavizado é uma função f que minimiza

$$\sum_{i=1}^n [y_i - f(x_i)]^2 + \lambda \int f''(u)^2 du \quad (20)$$

em que f'' corresponde à segunda derivada da função f e indica sua curvatura; quanto maior for a curvatura maior a penalização.

- O primeiro termo dessa expressão garante que f se ajustará bem aos dados, enquanto o segundo penaliza a sua variabilidade, isto é, controla a suavidade de f , que é regulada pelo parâmetro λ . A função f se torna mais suave conforme λ aumenta. A escolha desse parâmetro é geralmente feita por validação cruzada.
- Outro método bastante utilizado no ajuste funções não lineares para a relação entre a variável preditora X e a variável resposta Y é conhecido como **regressão local**. Esse método consiste em ajustar modelos de regressão simples em regiões em torno de cada observação x_0 da variável preditora X .

Splines

- Essas regiões são formadas pelos k pontos mais próximos de x_0 , sendo que o parâmetro $s = k/n$ determina o quão suave ou rugosa será a curva ajustada. O ajuste é feito por meio de mínimos quadrados ponderados, com pesos inversamente proporcionais à distância entre cada ponto da região centrada em x_0 e x_0 . Aos pontos dessas regiões mais afastados de x_0 são atribuídos pesos menores.
- **Lowess**: ajusta retas. Veja a Nota de Capítulo 5.2.
- Para uma excelente exposição sobre *splines* e penalização o leitor pode consultar Eilers e Marx (1996) e Eilers e Marx (2021).
- Modelos aditivos generalizados podem ser ajustados utilizando-se a função **gam()** do pacote **mgcv**. Essa função permite a utilização de *splines* como funções suavizadoras. Para regressão local, é necessário usar a função **gam()** do pacote **gam**. Também é possível utilizar o pacote **caret**, a partir da função **train()** e **method = "gam"**.

MAG: exemplo

Consideremos os dados do arquivo `esforco` com o objetivo de prever os valores da variável `vo2fcpico` (VO2/FC no pico do exercício) a partir das variáveis `NYHA`, `idade`, `altura`, `peso`, `fcrep` (frequência cardíaca em repouso) e `vo2rep` (VO2 em repouso). Um modelo inicial de regressão linear múltipla também pode ser ajustado por meio dos seguintes comandos da função `gam`

```
mod0 <- gam(vo2fcpico ~ NYHA + idade + altura + peso + fcrep
            + vo2rep, data=esforco)
```

Como não especificamos nem a distribuição da resposta, nem a função de ligação, a função `gam` utiliza a distribuição normal com função de ligação logarítmica, conforme indica o resultado.

MAG: exemplo

Family: gaussian

Link function: identity

Formula:

vo2fcpico ~ NYHA + idade + altura + peso + fcrep + vo2rep

Parametric coefficients:

	Estimate	Std. Error	t value	Pr(> t)	
(Intercept)	-4.80229	4.43061	-1.084	0.280642	
NYHA1	-0.45757	0.50032	-0.915	0.362303	
NYHA2	-1.78625	0.52629	-3.394	0.000941	***
NYHA3	-2.64609	0.56128	-4.714	6.75e-06	***
NYHA4	-2.43352	0.70532	-3.450	0.000780	***
idade	-0.05670	0.01515	-3.742	0.000284	***
altura	0.09794	0.02654	3.690	0.000342	***
peso	0.08614	0.01739	4.953	2.48e-06	***
fcrep	-0.07096	0.01318	-5.382	3.84e-07	***
vo2rep	0.35564	0.24606	1.445	0.151033	

R-sq.(adj) = 0.607 Deviance explained = 63.5%

GCV = 4.075 Scale est. = 3.7542 n = 127

MAG: exemplo

Para avaliar a qualidade do ajuste, produzimos gráficos de dispersão entre os resíduos do ajuste e cada uma das variáveis preditoras. Esses gráficos estão dispostos na Figura 5 e sugerem relações possivelmente não lineares pelo menos em alguns casos.

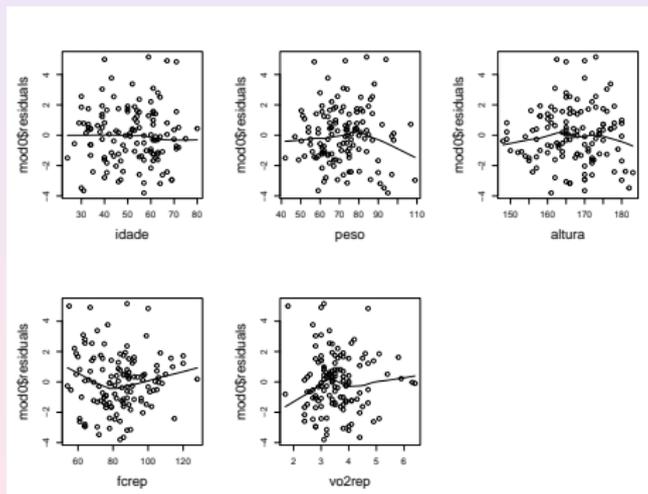


Figura 5: Gráficos de dispersão (com curva *lowess*) entre *vo2fcpico* e cada variável preditora contínua considerada no Exemplo.

MAG: exemplo

Uma alternativa é considerar modelos GAM do tipo (14) em que as funções f_i são expressas em termos de *splines*. Em particular, um modelo GAM com *splines* cúbicos para todas as variáveis explicativas contínuas pode ser ajustado por meio do comando

```
mod1 <- gam(vo2fcpico ~ NYHA + s(idade) + s(altura) + s(peso) +  
             s(fcrep) + s(vo2rep), data=esforco)
```

gerando os seguintes resultados:

MAG: exemplo

Family: gaussian

Link function: identity

Formula:

vo2fcpico ~ NYHA + s(idade) + s(altura) + s(peso) + s(fcrep) +
s(vo2rep)

Parametric coefficients:

	Estimate	Std. Error	t value	Pr(> t)
(Intercept)	10.2101	0.3207	31.841	< 2e-16 ***
NYHA1	-0.5498	0.4987	-1.103	0.272614
NYHA2	-1.8513	0.5181	-3.573	0.000522 ***
NYHA3	-2.8420	0.5664	-5.018	1.99e-06 ***
NYHA4	-2.5616	0.7031	-3.643	0.000410 ***

Approximate significance of smooth terms:

	edf	Ref.df	F	p-value
s(idade)	1.000	1.000	15.860	0.00012 ***
s(altura)	5.362	6.476	3.751	0.00142 **
s(peso)	1.000	1.000	22.364	6.32e-06 ***
s(fcrep)	1.742	2.185	16.236	3.95e-07 ***
s(vo2rep)	1.344	1.615	0.906	0.47319

R-sq.(adj) = 0.64 Deviance explained = 68.2%

GCV = 3.9107 Scale est. = 3.435 n = 127

MAG: exemplo

- O painel superior contém estimativas dos componentes paramétricos do modelo e o painel inferior, os resultados referentes aos termos suavizados. Neste caso apenas a variável categorizada NYHA não foi suavizada, dada sua natureza não paramétrica.
- A coluna rotulada edf contém os graus de liberdade efetivos associados a cada variável preditora. Para cada variável preditora contínua não suavizada, perde-se um grau de liberdade; para as variáveis suavizadas a atribuição de graus de liberdade é mais complexa em virtude do número de funções base e do número de nós utilizados no processo de suavização. A linha rotulada GCV (*Generalized Cross Validation*) está associada com a escolha (por validação cruzada) do parâmetro de suavização.
- A suavização é irrelevante apenas para a variável vo2rep e dado que ela também não apresentou contribuição significativa no modelo de regressão linear múltipla, pode-se considerar um novo modelo GAM obtido com a sua eliminação. Os resultados correspondentes, apresentados a seguir, sugerem que todas as variáveis predictoras contribuem significativamente para explicar sua relação com a variável resposta,

MAG: exemplo

Formula:

vo2fcpico ~ NYHA + s(idade) + s(altura) + s(peso) + s(fcrep)

Parametric coefficients:

	Estimate	Std. Error	t value	Pr(> t)
(Intercept)	10.2301	0.3202	31.948	< 2e-16 ***
NYHA1	-0.5818	0.4985	-1.167	0.245650
NYHA2	-1.8385	0.5161	-3.563	0.000539 ***
NYHA3	-2.9669	0.5512	-5.382	4.04e-07 ***
NYHA4	-2.4823	0.6980	-3.556	0.000551 ***

Approximate significance of smooth terms:

	edf	Ref.df	F	p-value
s(idade)	1.000	1.000	16.322	9.59e-05 ***
s(altura)	5.311	6.426	3.857	0.00115 **
s(peso)	1.000	1.000	22.257	6.56e-06 ***
s(fcrep)	1.856	2.337	14.865	8.39e-07 ***

R-sq.(adj) = 0.64 Deviance explained = 67.8%

GCV = 3.8663 Scale est. = 3.435 n = 127

MAG: exemplo

- Como o número efetivo de graus de liberdade para idade e peso é igual a 1, elas se comportam de forma linear no modelo. Os gráficos dispostos na Figura 6, produzidos por meio do comando `plot(mod2, se=TRUE)` evidenciam esse fato; além disso mostram a natureza “mais não linear” da variável altura (com `edf= 5.311`).
- Uma avaliação da qualidade do ajuste pode ser realizada por meio de uma análise de resíduos e de comparação dos valores observados e preditos. Para essa finalidade, o comando `gam.check(mod2)` gera os gráficos apresentados na Figura 7 que não evidenciam problemas no ajuste.
- Além disso, é possível comparar os modelos por meio de uma **análise de desviância**, que pode ser obtida com o comando `anova(mod0, mod1, mod2, test= "F")`.

MAG: exemplo

Analysis of Deviance Table

Model 1: vo2fcpico ~ NYHA + idade + altura + peso + fcrep +
vo2rep

Model 2: vo2fcpico ~ NYHA + s(idade) + s(altura) + s(peso) +
s(fcrep) + s(vo2rep)

Model 3: vo2fcpico ~ NYHA + s(idade) + s(altura) + s(peso) +
s(fcrep)

	Resid.	Df	Resid.	Dev	Df	Deviance	F	Pr(>F)
1	117.00	439.24						
2	109.72	383.18	7.2766		56.052	2.2425	0.03404 *	
3	111.24	387.58	-1.5129		-4.399	0.8465	0.40336	

MAG: exemplo

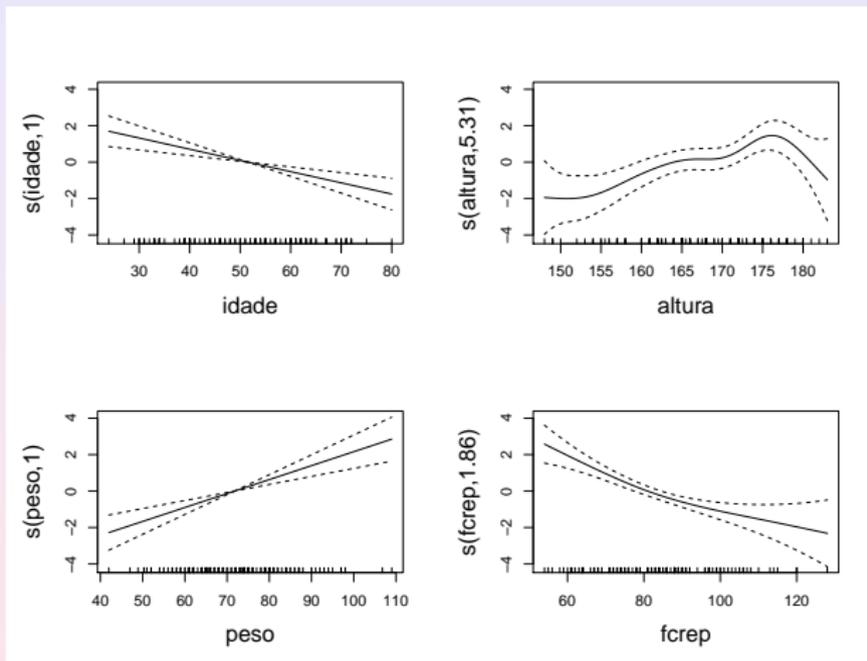


Figura 6: Funções suavizadas (com bandas de confiança) obtidas por meio do modelo GAM para os dados do Exemplo.

MAG: exemplo

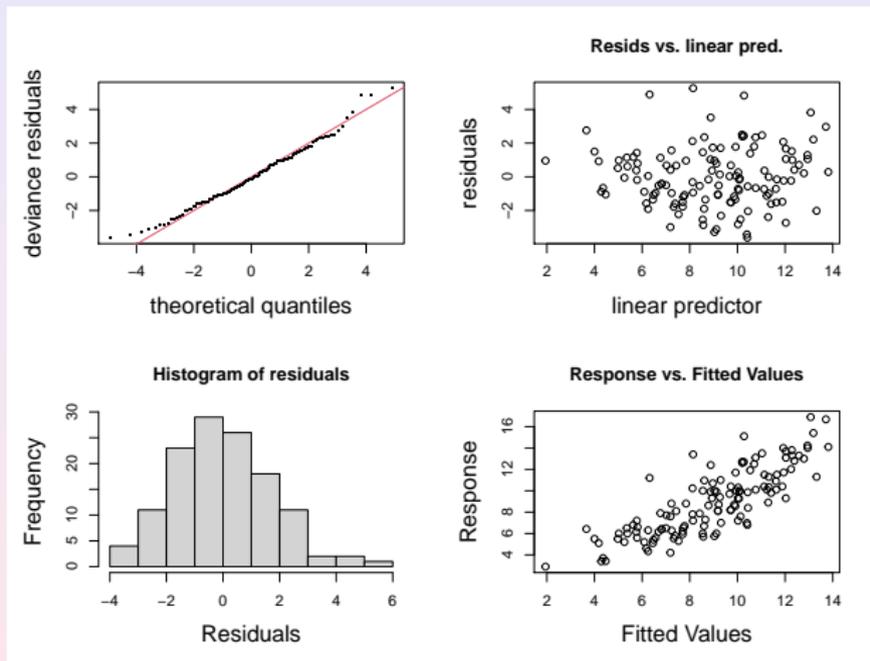


Figura 7: Gráficos diagnósticos para o ajuste do modelo GAM aos dados do Exemplo.

MAG: exemplo

- Esses resultados mostram que ambos os modelos GAM são essencialmente equivalentes ($p = 0.403$) mas significativamente mais adequados ($p = 0.034$) que o modelo de regressão linear múltipla.
- A previsão para um novo conjunto dados em que apenas os valores das variáveis preditoras estão disponíveis pode ser obtida por meio do comando `predict(mod2, newdata=esforcoprev, se=TRUE, type="response")`. Consideremos, por exemplo, o seguinte conjunto com dados de 5 novos pacientes

idade	altura	peso	NYHA	fcrep	vo2rep
66	159	50	2	86	3,4
70	171	77	4	108	4,8
64	167	56	2	91	2,5
42	150	67	2	70	3,0
54	175	89	2	91	2,9

MAG: exemplo

O resultado da previsão com o modelo adotado é

```
$fit
```

```
1          2          3          4          5
```

```
4.632615  5.945157  5.928703  7.577097 10.273719
```

```
$se.fit
```

```
1          2          3          4          5
```

```
0.6747203 0.7155702 0.6255449 0.7731991 0.5660150
```

Referências

Bühlmann, P. and van de Geer, S. (2011). *Statistics for High-Dimensional Data*. Berlin: Springer.

Friedman, J. H., Hastie, T. and Tibshirani, R. (2010). Regularization paths for generalized linear models via coordinate descent. *Journal of Statistical Software*, **33**, 1–22.

Hastie, T., Tibshirani, R. and Wainwright, M. (2015). *Statistical Learning with Sparsity*. Chapman and Hall.

James, G., Witten, D., Hastie, T. and Tibshirani, R. (2017). *Introduction to Statistical Learning*. Springer.

Morettin, P. A. e Singer, J. M. (2024). *Estatística e Ciência de Dados*. 2a. Edição. LTC: Rio de Janeiro.

Tibshirani, R. (1996). Regression shrinkage and selection via the lasso. *Journal of the Royal Statistical Society, Series B (methodological)*, **58**, 267–288.