

A conjectura de Woodall sobre empacotamento de dijunções

Paulo Feofiloff *

<https://www.ime.usp.br/~pf/dijoins/>

5/4/2025

Resumo

Em todo digrafo, o tamanho de um corte dirigido mínimo é igual ao número máximo de dijunções duas a duas disjuntas. Esta é a conjectura de Woodall [Sch03]. A discussão da conjectura ficou parada por duas décadas até que Cornuéjols e Guenin [CGM00] retomaram o assunto para estudar uma generalização abstrata da conjectura.

Esta palestra apresenta a conjectura de Woodall, sua versão capacitada, o contra-exemplo de Schrijver, os contraexemplos de Cornuéjols e Guenin, e alguns resultados de Williams [Wil04].

1 Introdução

Um *digrafo* (= *digraph*) é um par (V, A) em que V é um conjunto finito e A é um conjunto de pares ordenados de elementos de V . Os elementos de V são chamados *vértices* e os de A são chamados *arcos*. Para cada arco vw , o vértice v é a *ponta positiva* e w é a *ponta negativa* do arco. Os conjuntos de vértices e arcos de um digrafo D são denotados por $V(D)$ e $A(D)$ respectivamente. O *transposto*, ou *dual direcional*, de um digrafo D é o digrafo que se obtém pela substituição de cada arco vw pelo par wv .

Cortes. Um arco vw *sai* de um subconjunto X de $V(D)$ se $v \in X$ e $w \notin X$. Um arco vw *entra* em X se $v \notin X$ e $w \in X$. Uma *fonte* (= *source*) é qualquer subconjunto S de $V(D)$ tal que nenhum arco entra em S . As fontes \emptyset e $V(D)$ são *triviais*. Um *sorvedouro* (= *sink*) é uma fonte no transposto de D . Um *vértice-fonte* é qualquer vértice s tal que $\{s\}$ é uma fonte e um *vértice-sorvedouro* é um vértice-fonte no transposto de D .

Para qualquer conjunto X de vértices, denotamos por ∂X o conjunto dos arcos que têm uma ponta em X e outra fora de X . Um *corte dirigido* (= *directed cut*), ou simplesmente *corte*, é qualquer conjunto da forma ∂S onde S é uma fonte não trivial ou um sorvedouro não trivial. Dizemos que S é uma *margem positiva* do corte e $V(D) \setminus S$ é uma *margem*

* Departamento de Ciência da Computação, Instituto de Matemática e Estatística, Universidade de São Paulo

negativa. Dizemos também que ∂S é o corte *associado* a S . Um corte é *minimal* se nenhum de seus subconjuntos próprios é um corte.

Um digrafo é *conexo* se \emptyset não é um corte. Num digrafo conexo, todo corte tem uma única margem positiva e uma única margem negativa.

Junções. Uma *dijunção* (= *dijoin*), ou simplesmente *junção*, é qualquer conjunto de arcos que intersecta todos os cortes, ou seja, qualquer subconjunto J de $A(D)$ tal que $J \cap C \neq \emptyset$ para cada corte C . Uma junção é *minimal* se nenhum de seus subconjuntos próprios é uma junção.

Um digrafo tem uma junção se e somente se \emptyset não é um corte. Por outro lado, \emptyset é uma junção se e somente se o digrafo não tem corte algum.

A seguinte caracterização é útil: um conjunto J de arcos é uma junção se e somente se para todo par (s, t) de vértices existe um caminho de s a t cujos arcos diretos¹ pertencem a J . Esta caracterização também pode ser formulada assim: um conjunto J de arcos é uma junção se e somente se a contração de todos os arcos de J torna o digrafo fortemente conexo.²

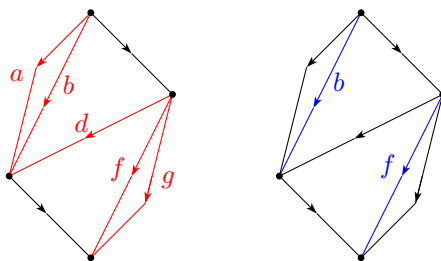


Figura 1: No digrafo à esquerda, o conjunto de arcos $\{a, b, d, f, g\}$ é um corte. No digrafo à direita, o conjunto de arcos $\{b, f\}$ é uma junção. (Este exemplo tem arcos paralelos, como a e b , em desacordo com nossa definição de digrafo. Para nos adequar à definição, poderíamos “subdividir” os arcos paralelos; mas isso tornaria o exemplo mais pesado.)

Cortes versus empacotamentos de junções. Um conjunto \mathcal{E} de junções é *disjunto* se os elementos de \mathcal{E} são disjuntos dois a dois. Em outras palavras, \mathcal{E} é disjunto se cada arco do digrafo pertence a no máximo um elemento de \mathcal{E} . Um *empacotamento* (= *packing*) de junções é o mesmo que um conjunto disjunto de junções. Não há mal em supor que as junções que compõem um empacotamento são minimais.

Há uma relação óbvia entre o tamanho de um corte e o tamanho de um empacotamento de junções:

Lema 1.1 Para qualquer empacotamento \mathcal{E} de junções e qualquer corte C vale a desigualdade $|\mathcal{E}| \leq |C|$. ■

A seguinte conjectura de Woodall [Woo78a, Woo78b, Sch03] continua em aberto:

¹ Um arco vw de um caminho é *direto* se o caminho percorre o arco de v para w e *inverso* se o caminho percorre o arco de w para v .

² Um digrafo é *fortemente conexo* se para cada par ordenado (s, t) de seus vértices existe um caminho de s a t sem arcos inversos.

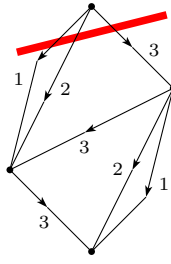


Figura 2: A linha colorida indica um corte de tamanho 3. Os rótulos 1, 2 e 3 indicam um empacotamento de três junções.

Conjectura 1 (Woodall) *Todo digrafo dotado de um corte tem um empacotamento \mathcal{E} de junções e um corte C tais que $|\mathcal{E}| = |C|$.*

Essa conjectura é dual do teorema de Lucchesi–Younger [LY78], segundo o qual todo digrafo conexo tem um empacotamento \mathcal{C} de cortes e uma junção J tais que $|\mathcal{C}| = |J|$.

Todo arco de um digrafo pertence a um corte ou a um circuito dirigido,³ mas não ambos. Em particular, $C \cap A(Z) = \emptyset$ para todo corte C e todo circuito dirigido Z , sendo $A(Z)$ o conjunto de arcos de Z . Segue dessa observação que podemos restringir o estudo da conjectura 1 a *dags* (= *directed acyclic graphs*), ou seja, a digrafos que não têm circuitos dirigidos.

2 Corte mínimo e empacotamento máximo de junções

Um corte C é *mínimo* se não existe corte C' tal que $|C'| < |C|$. Um empacotamento \mathcal{E} de junções é *máximo* se não existe empacotamento \mathcal{E}' de junções tal que $|\mathcal{E}'| > |\mathcal{E}|$. A conjectura de Woodall nos leva a considerar o seguinte par de problemas de otimização:

Problema 1 *Encontrar um corte mínimo num digrafo.*

Problema 2 *Encontrar um empacotamento máximo de junções num digrafo.*

Existe um algoritmo polinomial para o problema 1 (trata-se de uma variante do algoritmo *Max-flow Min-cut*). Não se conhece algoritmo polinomial para problema 2, mas não há evidências de que o problema seja NP-difícil.

Convém adotar uma notação para o tamanho dos objetos de que tratam os dois problemas. Dado um digrafo D , denotamos por

$$\nu(D)$$

o tamanho de um empacotamento máximo de junções de D e denotamos por

$$\tau(D)$$

o tamanho de um corte mínimo de D . Se D não tem corte algum então $\tau(D) = \infty$ e $\nu(D) = \infty$ (uma vez que um número ilimitado de cópias de \emptyset é um empacotamento de junções). Se D tem algum corte então $\tau(D)$ e $\nu(D)$ são finitos. Se D é desconexo então $\tau(D) = 0$ (pois

³ Um circuito é *dirigido* se não tem arcos inversos.

\emptyset é um corte) e $\nu(D) = 0$ (pois não há junções). Se D consiste em um caminho com pelo menos um arco então $\tau(D) = 1$ e $\nu(D) = 1$ (uma vez que $A(D)$ é uma junção).

Segue imediatamente do lema 1.1 que $\nu(D) \leq \tau(D)$ para todo digrafo D . A conjectura 1 pode então ser formulada assim:

Conjectura 2 (Woodall) *Todo digrafo D satisfaz a igualdade $\nu(D) = \tau(D)$.*

Dizemos que um digrafo D *satisfaz a conjectura de Woodall* se $\nu(D) = \tau(D)$. Se $\tau(D) \leq 1$ então é óbvio que D satisfaz a conjectura de Woodall. É menos óbvio que D satisfaz a conjectura se $\tau(D) = 2$ [Sch03, p.968]. Sabe-se também [FY87, Sch82] que todo dag com um único vértice-fonte (ou um único vértice-sorvedouro) satisfaz a conjectura.

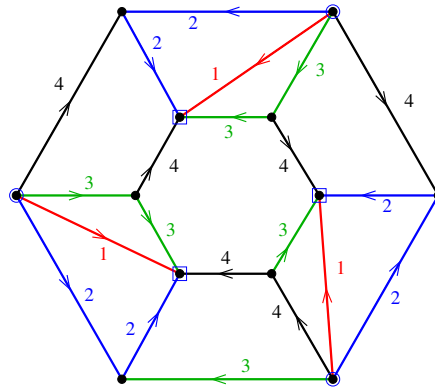


Figura 3: Nesse digrafo, $\nu = 4$ e $\tau = 4$. Portanto, o digrafo satisfaz a conjectura de Woodall. As cores (e os rótulos numéricos) indicam um empacotamento de 4 junções. O digrafo é um dag. Os vértices-fonte estão assinalados por círculos e os vértices-sorvedouro por quadrados.

3 Programas lineares

Seja \mathcal{J} o conjunto de todas as junções minimais de um digrafo $D = (V, A)$ e M a matriz indexada por $\mathcal{J} \times A$ cujas linhas são os vetores característicos dos elementos de \mathcal{J} . Considere o seguinte par dual de programas lineares:

$$\text{maximizar } y\mathbf{1} \quad \text{sob as restrições } y \in \mathbb{R}_+^{\mathcal{J}} \text{ e } yM \leq \mathbf{1}, \quad (1)$$

$$\text{minimizar } \mathbf{1}x \quad \text{sob as restrições } x \in \mathbb{R}_+^A \text{ e } Mx \geq \mathbf{1}. \quad (2)$$

(O “1” representa um vetor cujos elementos são todos iguais a 1. O vetor é indexado por \mathcal{J} ou por A , conforme o contexto.)

Se trocarmos “ $y \in \mathbb{R}_+^{\mathcal{J}}$ ” por “ $y \in \{0, 1\}^{\mathcal{J}}$ ” no programa linear (1) teremos um programa inteiro que representará o problema 2. Todo vetor y nesse programa representará um empacotamento de junções e $y\mathbf{1}$ será o tamanho do empacotamento. O valor ótimo do programa inteiro será $\nu(D)$.

Se trocarmos “ $x \in \mathbb{R}_+^A$ ” por “ $x \in \{0, 1\}^A$ ” no programa linear (2) teremos um programa inteiro que representará o problema 1. Todo x nesse programa será o vetor característico

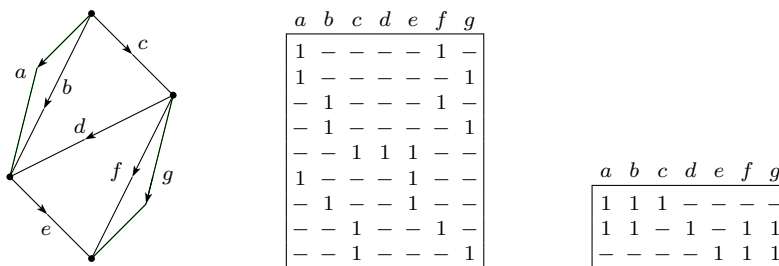


Figura 4: As linhas da primeira matriz são os vetores característicos das junções minimais do digrafo. O digrafo é um dag e tem apenas uma fonte e apenas um sorvedouro. As linhas da segunda matriz são os vetores característicos dos cortes minimais.

de um corte (pois um corte é o mesmo que um conjunto de arcos que intersecta todas as junções) e $1x$ será o tamanho do corte. O valor ótimo do programa inteiro será $\tau(D)$.

Como já observamos, a conjectura de Woodall é dual do teorema de Lucchesi–Younger [LY78]. Segue daquele teorema (embora isso não seja óbvio) que todos os vértices do poliedro $\{x : x \in \mathbb{R}_+^A \text{ e } Mx \geq 1\}$ são inteiros e portanto toda solução do programa linear (2) pertence a $\{0, 1\}^A$. Decorre daí que $\tau(D) = \nu^*(D)$, sendo $\nu^*(D)$ o valor ótimo do programa linear (1).

4 Analogia com fluxo máximo

A conjectura de Woodall é semelhante, até certo ponto, ao teorema *Max-flow Min-cut* [Sch03, cap.10]. Esse teorema se aplica a qualquer digrafo e qualquer par (s, t) de seus vértices e garante que o tamanho de um fluxo máximo de s a t é igual ao tamanho que um semicorte mínimo dentre os que separam s de t . Aqui, um **fluxo** é um conjunto de caminhos dirigidos⁴ de s a t sem arcos em comum; e um **semicorte** é o conjunto dos arcos que saem de algum conjunto X de vértices que contém s mas não contém t .

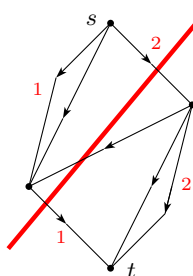


Figura 5: Um fluxo máximo (rótulos 1 e 2) e um semicorte mínimo (linha colorida).

A semelhança entre a conjectura de Woodall e o teorema *Max-flow Min-cut* é apenas parcial. No teorema, há dois vértices fixos e os caminhos são dirigidos. Na conjectura, não há vértices fixos, os caminhos (que representam junções) não são necessariamente dirigidos, e apenas os arcos diretos dos caminhos são levadas em conta.

⁴ Um caminho é *dirigido* se não tem arcos inversos.

O teorema *Max-flow Min-cut* admite uma generalização em que cada arco a tem uma capacidade u_a no conjunto $\mathbb{N} := \{0, 1, 2, 3, \dots\}$ dos números naturais. Um arco a não pode ser usada mais que u_a vezes pelo fluxo e contribui u_a para o tamanho de cada semicorte que o contém. É difícil imaginar como o teorema *Max-flow Min-cut* poderia valer sem que valesse também sua generalização capacitada.

A semelhança entre o teorema *Max-flow Min-cut* e a conjectura de Woodall sugere estudar a generalização capacitada da conjectura.

5 Generalização capacitada da conjectura de Woodall

Um *digrafo capacitado* é um par (D, u) em que D é um digrafo e u é um vetor indexado por $A(D)$ com valores em $\mathbb{N} \cup \{\infty\}$. Esse vetor atribui uma *capacidade* u_a a cada arco a de D . O arco a é *nulo* se $u_a = 0$ e *infinito* se $u_a = \infty$. Atribuir capacidade ∞ a um arco tem o mesmo efeito que contrair o arco e é uma maneira conveniente de evitar a contração propriamente dita.

A *capacidade* de um corte C num digrafo capacitado (D, u) é o número $u(C) := \sum_{a \in C} u_a$. Um corte C é *mínimo* se não existe corte C' tal que $u(C') < u(C)$.

A presença de arcos infinitos pede uma redefinição dos termos “fonte” e “corte”. Assim, uma *fonte de* (D, u) é uma fonte S de D tal que ∂S não contém arcos infinitos e um *corte de* (D, u) é um corte de D sem arcos infinitos. Em outras palavras, um corte de (D, u) é um conjunto ∂S tal que S é uma fonte não trivial de (D, u) .

Também é conveniente redefinir o termo “junção”. Assim, uma *junção de* (D, u) é um conjunto de arcos que intersecta todos os cortes de (D, u) e não contém arcos infinitos. É claro que toda junção de D que não tem arcos infinitos também é uma junção de (D, u) .

Os conceitos de caminho dirigido e circuito dirigido também precisam ser redefinidos. Diremos que um caminho e um circuito são *dirigidos em* (D, u) se todos os seus arcos inversos são infinitos. (Assim, os arcos infinitos podem ser percorridas em qualquer das duas direções.) Sob essa redefinição, todo arco não infinito de (D, u) pertence a um corte de (D, u) ou a um circuito dirigido em (D, u) , mas não ambos.

No contexto de digrafos capacitados, é natural usar *coleções* de junções no lugar dos conjuntos de junções da seção 1. Uma coleção é um “conjunto” que pode ter várias cópias de um mesmo elemento, cada cópia contribuindo 1 para o tamanho da coleção. Uma coleção \mathcal{E} de junções de (D, u) é *disjunta em* (D, u) se

$$|\mathcal{E}(a)| \leq u_a$$

para cada arco a , sendo $\mathcal{E}(a) := \{J \in \mathcal{E} : J \ni a\}$ a coleção das junções que contêm a . Em outras palavras, \mathcal{E} é disjunta se cada arco a pertence a no máximo u_a elementos de \mathcal{E} . Se a é nulo então nenhum elemento de \mathcal{E} contém a .

Um *empacotamento* de junções em (D, u) é uma coleção disjunta de junções de (D, u) . A seguinte relação entre empacotamentos e cortes generaliza o lema 1.1:

Lema 5.1 *Em qualquer digrafo capacitado (D, u) , para qualquer empacotamento \mathcal{E} de junções e qualquer corte C ,*

$$|\mathcal{E}| \leq u(C).$$

Ademais, se $|\mathcal{E}| = u(C)$ então $|J \cap C| = 1$ para cada J em \mathcal{E} e $|\mathcal{E}(a)| = u_a$ para cada a em C .

PROVA: Seja \mathcal{E} um empacotamento de junções e C um corte de (D, u) . Para cada elemento J de \mathcal{E} existe um arco a de C tal que $\mathcal{E}(a) \ni J$. Logo,

$$|\mathcal{E}| \leq \sum_{a \in C} |\mathcal{E}(a)| \leq \sum_{a \in C} u_a = u(C).$$

Suponha agora que $|\mathcal{E}| = u(C)$. Então o primeiro " \leq " vale como " $=$ " e portanto $|J \cap C| = 1$ para cada J em \mathcal{E} . Também o segundo " \leq " vale como " $=$ ", donde $|\mathcal{E}(a)| = u_a$ para cada a em C . ■

A definição dos parâmetros τ e ν precisa ser ajustada para levar em conta as capacidades dos arcos. Assim, denotamos por

$$\nu(D, u) \text{ e } \tau(D, u)$$

o tamanho de um empacotamento máximo de junções de (D, u) e a capacidade de um corte mínimo de (D, u) respectivamente. O lema 5.1 tem a seguinte consequência imediata: todo digrafo capacitado (D, u) satisfaz a desigualdade

$$\nu(D, u) \leq \tau(D, u). \quad (3)$$

A correspondente generalização da conjectura de Woodall (conjectura 2) é conhecida como conjectura de Edmonds–Giles [EG77]:

Conjectura 3 (Edmonds–Giles) *Todo digrafo capacitado (D, u) satisfaz a igualdade $\nu(D, u) = \tau(D, u)$.*

Se $\tau(D, u) = 0$ então $\nu(D, u) = 0$ e portanto $\nu(D, u) = \tau(D, u)$. Se $\tau(D, u) = 1$ então $\nu(D, u) = \tau(D, u)$ pois $\{a \in A(D) : 0 < u_a < \infty\}$ é uma junção. Portanto, a conjectura está correta quando restrita a digrafos capacitados em que $\tau(D, u) \leq 1$.

Arcos nulos. A generalização capacitada do teorema *Max-flow Min-cut* (veja a seção 4) pode ser reduzida à versão original, não capacitada. A redução consiste em remover os arcos de capacidade 0 e trocar cada arco de capacidade $k \geq 2$ por k arcos em paralelo. À primeira vista, a mesma construção poderia reduzir a conjectura de Edmonds–Giles à conjectura de Woodall. De fato, um arco a de capacidade $k \geq 2$ pode ser simulado por k cópias de a em paralelo, mas a remoção de um arco de capacidade 0 pode criar novos cortes,⁵ alterando assim a instância do problema. Portanto, a conjectura de Edmonds–Giles não é um caso especial da conjectura de Woodall.

6 Contraexemplos

A conjectura de Edmonds–Giles é falsa. As próximas seções exibirão vários contraexemplos. Um *contraexemplo* é qualquer digrafo capacitado (D, u) tal que $\nu(D, u) < \tau(D, u)$. Todos os

⁵ A remoção de um arco cria novos cortes se e somente se o arco não é transitivo. Um arco vw é *transitivo* em (D, u) se existe um caminho dirigido de v a w em $(D - vw, u')$, sendo u' a restrição de u ao conjunto de arcos de $D - vw$.

contraexemplos conhecidos têm arcos nulos e portanto não afetam a conjectura de Woodall (conjectura 2).

Dizemos que um digrafo D é *bom* se não existe u tal que (D, u) é um contraexemplo. A conjectura 3 poderia ser formulada dizendo “todo digrafo é bom”. Sabe-se, por exemplo, que

1. todo dag com um único vértice-fonte é bom;
2. todo dag dotado de conexão fonte-sorvedouro⁶ é bom.

A prova de 1 é análoga à do teorema *Max-flow Min-cut* mencionado na seção 4. Essa prova contém um algoritmo polinomial que calcula $\tau(D, u)$. A prova de 2 foi obtida por Schrijver [Sch82] e, independentemente, por F. e Younger [FY87].

7 O contraexemplo de Schrijver

Schrijver [Sch80] encontrou o primeiro contraexemplo para a conjectura 3. O contraexemplo está representado na figura 6 e será denotado por (D_1, u_1) .

Fato 7.1 $\nu(D_1, u_1) = 1$ e $\tau(D_1, u_1) = 2$.

PROVA: O vetor u_1 é binário, ou seja, suas componentes estão em $\{0, 1\}$. É fácil constatar que $\tau(D_1, u_1) = 2$ e que uma das duas margens de cada corte mínimo de (D_1, u_1) tem um só vértice. Seja B_1 o conjunto de arcos *ativos*, isto é, arcos cuja capacidade é 1. O subdigrafo induzido por B_1 consiste em três caminhos, cada um tendo comprimento 3. Dizemos que esses são os *caminhos ativos* do digrafo. Dizemos também que um corte é *crítico* se intersecta cada caminho ativo uma única vez. Como se vê na figura 7, há quatro cortes críticos.

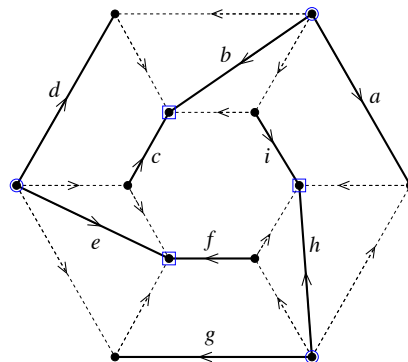


Figura 6: O contraexemplo (D_1, u_1) de Schrijver. O vetor de capacidades u_1 tem valores em $\{0, 1\}$. Os arcos nulos são indicados por linhas tracejadas; os outros são indicados por linhas contínuas. O digrafo é um dag; os vértices-fonte estão assinalados por círculos e os vértices-sorvedouro por quadrados.

Suponha, por um momento, que $\nu(D_1, u_1) \geq 2$. Então B_1 inclui duas junções mutuamente disjuntas, digamos J e K . Os arcos de cada caminho ativo estão alternadamente em J e K , uma vez que cada vértice interno de cada caminho ativo é margem de um corte com

⁶ Um dag é *dotado de conexão fonte-sorvedouro* (= *is source-sink connected*) se cada vértice-fonte é ligada a cada vértice-sorvedouro por um caminho dirigido.

exatamente 2 arcos ativos. Em outras palavras, cada caminho ativo segue o padrão (J, K, J) ou o padrão (K, J, K) . No conjunto dos três caminhos ativos, esses dois padrões podem ser combinados de 4 maneiras diferentes apenas, como indicado na figura 7. Porém, para cada uma das 4 combinações, J ou K não intersecta um dos cortes críticos. Assim, J ou K não é uma junção, ao contrário do que havíamos suposto. Essa contradição mostra que $\nu(D_1, u_1) < 2$. Como B_1 é uma junção, temos $\nu(D_1, u_1) = 1$. ■

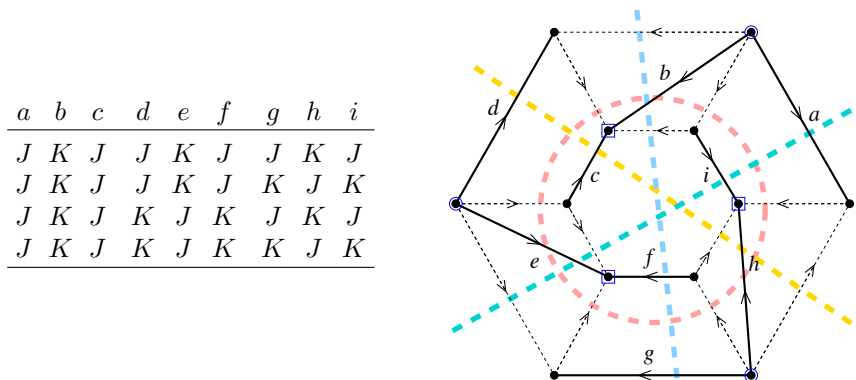


Figura 7: Cada linha da tabela mostra uma possível disposição de duas potenciais junções mutuamente disjuntas, J e K , no digrafo capacitado (D_1, u_1) da figura 6. Em cada linha da tabela, um de J e K não intersecta um dos quatro cortes críticos indicados no desenho. Na primeira linha, por exemplo, J não intersecta o corte crítico indicado pelo círculo rosa.

O digrafo capacitado de Schrijver tem a forma de um anel de comprimento $2i$, com $i = 3$. Os digrafos capacitados análogos com $i = 5, 7, 9, \dots$ (veja a figura 8) também são contraexemplos. Já os digrafos capacitados análogos com $i = 2, 4, 6, 8, \dots$ não são contraexemplos.

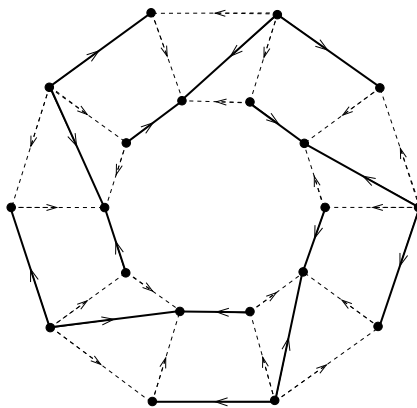


Figura 8: O contraexemplo (D'_1, u'_1) da figura é a generalização de (D_1, u_1) da figura 6 baseada num anel de comprimento 2×5 .

7.1 Empacotamento fracionário de junções

A seguinte digressão é interessante mas não tem relação direta com a conjectura de Edmonds–Giles. O digrafo capacitado (D_1, u_1) da figura 6 não tem um empacotamento de tamanho 2, mas tem um “empacotamento fracionário” de tamanho 2, como mostraremos.

Digamos que as junções $\{a, c, d, f, h\}$, $\{d, f, g, i, b\}$, $\{g, i, a, c, e\}$ e $\{b, h, e\}$ são *especiais*. Atribua peso $\frac{1}{2}$ a cada junção especial e peso 0 a todas as outras junções de D_1 . Cada arco de capacidade 1 em (D_1, u_1) pertence a exatamente duas das junções especiais e cada arco de capacidade 0 não pertence a nenhuma das junções especiais. Assim, a soma dos pesos de todas as junções que contêm um dado arco a não passa da capacidade de a . Pode-se dizer, portanto, que a coleção ponderada de junções especiais é “disjunta” em (D_1, u_1) . O tamanho dessa coleção ponderada é a soma dos pesos de todas as junções, ou seja, $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 2$. Assim, (D_1, u_1) tem um “empacotamento fracionário” de tamanho 2.

Esse exemplo ilustra um fenômeno geral. Para qualquer digrafo capacitado (D, u) , considere os programas lineares

$$\text{maximizar } y1 \text{ sob as restrições } y \in \mathbb{R}_+^{\mathcal{J}} \text{ e } yM \leq u \quad (4)$$

$$\text{minimizar } ux \text{ sob as restrições } x \in \mathbb{R}_+^{\mathcal{A}} \text{ e } Mx \geq 1 \quad (5)$$

que generalizam os programas (2) e (1) da seção 3. Demonstra-se que $\nu^*(D, u) = \tau(D, u)$, sendo $\nu^*(D, u)$ o valor ótimo do programa (4) e $\tau(D, u)$ o valor ótimo do programa (5).

8 Os contraexemplos de Cornuéjols e Guenin

Por duas décadas, (D_1, u_1) foi o único contraexemplo conhecido para a conjectura 3. Em 2002, Cornuéjols e seu aluno Guenin [CG02] encontraram dois novos contraexemplos, que denotaremos por (D_2, u_2) e (D_3, u_3) . Esses contraexemplos estão representados nas figuras 9 e 10 respectivamente.

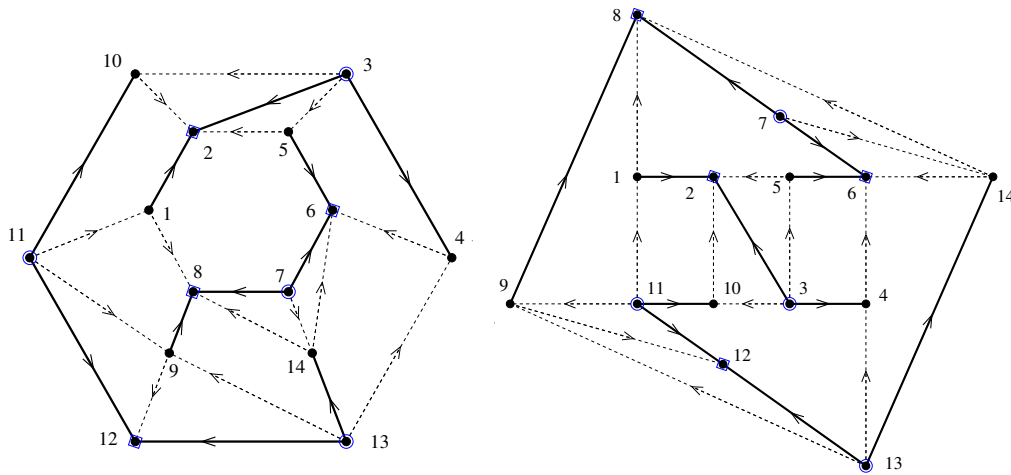


Figura 9: Dois desenhos do contraexemplo (D_2, u_2) de Cornuéjols e Guenin. O vetor de capacidades u_2 tem valores em $\{0, 1\}$. Os arcos nulos são indicados por linhas tracejadas; os outros, por linhas contínuas. O digrafo é um dag; os vértices-fonte estão assinalados por círculos e os vértices-sorvedouro por quadrados.

Fato 8.1 $\nu(D_2, u_2) = 1$ e $\tau(D_2, u_2) = 2$. ■

Fato 8.2 $\nu(D_3, u_3) = 1$ e $\tau(D_3, u_3) = 2$. ■

As provas dos fatos 8.1 e 8.2 são semelhantes à do fato 7.1. A figura 11 mostra os cortes

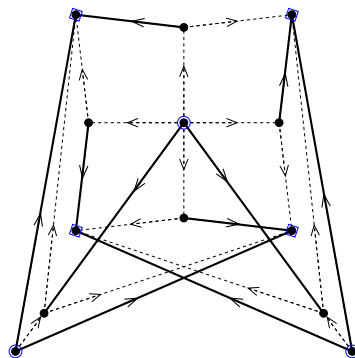


Figura 10: O contraexemplo (D_3, u_3) de Cornuéjols e Guenin. O vetor de capacidades u_3 tem valores em $\{0, 1\}$. Os arcos nulos são indicados por linhas tracejadas; os outros, por linhas contínuas. O digrafo é um dag.

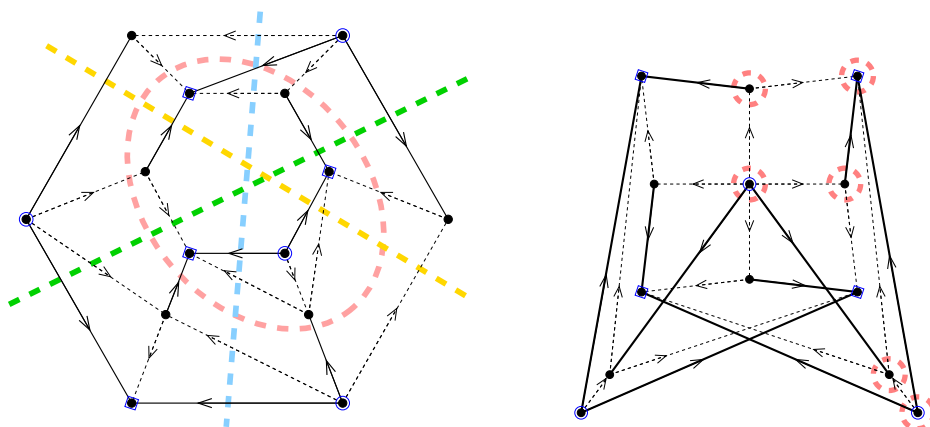


Figura 11: O primeiro desenho representa os quatro cortes críticos de (D_2, u_2) . O segundo desenho marca os vértices da margem positiva de um dos cortes críticos de (D_3, u_3) ; os outros três cortes críticos são definidos por simetria.

críticos usados nas provas. (Esses são os cortes que intersectam cada caminho ativo uma única vez.)

9 Contraexemplos minimais

Ao procurar novos contraexemplos para a conjectura de Edmonds–Giles podemos nos limitar aos contraexemplos que, em algum sentido, não “incluem” outros. Diremos que tais contraexemplos são minimais.

Para definir a expressão “um contraexemplo inclui outro”, começamos por introduzir uma relação de ordem entre vetores de capacidades. Dados dois vetores de capacidades u e u' para um digrafo, dizemos que $u' < u$ se $u'_a \leq u_a$ para todo arco a e $u'_a < u_a$ para algum arco a . É claro que a relação é transitiva (ou seja, se $u'' < u'$ e $u' < u$ então $u'' < u$) e antissimétrica (ou seja, se $u' < u$ então $u \not< u'$).

Também precisamos introduzir uma notação auxiliar. Para qualquer digrafo capacitado (D, u) , denotaremos por $I(D, u)$ o conjunto dos arcos infinitos e por $N(D, u)$ o conjunto dos arcos nulos do digrafo.

Podemos agora definir uma relação de inclusão. Diremos que um digrafo capacitado (D, u) **inclui** um digrafo capacitado (D', u') se

- i. $V' \subseteq V$ e $A' \subset A$ ou
- ii. $V' = V$ e $A' = A$ e $I' \supset I$ ou
- iii. $V' = V$ e $A' = A$ e $I' = I$ e $N' \supset N$ ou
- iv. $V' = V$ e $A' = A$ e $I' = I$ e $N' = N$ e $u' < u$,

onde V' , A' , I' e N' são abreviaturas de $V(D')$, $A(D')$, $I(D', u')$ e $N(D', u')$ respectivamente e as abreviaturas V , A , I e N são definidas analogamente para (D, u) . Essa relação de inclusão é transitiva e antissimétrica. Seguem alguns exemplos ilustrativos:

1. Williams [Wil04] observou que o contraexemplo (D_2, u_2) de Cornuéjols–Guenin inclui o contraexemplo que passamos a definir. Sejam v e w os vértices 14 e 8 da figura 9 e seja D'_2 o digrafo $D_2 - vw$. Seja u'_2 a restrição de u_2 ao conjunto $A(D'_2)$. Então (D'_2, u'_2) está incluído em (D_2, u_2) . Ademais, (D'_2, u'_2) é um contraexemplo, pois $\nu(D'_2, u'_2) = \nu(D_2, u_2) < \tau(D_2, u_2) = \tau(D'_2, u'_2)$.
2. O contraexemplo (D'_1, u'_1) da figura 8 inclui o digrafo capacitado (D''_1, u''_1) da figura 12. Este último é um contraexemplo por ser “equivalente” ao contraexemplo (D_1, u_1) da figura 6.
3. O contraexemplo (D_1, u_1) de Schrijver (veja a figura 6) não inclui nenhum outro contraexemplo, embora isso não seja óbvio.

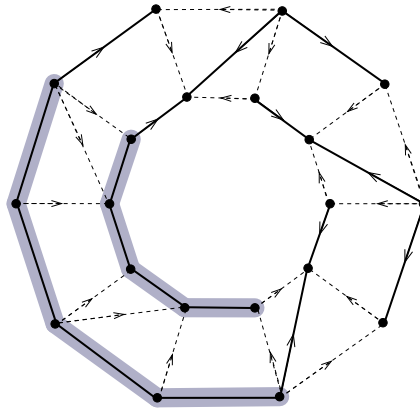


Figura 12: Digrafo capacitado (D''_1, u''_1) . (Compare com (D'_1, u'_1) da figura 8.) As faixas cinzas indicam os arcos infinitos. A orientação desses arcos foi omitida porque eles podem ser percorridos em qualquer direção.

Finalmente, podemos definir o conceito de contraexemplo minimal: um contraexemplo (D, u) é **minimal** se não inclui outro contraexemplo.

Se $A(D) = \emptyset$ ou $A(D) = I(D, u) \cup N(D, u)$ então (D, u) não é um contraexemplo. Segue dessa observação e da transitividade e antissimetria da relação de inclusão que todo contraexemplo inclui um contraexemplo minimal.

É claro que todo contraexemplo minimal é conexo. Examinaremos a seguir algumas outras propriedades de contraexemplos minimais. Os contraexemplos (D_1, u_1) , (D_2, u_2) e (D_3, u_3) das figuras 6, 9 e 10 têm essas outras propriedades, embora os dois últimos não sejam minimais.

9.1 Ausência de arcos transitivos nulos

Um arco vw é **transitivo** em (D, u) se existe um caminho dirigido de v a w em $(D - vw, u')$, sendo u' a restrição de u ao conjunto de arcos de $D - vw$. (De acordo com nossas definições, o caminho pode ter arcos inversos infinitos.)

Proposição 9.1 *Contraexemplos minimais não têm arcos transitivos nulos.*

PROVA: Mostraremos que a remoção de arcos transitivos nulos não cria novos cortes e não altera o valor dos parâmetros ν e τ .

Seja (D, u) um digrafo capacitado e b um arco transitivo nulo. Seja D' o digrafo $D - b$ e u' a restrição de u ao conjunto de arcos de $D - b$. Seja v a ponta positiva e w a ponta negativa de b . Seja B o conjunto de arcos de um caminho dirigido de v a w em (D', u') .

Observe que um corte de D intersecta B se e somente se contém b . Além disso, todo corte de D contém no máximo um arco de B . Segue daí que D e D' têm a mesmo conjunto de fontes e portanto também (D, u) e (D', u') têm a mesmo conjunto de fontes. Ademais, para cada fonte F , temos $u'(C') = u(C)$, sendo C' e C os cortes associados a F em D' e D respectivamente. Portanto,

$$\tau(D', u') = \tau(D, u). \quad (6)$$

Seja \mathcal{E} um empacotamento de junções de (D, u) e \mathcal{E}' um empacotamento de junções de (D', u') . Como (D, u) e (D', u') têm a mesmo conjunto de fontes, toda junção de (D', u') é também uma junção de (D, u) . Logo, \mathcal{E}' é um empacotamento em (D, u) . Por outro lado, toda junção de (D, u) que não contém b é uma junção de (D', u') . Como $u_b = 0$, nenhuma das junções em \mathcal{E} contém b , e portanto \mathcal{E} é um empacotamento em (D', u') . Segue daí que

$$\nu(D', u') = \nu(D, u). \quad (7)$$

Em virtude de (6) e (7), se (D, u) é um contraexemplo então (D', u') também é um contraexemplo. Como $V(D') = V(D)$ e $A(D') \subset A(D)$, o contraexemplo (D, u) não é minimal. ■

O contraexemplo (D'_1, u'_1) da figura 12 tem vários arcos transitivos nulos e portanto não é minimal.

9.2 O vetor de capacidades é crítico

Um arco é **ativo** em um grafo capacitado (D, u) se não for nulo nem infinito. O vetor de capacidades u é **crítico** se todo arco ativo pertence a um corte mínimo.

Proposição 9.2 *Em todo contraexemplo minimal, o vetor de capacidades é crítico.*

PROVA: Seja (D, u) um contraexemplo e suponha que u não é crítico. Então algum arco ativo a não pertence a um corte mínimo. Seja u' o vetor de capacidades definido por

$$u'_a := u_a - 1 \quad \text{e} \quad u'_e := u_e \quad \text{para cada } e \neq a.$$

É claro que $I(D, u') = I(D, u)$ e portanto (D, u') e (D, u) têm a mesmo conjunto de cortes. É claro também que $u'(C) = u(C) - 1$ para todo corte C que contém a e $u'(C) = u(C)$ para todos os demais cortes. Como cortes mínimos de (D, u) não contém a , temos

$$\tau(D, u') = \tau(D, u).$$

Agora considere as junções. Seja \mathcal{E}' um empacotamento máximo de junções de (D, u') . Como \mathcal{E}' também é um empacotamento em (D, u) , temos

$$\nu(D, u') = |\mathcal{E}'| \leq \nu(D, u).$$

Mas $\nu(D, u) < \tau(D, u)$, donde $\nu(D, u') < \tau(D, u')$, e portanto (D, u') é um contraexemplo. Como $N(D', u') \supseteq N(D, u)$ e $u' < u$, o contraexemplo (D, u) não é minimal. ■

9.3 Todos os circuitos dirigidos são infinitos

A contração dos arcos de circuitos dirigidos não altera o conjunto de cortes. Assim, podemos atribuir ∞ às capacidades desses arcos:

Proposição 9.3 *Num contraexemplo minimal, os arcos de todo circuito dirigido são infinitos.*

PROVA: Seja (D, u) um digrafo capacitado e O um circuito dirigido em (D, u) . (Por definição, O pode ter arcos inversos infinitos.) Suponha que $u_a < \infty$ para algum arco direto a de O . Defina um novo vetor de capacidades u' da seguinte maneira:

$$u'_a := \infty \quad \text{e} \quad u'_e := u_e \quad \text{para cada } e \neq a.$$

Como O é dirigido em (D, u) , nenhum corte de (D, u) contém arcos de O . Portanto, o conjunto de cortes de (D, u') é idêntico ao conjunto de cortes de (D, u) . Assim,

$$\tau(D, u') = \tau(D, u).$$

Nenhuma junção minimal de (D, u) contém a pois nenhum corte de (D, u) contém a . Assim, (D, u') e (D, u) têm as mesmas junções minimais. Portanto, todo empacotamento de junções minimais em (D, u) é também um empacotamento em (D, u') , e vice-versa. Segue daí que

$$\nu(D, u') = \nu(D, u).$$

Suponha agora que (D, u) é um contraexemplo. Então $\nu(D, u) < \tau(D, u)$ e portanto $\nu(D, u') < \tau(D, u')$, ou seja, (D, u') é um contraexemplo. Como $I(D, u') \supset I(D, u)$, e portanto o contraexemplo (D, u) não é minimal. ■

Segue dessa proposição que todo contraexemplo minimal é essencialmente um dag.

9.4 Todos os cortes mínimos são periféricos

Um corte C é *periférico* em (D, u) se, para alguma das duas margens de C , todo arco que tem ambas as pontas nessa margem é infinito. Por exemplo, C é periférico se a margem positiva ou a margem negativa de C tem um único vértice.

Proposição 9.4 *Num contraexemplo minimal, todo corte mínimo é periférico.*

PROVA: Mostraremos que todo digrafo capacitado pode ser dividido, ao longo de um corte mínimo não periférico, em dois digrafos capacitados “independentes”.

Seja C um corte mínimo de um digrafo capacitado (D, u) . Seja u' o vetor de capacidades definido assim:

$$u'_a := \begin{cases} \infty & \text{se } a \text{ tem ambas as pontas na margem negativa de } C, \\ u_a & \text{em caso contrário.} \end{cases}$$

(Informalmente, u' descreve a contração da margem negativa de C a um vértice.) Seja u'' o vetor de capacidades definido assim:

$$u''_a := \begin{cases} \infty & \text{se } a \text{ tem ambas as pontas na margem positiva de } C, \\ u_a & \text{em caso contrário.} \end{cases}$$

De acordo com o lema 9.1 abaixo, se (D, u) é um contraexemplo então (D, u') ou (D, u'') é um contraexemplo. Por outro lado, se C não é periférico então $I(D, u') \supset I(D, u)$ (pois algum arco não infinito tem ambas as pontas na margem negativa de C) e, analogamente, $I(D, u'') \supset I(D, u)$. Portanto, se o contraexemplo (D, u) é minimal, o corte C deve ser periférico. ■

Para concluir a prova da proposição é preciso estabelecer o seguinte lema:

Lema 9.1 *Seja C um corte mínimo de um digrafo capacitado (D, u) e sejam u' e u'' os vetores de capacidades definidos no início da prova da proposição 9.4. Se (D, u') e (D, u'') não são contraexemplos então (D, u) também não é um contraexemplo.*

PROVA: Por um lado, C é um corte de (D, u') (pois C não contém arcos infinitos) e $u'(C) = u(C)$, donde $\tau(D, u') \leq u'(C) = u(C) = \tau(D, u)$. Por outro lado, $\tau(D, u') \geq \tau(D, u)$ pois o conjunto de cortes de (D, u') é parte do conjunto de cortes de (D, u) e a capacidade de um corte de (D, u') é igual à capacidade desse corte em (D, u) . Logo, $\tau(D, u') = \tau(D, u)$ e portanto C é um corte mínimo de (D, u') . Um raciocínio análogo mostra que $\tau(D, u'') = \tau(D, u)$ e C é um corte mínimo de (D, u'') .

1. Suponha que (D, u') não é um contraexemplo, isto é, que $\nu(D, u') = \tau(D, u')$. Seja \mathcal{E}' um empacotamento máximo de junções de (D, u') . É claro que $|\mathcal{E}'| = \nu(D, u') = \tau(D, u')$. Como $\tau(D, u') = u'(C)$, temos $|\mathcal{E}'| = u'(C)$. O lema 5.1 (veja a seção 5) garante então que

$$|\mathcal{E}'(a)| = u_a \quad \text{para cada } a \text{ em } C \text{ e} \quad (8)$$

$$|J' \cap C| = 1 \quad \text{para cada } J' \text{ em } \mathcal{E}'. \quad (9)$$

Suponha agora que (D, u'') não é um contraexemplo e seja \mathcal{E}'' um empacotamento máximo de junções de (D, u'') . Um raciocínio análogo ao do parágrafo anterior mostra que

$$|\mathcal{E}''(a)| = u_a \quad \text{para cada } a \text{ em } C \text{ e} \quad (10)$$

$$|J'' \cap C| = 1 \quad \text{para cada } J'' \text{ em } \mathcal{E}''. \quad (11)$$

2. Em virtude de (8) e (9), para cada arco não nulo a de C , existem elementos $J'_{a,1}, \dots, J'_{a,u_a}$ de \mathcal{E}' tais que

$$J'_{a,i} \cap C = \{a\} \quad (12)$$

para $i = 1, \dots, u_a$. Em virtude de (10) e (11), existem elementos $J''_{a,1}, \dots, J''_{a,u_a}$ de \mathcal{E}'' tais que $J''_{a,i} \cap C = \{a\}$ para $i = 1, \dots, u_a$. Seja

$$J_{a,i} := J'_{a,i} \cup J''_{a,i} \quad (13)$$

para cada a em C e cada i em $\{1, \dots, u_a\}$. Dado qualquer par (a, i) , sejam J' , J'' e J abreviaturas de $J'_{a,i}$, $J''_{a,i}$ e $J_{a,i}$ respectivamente. Nossa próxima tarefa é mostrar que J é uma junção de (D, u) . Como J' , J'' e J não têm arcos infinitos, resta apenas mostrar que $J \cap B \neq \emptyset$ para todo corte B de (D, u) .

3. Seja B um corte de (D, u) e X a margem positiva de B . Seja Y a margem positiva de C . Se $X \cap Y = \emptyset$ ou $X \supseteq Y$ então B é um corte de (D, u'') , donde $J'' \cap B \neq \emptyset$. Se $X \cup Y = V$ ou $X \subseteq Y$ então B é um corte de (D, u') , donde $J' \cap B \neq \emptyset$. Em ambos os casos temos $J \cap B \neq \emptyset$. Nos demais casos, graças a (9), (11), (12) e (13), o lema 9.2 abaixo garante que $J \cap B \neq \emptyset$. Concluimos assim que J é uma junção de (D, u) .

4. Seja \mathcal{E} a coleção de todas as junções $J_{a,i}$ tais que a é um arco não nulo de C e i pertence a $\{1, \dots, u_a\}$. Para todo arco e de D , se e tem ponta positiva na margem positiva de C então

$$|\mathcal{E}(e)| \leq u_e$$

pois \mathcal{E}' é um empacotamento em (D, u') e $u'_e = u_e$. Analogamente, se e tem ponta negativa na margem negativa de C então $|\mathcal{E}(e)| \leq u_e$. Portanto, \mathcal{E} é um empacotamento em (D, u) .

5. Segue do parágrafo anterior que $\nu(D, u) \geq |\mathcal{E}|$. Mas $|\mathcal{E}| = |\mathcal{E}'| = |\mathcal{E}''| = \tau(D, u)$, e portanto $\nu(D, u) \geq \tau(D, u)$. Logo, (D, u) não é um contraexemplo. ■

Para concluir a prova do lema, resta apenas estabelecer a seguinte consequência da submodularidade de ∂ :

Lema 9.2 (submodularidade) *Seja Y uma fonte não trivial de um digrafo D . Seja J um conjunto de arcos que intersecta todos os cortes ∂X de D para os quais X é uma fonte tal que*

$$X \cup Y = V \quad \text{ou} \quad X \cap Y = \emptyset \quad \text{ou} \quad X \supseteq Y \quad \text{ou} \quad X \subseteq Y.$$

Se $|J \cap \partial Y| = 1$ então J é uma junção de D .

PROVA: Seja X uma fonte não trivial de D tal que $X \cup Y \neq V$ e $X \cap Y \neq \emptyset$. Para provar que J é uma junção de D , basta mostrar que $J \cap \partial X \neq \emptyset$.

É claro que $X \cup Y$ e $X \cap Y$ são fontes não triviais de D . Logo, $\partial(X \cup Y)$ e $\partial(X \cap Y)$ são cortes de D . Observe agora que a união de $\partial(X \cup Y)$ com $\partial(X \cap Y)$ é igual à união de ∂X com ∂Y e que a interseção de $\partial(X \cup Y)$ com $\partial(X \cap Y)$ é igual à interseção de ∂X com ∂Y . Logo, a soma $|\partial(X \cup Y)| + |\partial(X \cap Y)|$ é igual à soma $|\partial X| + |\partial Y|$. Analogamente,

$$|J \cap \partial(X \cup Y)| + |J \cap \partial(X \cap Y)| = |J \cap \partial X| + |J \cap \partial Y|. \quad (14)$$

Como $X \cup Y \supseteq Y$ e $X \cap Y \subseteq Y$, as hipóteses do lema garantem que cada termo do lado esquerdo de (14) vale pelo menos 1. Como o segundo termo do lado direito de (14) vale exatamente 1, o primeiro termo do lado direito deve valer pelo menos 1. Logo, $J \cap \partial X \neq \emptyset$, como queríamos provar. ■

9.5 Ausência de circuitos ativos

Um arco é *ativo* em (D, u) se não for nulo nem infinito. Williams [Wil04] mostrou que num contraexemplo minimal o subdigrafo induzido pelo conjunto de arcos ativos é uma floresta:

Proposição 9.5 *Nenhum contraexemplo minimal tem um circuito de arcos ativos.*

PROVA: Seja (D, u) um contraexemplo e O um circuito de D cujos arcos são ativos. Mostraremos a seguir que o contraexemplo não é minimal.

Seja e um arco de capacidade mínima em O e $k := u_e$. Ajuste a notação de modo que e seja direto em O . Seja u' o seguinte vetor de capacidades:

$$u'_a := \begin{cases} u_a - k & \text{se } a \text{ é arco direto de } O, \\ u_a + k & \text{se } a \text{ é arco inverso de } O, \\ u_a & \text{em caso contrário.} \end{cases}$$

É claro que $u'_e = 0$ e portanto $N(D, u') \supset N(D, u)$. Assim, se (D, u') é um contraexemplo então o contraexemplo (D, u) não é minimal, como prometemos mostrar. Passamos a tratar agora do caso em que (D, u') não é um contraexemplo.

O conjunto de cortes de (D, u') é idêntico ao conjunto de cortes de (D, u) . Segue daí que os conjuntos de junções de (D, u') e (D, u) são idênticos. Assim, podemos dizer “corte” e “junção” sem acrescentar “de (D, u) ” ou “de (D, u') ”. Observe que todo corte contém o mesmo número de arcos inversos e arcos diretos de O . Portanto,

$$u'(C) = u(C) \quad (15)$$

para todo corte C . Assim,

$$\tau(D, u') = \tau(D, u). \quad (16)$$

Seja \mathcal{E}' um empacotamento máximo de junções de (D, u') . Como (D, u') não é contraexemplo, temos $|\mathcal{E}'| = \tau(D, u')$. Seja J_0 um elemento de \mathcal{E}' . O lema 9.3 abaixo mostra que $u'(C) - |J_0 \cap C| \geq |\mathcal{E}'| - 1$ para todo corte C . Logo,

$$u'(C) - |J_0 \cap C| \geq \tau(D, u') - 1$$

para todo corte C . Em virtude de (15) e (16), tudo vale com u no lugar de u' , ou seja,

$$u(C) - |J_0 \cap C| \geq \tau(D, u) - 1 \quad (17)$$

para todo corte C . É claro que J_0 não tem arcos nulos de (D, u') e portanto também não tem arcos nulos de (D, u) .

Agora que temos uma junção J_0 que satisfaz (17), podemos descartar u' e \mathcal{E}' . Seja u'' o vetor definido como segue: para cada arco a ,

$$u''_a := \begin{cases} u_a - 1 & \text{se } a \in J_0 \text{ e} \\ u_a & \text{em caso contrário.} \end{cases} \quad (18)$$

Como J_0 não tem arcos nulos, u'' é um vetor de capacidades. Os conjuntos de cortes de (D, u'') e de (D, u) são idênticos e portanto os conjuntos de junções de (D, u'') e (D, u) também são idênticos. Assim, podemos dizer “corte” e “junção” sem acrescentar “de (D, u) ” ou “de (D, u'') ”. Para todo corte C , temos $u''(C) = u(C) - |J_0 \cap C|$, donde $u''(C) \geq \tau(D, u) - 1$ em virtude de (17). Portanto,

$$\tau(D, u'') \geq \tau(D, u) - 1.$$

Seja \mathcal{E}'' um empacotamento máximo de junções de (D, u'') . Suponha por um momento que (D, u'') não é contraexemplo. Então $|\mathcal{E}''| = \nu(D, u'') = \tau(D, u'')$. Considere agora a coleção $\mathcal{E} := \mathcal{E}'' \cup \{J_0\}$ e observe que

$$|\mathcal{E}| = |\mathcal{E}''| + 1 = \tau(D, u'') + 1 \geq \tau(D, u) - 1 + 1 = \tau(D, u).$$

Observe também que \mathcal{E} é um empacotamento em (D, u) , pois $|\mathcal{E}(a)| = |\mathcal{E}''(a)| + 1 \leq u_a'' + 1 = u_a$ para cada a em J_0 e $|\mathcal{E}(a)| = |\mathcal{E}''(a)| \leq u_a'' = u_a$ para cada a fora de J_0 . Logo, $\nu(D, u) \geq |\mathcal{E}| \geq \tau(D, u)$ e portanto (D, u) não é contraexemplo. Isso contradiz a maneira como (D, u) foi escolhido no início da prova. Portanto, ao contrário do que havíamos suposto por um momento, (D, u'') é um contraexemplo. Como $I(D'', u'') = I(D, u)$ e $N(D'', u'') \supseteq N(D, u)$ e $u'' < u$, o contraexemplo (D, u) não é minimal. ■

Para concluir a prova da proposição, falta apenas estabelecer o seguinte lema:

Lema 9.3 *Para qualquer empacotamento \mathcal{E} de junções de (D, u) , qualquer elemento J_0 de \mathcal{E} , e qualquer corte C , vale a desigualdade $u(C) - |J_0 \cap C| \geq |\mathcal{E}| - 1$.*

PROVA: Seja \mathcal{E} um empacotamento de junções de (D, u) . Então $|\{J \in \mathcal{E} : J \ni a\}| \leq u_a$ para cada a em C e portanto

$$\begin{aligned} u(C) &= \sum_{a \in C} u_a \\ &\geq \sum_{a \in C} |\{J \in \mathcal{E} : J \ni a\}| \\ &= \sum_{J \in \mathcal{E}} |\{a \in C : a \in J\}| \\ &= \sum_{J \in \mathcal{E}} |J \cap C| \\ &= |J_0 \cap C| + \sum_{J \in \mathcal{E} \setminus \{J_0\}} |J \cap C|. \end{aligned}$$

Como $|J \cap C| \geq 1$ para cada J , temos $u(C) \geq |J_0 \cap C| + |\mathcal{E} \setminus \{J_0\}|$. Segue daí que $u(C) - |J_0 \cap C| \geq |\mathcal{E}| - 1$. ■

Referências

- [CG02] G. Cornuéjols and B. Guenin. Note on dijoins. *Discrete Mathematics*, 243:213–216, 2002. [10](#)
- [CGM00] G. Cornuéjols, B. Guenin, and F. Margot. The packing property. *Mathematical Programming (Ser. A)*, 89:113–126, 2000. [1](#)
- [EG77] J. Edmonds and R. Giles. A min-max relation for submodular functions on graphs. In P. L. Hammer et al., editors, *Studies in Integer Programming*, volume 1 of *Annals of Discrete Mathematics*, pages 185–204. North-Holland, 1977. [7](#)
- [FY87] P. Feofiloff and D. H. Younger. Directed cut transversal packing for source-sink connected graphs. *Combinatorica*, 7(3):255–263, 1987. [4](#), [8](#)
- [LY78] C. L. Lucchesi and D. H. Younger. A minimax theorem for directed graphs. *J. of the London Math. Soc. (2)*, 17:369–374, 1978. [3](#), [5](#)
- [Sch80] A. Schrijver. A counterexample to a conjecture of Edmonds and Giles. *Discrete Math.*, 32:213–214, 1980. [8](#)
- [Sch82] A. Schrijver. Min-max relations for directed graphs. *Annals of Discrete Math.*, 16:261–280, 1982. [4](#), [8](#)
- [Sch03] A. Schrijver. *Combinatorial Optimization: Polyhedra and Efficiency*. Springer, 2003. [1](#), [2](#), [4](#), [5](#)

- [Wil04] A. M. Williams. Packing directed joins. Masters Thesis, University of Waterloo, 2004. [1](#), [12](#), [16](#)
- [Woo78a] D. R. Woodall. Menger and König systems. In Y. Alavi and D. R. Lick, editors, *Theory and Applications of Graphs*, volume 642 of *Lecture Notes in Mathematics*, pages 620–635. Springer, 1978. [2](#)
- [Woo78b] D. R. Woodall. Minimax theorems in graph theory. In L. W. Beineke and R. J. Wilson, editors, *Selected Topics in Graph Theory*, pages 237–269. Academic Press, 1978. [2](#)

Índice Remissivo

- ν , 3, 7
- τ , 3, 7
- arco, 1
 - ativo, 8, 13, 16
 - direto, 2
 - infinito, 6
 - inverso, 2
 - nulo, 6
 - transitivo, 13
- caminho dirigido, 5
- capacidade
 - crítica, 13
 - de arco, 6
 - de corte, 6
- circuito dirigido, 3
 - em digrafo capacitado, 6
- coleção
 - disjunta
 - em digrafo capacitado, 6
- conexão fonte-sorvedouro, 8
- conexo, 2
- contraexemplo, 7
- corte, 1
 - associado a fonte, 2
 - crítico, 8
 - de digrafo capacitado, 6
 - dirigido, 1
 - minimal, 2
 - mínimo, 3, 6
 - periférico, 14
- dag, 3
- digrafo, 1
 - capacitado, 6
- dijunção, 2
- disjunto, 2
- dual direcional, 1
- empacotamento, 2
 - em digrafo capacitado, 6
 - máximo, 3
- fluxo, 5
- fonte, 1
 - de digrafo capacitado, 6
 - trivial, 1
- fortemente conexo, 2
- junção, 2
 - de digrafo capacitado, 6
 - minimal, 2
- margem
 - negativa, 2
 - positiva, 1
- máximo
 - empacotamento, 3
- minimal
 - corte, 2
 - junção, 2
- mínimo
 - corte, 3, 6
- ponta
 - negativa, 1
 - positiva, 1
- satisfaz a conjectura, 4
- semicorte, 5
- sorvedouro, 1
- submodularidade, 16
- transposto, 1
- vértice, 1
 - fonte, 1
 - sorvedouro, 1