

A conjectura de Woodall sobre empacotamento de dijunções*

Paulo Feofiloff

<https://www.ime.usp.br/~pf/dijoins/>

21/10/2005, reescrito em 2/2/2016

Resumo

Em todo digrafo, o tamanho de um corte dirigido mínimo é igual ao número máximo de dijunções duas a duas disjuntas. Esta é a conjectura de Woodall [Sch03]. A discussão da conjectura ficou parada por duas décadas até que Cornuéjols e Guenin [CGM00] retomaram o assunto para estudar uma generalização abstrata da conjectura.

Esta palestra apresenta a conjectura de Woodall, sua versão capacitada, o contra-exemplo de Schrijver, os contraexemplos de Cornuéjols e Guenin, e alguns resultados de Williams [Wil04].

1 Introdução

Um *digrafo* (= *digraph*) é um par (V, A) em que V é um conjunto finito e A é um conjunto de pares ordenados de elementos de V . Os elementos de V são chamados *vértices* e os de A são chamados *arcos*. Para cada arco vw , o vértice v é a *ponta positiva* e w é a *ponta negativa* do arco. Os conjuntos de vértices e arcos de um digrafo D são denotados por $V(D)$ e $A(D)$ respectivamente. O *transposto*, ou *dual direcional*, de um digrafo D é o digrafo que se obtém pela substituição de cada arco vw pelo par wv .

Cortes. Dizemos que um arco vw *sai* de um subconjunto X de $V(D)$ se $v \in X$ e $w \notin X$. Dizemos que vw *entra* em X se $v \notin X$ e $w \in X$. Uma *fonte* (= *source*) é qualquer subconjunto X de $V(D)$ tal que nenhum arco entra em X . As fontes \emptyset e $V(D)$ são *triviais*. Um *sorvedouro* (= *sink*) é uma fonte no transposto de D . Um *vértice-fonte* é qualquer vértice s tal que $\{s\}$ é uma fonte e um *vértice-sorvedouro* é um vértice-fonte no transposto de D .

Para qualquer conjunto X de vértices, denotamos por $\partial(X)$ o conjunto dos arcos que têm uma ponta em X e outra fora de X . Um *corte dirigido* (= *directed cut*), ou simplesmente *corte*, é qualquer conjunto da forma $\partial(X)$ onde X é uma fonte não trivial ou um sorvedouro não trivial. Dizemos que X é uma *margem positiva* do corte e $V(D) \setminus X$ é uma *margem negativa*. Dizemos também que $\partial(X)$ é o corte *associado* a X . Um digrafo é *conexo* se \emptyset não é um corte. Num digrafo conexo, todo corte tem uma única margem positiva e uma única margem negativa.

* Versão revisada de palestra no IME-USP em 2005.

Junções. Uma *dijunção* (= *dijoin*), ou simplesmente *junção*, é qualquer conjunto de arcos que intersecta todos os cortes, ou seja, qualquer subconjunto J de $A(D)$ tal que $J \cap C \neq \emptyset$ para todo corte C . Um digrafo tem uma junção se e somente se \emptyset não é um corte. Por outro lado, \emptyset é uma junção se e somente se o digrafo não tem corte algum.

A seguinte caracterização é útil: um conjunto J de arcos é uma junção se e somente se para todo par (s, t) de vértices existe um caminho de s a t cujos arcos diretos¹ pertencem a J . Esta caracterização também pode ser formulada assim: um conjunto J de arcos é uma junção se e somente se a contração de todos os arcos de J torna o digrafo fortemente conexo.²

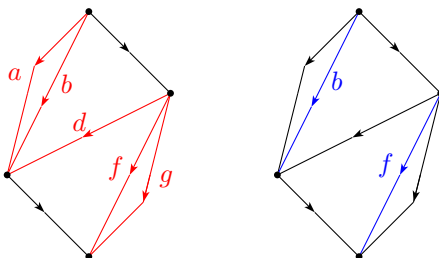


Figura 1: No digrafo à esquerda, o conjunto de arcos $\{a, b, d, f, g\}$ é um corte. No digrafo à direita, o conjunto de arcos $\{b, f\}$ é uma junção. (Este exemplo tem arcos paralelos, como a e b , em desacordo com a definição de digrafo. Poderíamos “subdividir” os arcos paralelos, mas isso tornaria o exemplo mais pesado.)

Cortes versus empacotamentos de junções. Um conjunto \mathcal{E} de junções é *disjunto* se os elementos de \mathcal{E} são disjuntos dois a dois. Em outras palavras, \mathcal{E} é disjunto se cada arco do digrafo pertence a no máximo um elemento de \mathcal{E} .

Um *empacotamento* (= *packing*) é o mesmo que um conjunto disjunto. Assim, um empacotamento de junções é um conjunto disjunto de junções. Não há mal em supor que as junções que compõem um empacotamento são minimais.³

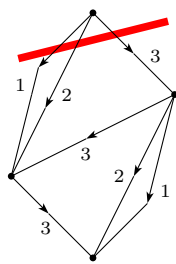


Figura 2: A linha colorida indica um corte de tamanho 3. Os rótulos 1, 2 e 3 indicam um empacotamento de três junções.

Há uma relação óbvia entre o tamanho de um corte e o tamanho de um empacotamento de junções:

¹ Um arco vw de um caminho é *direto* se o caminho percorre o arco de v para w e *inverso* se o caminho percorre o arco de w para v .

² Um digrafo é *fortemente conexo* se para cada par ordenado (s, t) de seus vértices existe um caminho s a t sem arcos inversos.

³ Uma junção é *minimal* se nenhum dos seus subconjuntos próprios é uma junção.

Lema 1: Para qualquer empacotamento \mathcal{E} de junções e qualquer corte C vale a desigualdade $|\mathcal{E}| \leq |C|$. ■

A seguinte conjectura de Woodall [Woo78a, Woo78b, Sch03] continua em aberto:

Conjectura 1 (Woodall): Todo digrafo tem um empacotamento \mathcal{E} de junções e um corte C tais que $|\mathcal{E}| = |C|$.

Essa conjectura é dual do teorema de Lucchesi–Younger [LY78], segundo o qual todo digrafo conexo tem um empacotamento \mathcal{C} de cortes e uma junção J tais que $|\mathcal{C}| = |J|$.

Dags. Todo arco de um digrafo pertence a um corte ou a um circuito dirigido,⁴ mas não a ambos. Em particular, $C \cap A(Z) = \emptyset$ para todo corte C e todo circuito dirigido Z , sendo $A(Z)$ o conjunto de arcos de Z . Como consequência, podemos restringir a atenção às junções que não contêm arcos de circuitos dirigidos. Segue dessa observação que podemos restringir o estudo da conjectura 1 aos digrafos que não têm circuitos dirigidos, ou seja, aos *dags* (= *directed acyclic graphs*).

2 Corte mínimo e empacotamento máximo de junções

Um corte C é *mínimo* se não existe corte C' tal que $|C'| < |C|$. Um empacotamento \mathcal{E} de junções é *máximo* se não existe empacotamento \mathcal{E}' de junções tal que $|\mathcal{E}'| > |\mathcal{E}|$. A conjectura de Woodall nos leva a considerar o seguinte par de problemas de otimização:

Problema 1: Encontrar um corte mínimo num digrafo.

Problema 2: Encontrar um empacotamento máximo de junções num digrafo.

Existe um algoritmo polinomial para o problema 1 (trata-se de uma variante do algoritmo *Max-flow Min-cut*). Não se conhece algoritmo polinomial para problema 2, mas não há evidências de que o problema seja NP-difícil.

Convém adotar uma notação para o tamanho dos objetos de que tratam os dois problemas. Dado um digrafo D , denotamos por

$$\nu(D)$$

o tamanho de um empacotamento máximo de junções de D e denotamos por

$$\tau(D)$$

o tamanho de um corte mínimo de D . Se D é desconexo então $\tau(D) = 0$ (pois \emptyset é um corte) e $\nu(D) = 0$ (pois não há junções). Se D tem algum corte então $\tau(D)$ e $\nu(D)$ são finitos. Se D não tem corte algum então $\tau(D) = \infty$ e $\nu(D) = \infty$ (uma vez que um número arbitrário de cópias de \emptyset é um empacotamento de junções).

Segue imediatamente do lema 1 que $\nu(D) \leq \tau(D)$ para todo digrafo D . A conjectura 1 pode então ser formulada assim:

Conjectura 2 (Woodall): Todo digrafo D satisfaz a igualdade $\nu(D) = \tau(D)$.

⁴ Um circuito é *dirigido* se não tem arcos inversos.

Dizemos que um digrafo D *satisfaz a conjectura de Woodall* se $\nu(D) = \tau(D)$. É óbvio que todo digrafo D com $\tau(D) \leq 1$ satisfaz a conjectura de Woodall. É menos óbvio que todo digrafo D com $\tau(D) = 2$ satisfaz a conjectura [Sch03, p.968]. Sabe-se também [FY87, Sch82] que todo dag com um único vértice-fonte (ou um único vértice-sorvedouro) satisfaz a conjectura.

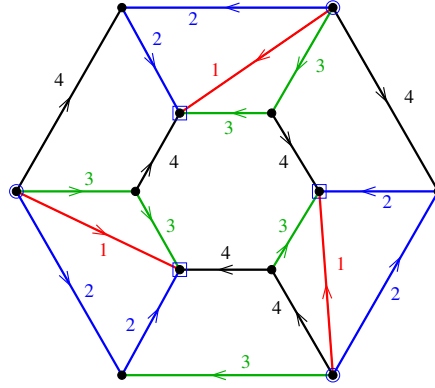


Figura 3: Nesse digrafo, $\nu = 4$ e $\tau = 4$. Portanto, o digrafo satisfaz a conjectura de Woodall. As cores (e os rótulos numéricos) indicam um empacotamento de 4 junções. O digrafo é um dag. Os vértices-fonte estão assinalados por círculos e os vértices-sorvedouro por quadrados.

3 Programas lineares

Seja \mathcal{J} o conjunto de todas as junções minimais de um digrafo $D = (V, A)$ e M a matriz indexada por $\mathcal{J} \times A$ cujas linhas são os vetores característicos dos elementos de \mathcal{J} . Considere o seguinte par dual de programas lineares:

$$\text{maximizar } y1 \quad \text{sob as restrições } y \in \mathbb{R}_+^{\mathcal{J}} \text{ e } yM \leq 1, \quad (1)$$

$$\text{minimizar } 1x \quad \text{sob as restrições } x \in \mathbb{R}_+^A \text{ e } Mx \geq 1. \quad (2)$$

(O “1” representa um vetor cujos elementos são todos iguais a 1. O vetor é indexado por \mathcal{J} ou por A , conforme o contexto.)

Se trocarmos “ $y \in \mathbb{R}_+^{\mathcal{J}}$ ” por “ $y \in \{0, 1\}^{\mathcal{J}}$ ” no programa linear (1) teremos um programa inteiro que representa o problema 2. Todo vetor y nesse programa representa um empacotamento de junções e $y1$ é o tamanho do empacotamento. O valor ótimo do programa inteiro é $\nu(D)$.

Se trocarmos “ $x \in \mathbb{R}_+^A$ ” por “ $x \in \{0, 1\}^A$ ” no programa linear (2) teremos um programa inteiro que representa o problema 1. Todo x nesse programa é o vetor característico de um corte — pois um corte é o mesmo que um conjunto de arcos que intersecta todas as junções — e $1x$ é o tamanho do corte. O valor ótimo do programa inteiro é $\tau(D)$.

Como já observamos, a conjectura de Woodall é dual do teorema de Lucchesi–Younger [LY78]. Segue daquele teorema (embora isso não seja óbvio) que todos os vértices do poliedro $\{x : x \in \mathbb{R}_+^A \text{ e } Mx \geq 1\}$ são inteiros e portanto toda solução do programa linear (2) pertence a $\{0, 1\}^A$. Decorre daí que $\tau(D) = \nu^*(D)$, sendo $\nu^*(D)$ o valor ótimo do programa linear (1).

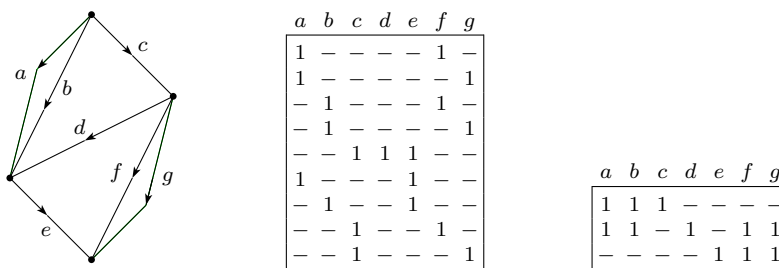


Figura 4: As linhas da primeira matriz são os vetores característicos das junções minimais do digrafo. O digrafo é um dag e tem apenas uma fonte e apenas um sorvedouro. As linhas da segunda matriz são os vetores característicos dos cortes minimais.

4 Analogia com fluxo máximo

A conjectura de Woodall é semelhante, até certo ponto, ao teorema *Max-flow Min-cut* [Sch03, cap.10]. Esse teorema se aplica a qualquer digrafo e qualquer par (s, t) de seus vértices e garante que o tamanho de um fluxo máximo de s a t é igual ao tamanho que um semicorte mínimo dentre os que separam s de t . Aqui, um **fluxo** é um conjunto de caminhos dirigidos⁵ de s a t sem arcos em comum; e um **semicorte** é qualquer conjunto da forma $\partial(X)$ tal que $s \in X \subseteq V(D) \setminus \{t\}$ (o conjunto X não é necessariamente uma fonte).

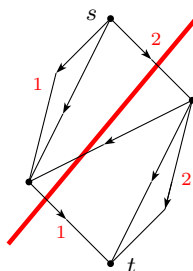


Figura 5: Um fluxo máximo (rótulos 1 e 2) e um semicorte mínimo (linha colorida).

A semelhança entre a conjectura de Woodall e o teorema *Max-flow Min-cut* é apenas parcial. No teorema, há dois vértices fixos e os caminhos são dirigidos. Na conjectura, não há vértices fixos, os caminhos (que representam junções) não são necessariamente dirigidos, e apenas os arcos diretos dos caminhos são levadas em conta.

O teorema *Max-flow Min-cut* admite uma generalização em que cada arco a tem uma capacidade c_a no conjunto $\mathbb{N} := \{0, 1, 2, 3, \dots\}$ dos números naturais. Um arco a não pode ser usada mais que c_a vezes pelo fluxo e contribui c_a para o tamanho de cada semicorte que o contém. É difícil imaginar como o teorema *Max-flow Min-cut* poderia valer sem que valesse também sua generalização capacitada.

A semelhança entre o teorema *Max-flow Min-cut* e a conjectura de Woodall sugere estudar a generalização capacitada da conjectura.

⁵ Um caminho é *dirigido* se não tem arcos inversos.

5 Generalização capacitada da conjectura de Woodall

Um *digrafo capacitado* é um par (D, c) em que D é um digrafo e c é um vetor indexado por $A(D)$ com valores em $\mathbb{N} \cup \{\infty\}$. Esse vetor atribui uma *capacidade* c_a a cada arco a de D . O arco a é *nulo* se $c_a = 0$ e *infinito* se $c_a = \infty$. Atribuir capacidade ∞ a um arco tem o mesmo efeito que contrair o arco e é uma maneira conveniente de evitar a contração propriamente dita.

A *capacidade* de um corte C num digrafo capacitado (D, c) é o número $c(C) := \sum_{a \in C} c_a$. Um corte C é *mínimo* se não existe corte C' tal que $c(C') < c(C)$.

A presença de arcos infinitos pede uma redefinição dos termos “fonte” e “corte”. Assim, uma *fonte de* (D, c) é uma fonte X de D tal que $\partial(X)$ não contém arcos infinitos e um *corte de* (D, c) é um corte de D sem arcos infinitos. Em outras palavras, um corte de (D, c) é um conjunto $\partial(X)$ tal que X é uma fonte não trivial de (D, c) .

A presença de arcos nulos e infinitos também pede uma redefinição do termo “junção”. Uma *junção de* (D, c) é um conjunto de arcos não infinitos e não nulos que intersecta todos os cortes de (D, c) . Se (D, c) tem um corte de capacidade nula então (D, c) não tem junção alguma. É claro que toda junção de D que não tem arcos nulos nem infinitos é uma junção de (D, c) .

Os conceitos de caminho dirigido e circuito dirigido precisam também ser redefinidos. Diremos que um caminho e um circuito são *dirigidos em* (D, c) se todos os seus arcos inversos são infinitos. (Assim, os arcos infinitos podem ser percorridas em qualquer das duas direções.)

No contexto de digrafos capacitados, é natural trocar os conjuntos de junções da seção 1 por *coleções* de junções. Uma coleção é um “conjunto” que pode ter várias cópias de um mesmo elemento, cada cópia contribuindo 1 para o tamanho da coleção. Uma coleção \mathcal{E} de junções de (D, c) é *disjunta em* (D, c) se

$$|\mathcal{E}(a)| \leq c_a$$

para cada arco a , sendo $\mathcal{E}(a) := \{J \in \mathcal{E} : J \ni a\}$ o “feixe” das junções que contêm a . Em outras palavras, \mathcal{E} é disjunta se cada arco a pertence a no máximo c_a elementos de \mathcal{E} . Se a é nulo então nenhum elemento de \mathcal{E} contém a .

Um *empacotamento* de junções em (D, c) é uma coleção disjunta de junções de (D, c) . A seguinte relação entre empacotamentos e cortes generaliza o lema 1:

Lema 2: *Em qualquer digrafo capacitado (D, c) , para qualquer empacotamento \mathcal{E} de junções e qualquer corte C ,*

$$|\mathcal{E}| \leq c(C).$$

Ademais, se $|\mathcal{E}| = c(C)$ então $|J \cap C| = 1$ para cada J em \mathcal{E} e $|\mathcal{E}(a)| = c_a$ para cada a em C .

PROVA: Seja \mathcal{E} um empacotamento de junções e C um corte de (D, c) . Para cada elemento J de \mathcal{E} existe um arco a de C tal que $\mathcal{E}(a) \ni J$. Logo,

$$|\mathcal{E}| \leq \sum_{a \in C} |\mathcal{E}(a)| \leq \sum_{a \in C} c_a = c(C).$$

Suponha agora que $|\mathcal{E}| = c(C)$. Então o primeiro “ \leq ” vale como “ $=$ ” e portanto $|J \cap C| = 1$ para cada J em \mathcal{E} . Também o segundo “ \leq ” vale como “ $=$ ”, donde $|\mathcal{E}(a)| = c_a$ para cada a em C . ■

A definição dos parâmetros τ e ν precisa ser ajustada para levar em conta as capacidades dos arcos. Assim, denotamos por

$$\nu(D, c) \quad \text{e} \quad \tau(D, c)$$

o tamanho de um empacotamento máximo de junções de (D, c) e a capacidade de um corte mínimo de (D, c) respectivamente. O lema 2 tem a seguinte consequência imediata: todo digrafo capacitado (D, c) satisfaz a desigualdade

$$\nu(D, c) \leq \tau(D, c). \quad (3)$$

A correspondente generalização da conjectura de Woodall (conjectura 2) é conhecida como conjectura de Edmonds–Giles [EG77]:

Conjectura 3 (Edmonds–Giles): *Todo digrafo capacitado (D, c) satisfaz a igualdade $\nu(D, c) = \tau(D, c)$.*

Se $\tau(D, c) = 0$ então $\nu(D, c) = 0$ e portanto $\nu(D, c) = \tau(D, c)$. Se $\tau(D, c) = 1$ então $\nu(D, c) = \tau(D, c)$ pois $\{a \in A(D) : 0 < c_a < \infty\}$ é uma junção. Portanto, a conjectura está correta quando restrita a digrafos capacitados em que $\tau(D, c) \leq 1$.

Arcos nulos. A generalização capacitada do teorema *Max-flow Min-cut* (veja a seção 4) pode ser reduzida à versão original, não capacitada. A redução consiste em remover os arcos de capacidade 0 e trocar cada arco de capacidade $k \geq 2$ por k arcos em paralelo. À primeira vista, a mesma construção poderia reduzir a conjectura de Edmonds–Giles à conjectura de Woodall. De fato, um arco a de capacidade $k \geq 2$ pode ser simulado por k cópias de a em paralelo, mas a remoção de um arco de capacidade 0 pode criar novos cortes,⁶ alterando assim instância do problema. Portanto, a conjectura de Edmonds–Giles não é um caso especial da conjectura de Woodall.

6 Contraexemplos

A conjectura de Edmonds–Giles é falsa. As próximas seções exibirão vários contraexemplos. Um *contraexemplo* é qualquer digrafo capacitado (D, c) tal que $\nu(D, c) < \tau(D, c)$. Todos os contraexemplos conhecidos têm arcos nulos e portanto não afetam a conjectura de Woodall (conjectura 2).

Dizemos que um digrafo D é *bom* se não existe c tal que (D, c) é um contraexemplo. A conjectura 3 poderia ser formulada dizendo “todo digrafo é bom”. Sabe-se, por exemplo, que

- todo dag com um único vértice-fonte é bom e
- todo dag dotado de conexão fonte-sorvedouro⁷ é bom.

A prova de 1 é análoga à do teorema *Max-flow Min-cut* mencionado na seção 4. Essa prova contém um algoritmo polinomial que calcula $\tau(D, c)$. A prova de 2 foi obtida por Schrijver [Sch82] e, independentemente, por Feofiloff e Younger [FY87].

⁶ A remoção de um arco cria novos cortes se e somente se o arco não é transitivo. Um arco vw é *transitivo* em (D, c) se existe um caminho dirigido de v a w em $(D - vw, c')$, sendo c' a restrição de c ao conjunto de arcos de $D - vw$.

⁷ Um dag é *dotado de conexão fonte-sorvedouro* (= *is source-sink connected*) se cada vértice-fonte é ligada a cada vértice-sorvedouro por um caminho dirigido.

7 O contraexemplo de Schrijver

Schrijver [Sch80] encontrou o primeiro contraexemplo para a conjectura 3. O contraexemplo está representado na figura 6 e será denotado por (D_1, c_1) .

Fato 1: $\nu(D_1, c_1) = 1$ e $\tau(D_1, c_1) = 2$.

PROVA: O vetor c_1 é binário, ou seja, suas componentes estão em $\{0, 1\}$. É fácil constatar que $\tau(D_1, c_1) = 2$ e que uma das duas margens de cada corte mínimo de (D_1, c_1) tem um só vértice. Seja B_1 o conjunto de arcos *ativos*, isto é, arcos cuja capacidade é 1. O subdigrafo induzido por B_1 consiste em três caminhos, cada um tendo comprimento 3. Dizemos que esses são os *caminhos ativos* do digrafo. Dizemos também que um corte é *crítico* se intersecta cada caminho ativo uma única vez. Como se vê na figura 7, há quatro cortes críticos.

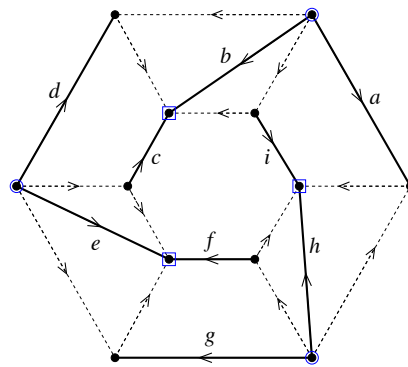


Figura 6: O contraexemplo (D_1, c_1) de Schrijver. O vetor de capacidades c_1 tem valores em $\{0, 1\}$. Os arcos de capacidade nula são indicadas por linhas tracejadas; as demais são indicadas por linhas contínuas. O digrafo é um dag; os vértices-fonte estão assinalados por círculos e os vértices-sorvedouro por quadrados.

Suponha, por um momento, que $\nu(D_1, c_1) \geq 2$. Então B_1 inclui duas junções mutuamente disjuntas, digamos J e K . Os arcos de cada caminho ativo estão alternadamente em J e K , uma vez que cada vértice interno de cada caminho ativo é margem de um corte com exatamente 2 arcos ativos. Em outras palavras, cada caminho ativo segue o padrão (J, K, J) ou o padrão (K, J, K) . No conjunto dos três caminhos ativos, esses dois padrões podem ser combinados de 4 maneiras diferentes apenas, como indicado na figura 7. Porém, para cada uma das 4 combinações, J ou K não intersecta um dos cortes críticos. Assim, J ou K não é uma junção, ao contrário do que havíamos suposto. Essa contradição mostra que $\nu(D_1, c_1) < 2$. Como B_1 é uma junção, temos $\nu(D_1, c_1) = 1$. ■

O digrafo capacitado de Schrijver tem a forma de um anel de comprimento $2i$, com $i = 3$. Os digrafos capacitados análogos com $i = 5, 7, 9, \dots$ (veja a figura 8) também são contraexemplos. Já os digrafos capacitados análogos com $i = 2, 4, 6, 8, \dots$ não são contraexemplos.

7.1 Empacotamento fracionário de junções

A seguinte digressão é interessante mas não tem relação direta com a conjectura de Edmonds–Giles. O digrafo capacitado (D_1, c_1) da figura 6 não tem um empacotamento de tamanho 2, mas tem um “empacotamento fracionário” de tamanho 2, como mostraremos.

a	b	c	d	e	f	g	h	i
J	K	J	J	K	J	J	K	J
J	K	J	J	K	J	K	J	K
J	K	J	K	J	K	J	K	J
J	K	J	K	J	K	K	J	K

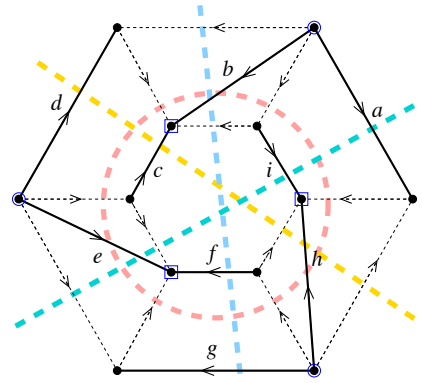


Figura 7: Cada linha da tabela mostra uma possível disposição de duas potenciais junções mutuamente disjuntas, J e K , no digrafo capacitado (D_1, c_1) da figura 6. Em cada linha da tabela, um de J e K não intersecta um dos quatro cortes críticos indicados no desenho. Na primeira linha, por exemplo, J não intersecta o corte crítico indicado pelo círculo rosa.

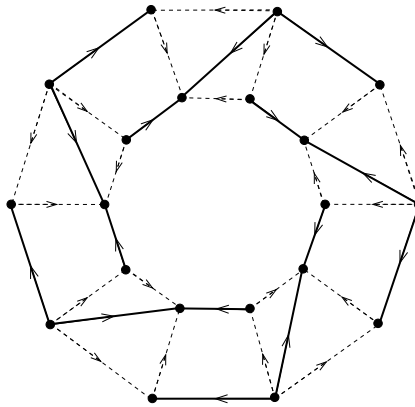


Figura 8: O contraexemplo (D'_1, c'_1) da figura é a generalização de (D_1, c_1) da figura 6 baseada num anel de comprimento 2×5 .

Digamos que as junções $\{a, c, d, f, h\}$, $\{d, f, g, i, b\}$, $\{g, i, a, c, e\}$ e $\{b, h, e\}$ são *especiais*. Atribua peso $\frac{1}{2}$ a cada junção especial e peso 0 a todas as outras junções de D_1 . Cada arco de capacidade 1 em (D_1, c_1) pertence a exatamente duas das junções especiais e cada arco de capacidade 0 não pertence a nenhuma das junções especiais. Assim, a soma dos pesos de todas as junções que contêm um dado arco a não passa da capacidade de a . Pode-se dizer então que a coleção ponderada de junções especiais é “disjunta” em (D_1, c_1) . O tamanho dessa coleção ponderada é a soma dos pesos de todas as junções, ou seja, $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 2$. Assim, (D_1, c_1) tem um “empacotamento fracionário” de tamanho 2.

Esse exemplo ilustra um fenômeno geral. Para qualquer digrafo capacitado (D, c) , considere os programas lineares

$$\text{maximizar } y1 \text{ sob as restrições } y \in \mathbb{R}_+^{\mathcal{J}} \text{ e } yM \leq c \tag{4}$$

$$\text{minimizar } cx \text{ sob as restrições } x \in \mathbb{R}_+^{\mathcal{A}} \text{ e } Mx \geq 1 \tag{5}$$

que generalizam os programas (2) e (1) da seção 3. Demonstra-se que $\nu^*(D, c) = \tau(D, c)$, sendo $\nu^*(D, c)$ o valor ótimo do programa (4) e $\tau(D, c)$ o valor ótimo do programa (5).

8 Os contraexemplos de Cornuéjols e Guenin

Por duas décadas, (D_1, c_1) foi o único contraexemplo conhecido para a conjectura 3. Em 2002, Cornuéjols e seu aluno Guenin [CG02] encontraram dois novos contraexemplos, que denotaremos por (D_2, c_2) e (D_3, c_3) . Esses contraexemplos estão representados nas figuras 9 e 10 respectivamente.

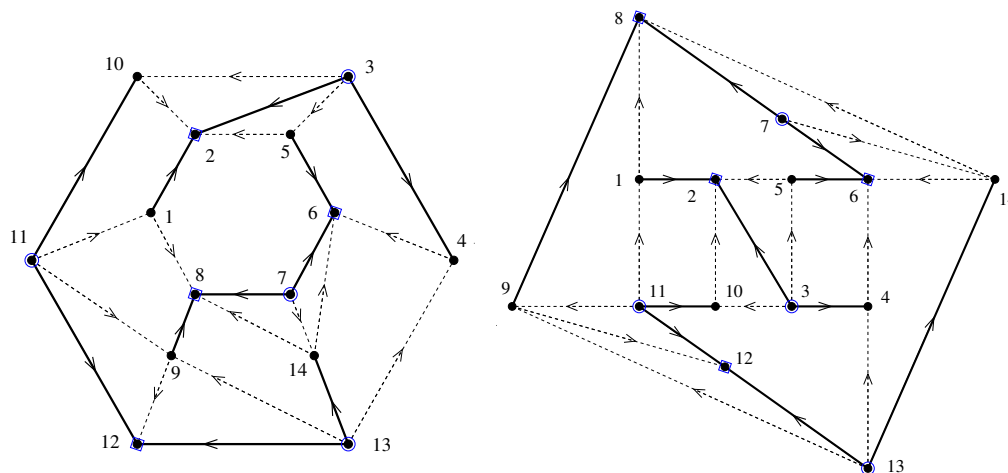


Figura 9: Dois desenhos do contraexemplo (D_2, c_2) de Cornuéjols e Guenin. O vetor de capacidades c_2 tem valores em $\{0, 1\}$. Os arcos de capacidade nula são indicadas por linhas tracejadas; as demais, por linhas contínuas. O digrafo é um dag.

Fato 2: $\nu(D_2, c_2) = 1$ e $\tau(D_2, c_2) = 2$. ■

Fato 3: $\nu(D_3, c_3) = 1$ e $\tau(D_3, c_3) = 2$. ■

As provas dos fatos 2 e 3 são semelhantes à do fato 1. A figura 11 mostra os cortes críticos usados nas provas. (Esses são os cortes que intersectam cada caminho ativo uma única vez.)

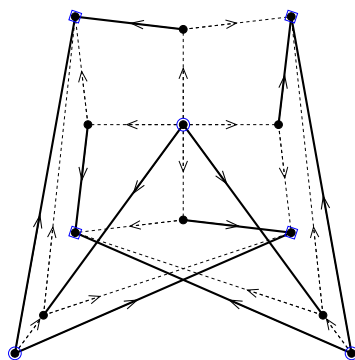


Figura 10: O contraexemplo (D_3, c_3) de Cornuéjols e Guenin. O vetor de capacidades c_3 tem valores em $\{0, 1\}$. Os arcos de capacidade nula são indicadas por linhas tracejadas; os demais, por linhas contínuas. O digrafo é um dag.

Algumas variações simples de (D_2, c_2) e (D_3, c_3) também são contraexemplos. Williams [Wil04] discute várias dessas variações. Por exemplo, se u e x são os vértices 14 e 8 da

figura 9 então $(D_2 - ux, c'_2)$ é um contraexemplo, sendo c'_2 a restrição de c_2 ao conjunto de arcos de $D_2 - ux$.

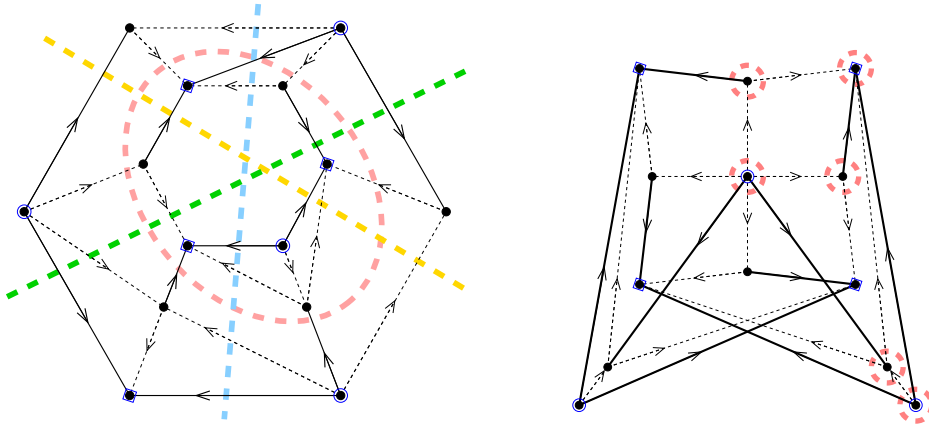


Figura 11: O primeiro desenho representa os quatro cortes críticos de (D_2, c_2) . O segundo desenho marca os vértices da margem positiva de um dos cortes críticos de (D_3, c_3) ; os outros três cortes críticos são definidos por simetria.

9 Contraexemplos minimais

Ao construir um catálogo de contraexemplos para a conjectura de Edmonds–Giles (conjectura 3) podemos nos limitar aos contraexemplos que, em algum sentido, não “contêm” outros contraexemplos. Dizemos que tais digrafos capacitados são “contraexemplos minimais”.

Para definir a expressão “um contraexemplo contém outro”, precisamos introduzir uma relação de ordem entre vetores de capacidades: dados dois vetores de capacidades c e c' para um digrafo D , dizemos que $c' < c$ se $c'_a \leq c_a$ para todo arco a mas $c'_a < c_a$ para algum arco a . É claro que a relação $<$ é transitiva (ou seja, se $c'' < c'$ e $c' < c$ então $c'' < c$) e antissimétrica (ou seja, se $c' < c$ então $c \not< c'$).

Também precisamos introduzir uma notação auxiliar: para qualquer digrafo capacitado (D, c) , denotaremos por $I(D, c)$ e $N(D, c)$ o conjunto dos arcos infinitos e o conjunto dos arcos nulos de (D, c) , respectivamente.

Podemos agora definir uma relação de inclusão entre digrafos capacitados. Diremos que um digrafo capacitado (D', c') *está contido em* (D, c) se

- i. $V' \subseteq V$ e $A' \subset A$ ou
- ii. $V' = V$ e $A' = A$ e $I' \supset I$ ou
- iii. $V' = V$ e $A' = A$ e $I' = I$ e $N' \supset N$ ou
- iv. $V' = V$ e $A' = A$ e $I' = I$ e $N' = N$ e $c' < c$,

onde V' , A' , I' e N' são abreviaturas de $V(D')$, $A(D')$, $I(D', c')$ e $N(D', c')$ respectivamente e as abreviaturas V , A , I e N são definidas analogamente para (D, c) . A relação está-contido-em entre digrafos capacitados é transitiva e antissimétrica.

Finalmente, podemos definir o conceito de contraexemplo minimal. Diremos que um contraexemplo (D, c) é *minimal* se nenhum contraexemplo (D', c') está contido em (D, c) .

Se $A(D) = \emptyset$ ou $A(D) = I(D, c) \cup N(D, c)$ então (D, c) não é um contraexemplo. Segue daí

e da transitividade e antissimetria da relação está-contido-em que todo contraexemplo não minimal contém um contraexemplo minimal.

Seguem alguns exemplos ilustrativos:

1. O contraexemplo (D_2, c_2) de Cornuéjols–Guenin (figura 9) não é minimal, como Williams [Wil04] observou. De fato, se denotarmos por u e x os vértices 14 e 8 da figura 9 e denotarmos por c'_2 a restrição de c_2 ao conjunto de arcos de $D_2 - ux$ então $(D_2 - ux, c'_2)$ é um contraexemplo, pois $\nu(D_2 - ux, c'_2) = \nu(D_2, c_2) < \tau(D_2, c_2) = \tau(D_2 - ux, c'_2)$. Ademais, $(D_2 - ux, c'_2)$ está contido em (D_2, c_2) .

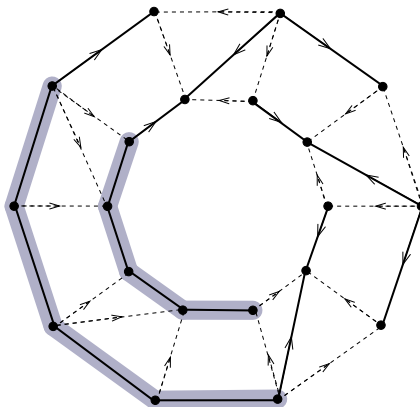


Figura 12: Digrafo capacitado (D''_1, c''_1) . (Compare com (D'_1, c'_1) da figura 8.) As faixas cinzas indicam arcos de capacidade ∞ . A orientação desses arcos foi omitida porque elas podem ser percorridas em qualquer direção.

2. O contraexemplo (D'_1, c'_1) da figura 8 contém o digrafo capacitado (D''_1, c''_1) da figura 12. Este último é um contraexemplo por ser “equivalente” ao contraexemplo (D_1, c_1) da figura 6. Portanto, o contraexemplo (D'_1, c'_1) não é minimal.
3. O contraexemplo (D_1, c_1) de Schrijver (veja a figura 6) é minimal, embora isso não seja óbvio.

10 Algumas propriedades de contraexemplos minimais

Williams [Wil04, WG05] mostrou que todo contraexemplo minimal (D, c) tem as seguintes propriedades:

1. nenhum arco nulo é transitivo,
2. o vetor de capacidades c é crítico,
3. os arcos de todo circuito dirigido são infinitos,
4. todo corte mínimo é periférico,
5. todo circuito tem algum arco que não é ativo,

Os termos técnicos que aparecem nessa lista de propriedades têm as seguintes definições: Um arco vw é **transitivo** em (D, c) se existe caminho dirigido de v a w em $(D - vw, c')$, sendo c' a restrição de c ao conjunto de arcos de $D - vw$. Um arco é **ativo** em (D, c) se não for nulo nem infinito. O vetor de capacidades c é **crítico** se todo arco ativo pertence a um corte mínimo. Um corte C é **periférico** em (D, c) se, para alguma das duas margens de C ,

todo arco que tem ambas as pontas nessa margem é infinito. (Por exemplo, C é periférico se a margem positiva ou a margem negativa de C tem um único vértice.)

Os contraexemplos (D_1, c_1) , (D_2, c_2) e (D_3, c_3) das figuras 6, 9 e 10 têm as propriedades 1 a 5, embora nem todos esses contraexemplos sejam minimais. O contraexemplo (D'_1, c'_1) da figura 12 tem vários arcos transitivos nulos e portanto não é minimal.

A seguir, examinaremos as provas de cada uma das propriedades da lista acima.

10.1 Eliminação de arcos transitivos nulos

A remoção de arcos transitivos nulos não cria novos cortes e não altera o valor dos parâmetros ν e τ .

Proposição 1: *Contraexemplos minimais não têm arcos transitivos nulos.*

PROVA: Seja (D, c) um digrafo capacitado e b um arco transitivo nulo. Seja D' o digrafo $D - b$ e c' a restrição de c ao conjunto de arcos de $D - b$. Seja v a ponta positiva e w a ponta negativa de b . Seja B o conjunto de arcos de um caminho dirigido de v a w em (D', c') . (Convém lembrar que o caminho pode ter arcos inversos, mas todos eles são infinitos.)

Observe que um corte de D intersecta B se e somente se contém b . Além disso, todo corte de D contém no máximo um arco de B . Segue daí que D e D' têm a mesmo conjunto de fontes e portanto também (D, c) e (D', c') têm a mesmo conjunto de fontes. Ademais, para cada fonte F , temos $c'(C') = c(C)$, sendo C' e C os cortes associados a F em D' e D respectivamente. Portanto,

$$\tau(D', c') = \tau(D, c). \quad (6)$$

Seja \mathcal{E} um empacotamento de junções de (D, c) e \mathcal{E}' um empacotamento de junções de (D', c') . Como (D, c) e (D', c') têm a mesmo conjunto de fontes, toda junção de (D', c') é também uma junção de (D, c) . Logo, \mathcal{E}' é um empacotamento em (D, c) . Por outro lado, toda junção de (D, c) que não contém b é uma junção de (D', c') . Como $c_b = 0$, nenhuma das junções em \mathcal{E} contém b , e portanto \mathcal{E} é um empacotamento em (D', c') . Segue daí que,

$$\nu(D', c') = \nu(D, c). \quad (7)$$

Em virtude de (6) e (7), se (D, c) é um contraexemplo então (D', c') também é um contraexemplo. Como $V(D') = V(D)$ e $A(D') \subset A(D)$, o contraexemplo (D, c) não é minimal. ■

10.2 Capacidade crítica

Podemos reduzir a capacidade de um arco ativo que não pertence a um corte mínimo. Essa operação não invalida um contraexemplo.

Proposição 2: *Em todo contraexemplo minimal, o vetor de capacidades é crítico.*

PROVA: Seja (D, c) um contraexemplo e suponha que c não é crítico. Então algum arco ativo a não pertence a um corte mínimo. Seja c' o vetor de capacidades definido por

$$c'_a := c_a - 1 \quad \text{e} \quad c'_e := c_e \quad \text{para cada } e \neq a.$$

É claro que $I(D, c') = I(D, c)$ e portanto (D, c') e (D, c) têm a mesmo conjunto de cortes. É claro também que $c'(C) = c(C) - 1$ para todo corte C que contém a e $c'(C) = c(C)$ para

todos os demais cortes. Como cortes mínimos de (D, c) não contêm a , temos

$$\tau(D, c') = \tau(D, c).$$

Agora considere as junções. Seja \mathcal{E}' um empacotamento máximo de junções de (D, c') . Como \mathcal{E}' também é um empacotamento em (D, c) , temos

$$\nu(D, c') = |\mathcal{E}'| \leq \nu(D, c).$$

Mas (D, c) é um contraexemplo, e portanto $\nu(D, c') \leq \nu(D, c) < \tau(D, c) = \tau(D, c')$, donde (D, c') também é um contraexemplo. Como $N(D', c') \supseteq N(D, c)$ e $c' < c$, o contraexemplo (D, c) não é minimal. ■

Uma consequência da proposição: Se c é crítico então nenhum circuito dirigido de D tem arcos ativos.

10.3 Eliminação de circuitos dirigidos

A contração dos arcos de circuitos dirigidos não altera o conjunto de cortes. Assim, podemos atribuir ∞ às capacidades desses arcos.

Proposição 3: *Num contraexemplo minimal, os arcos de todo circuito dirigido são infinitos.*

PROVA: Seja (D, c) um digrafo capacitado e O um circuito dirigido em (D, c) . (Convém lembrar que, por definição, todos os arcos inversos de O são infinitos.) Suponha que $c_a < \infty$ para algum arco direto a de O . Defina um novo vetor de capacidades c' da seguinte maneira:

$$c'_a := \infty \quad \text{e} \quad c'_e := c_e \quad \text{para cada } e \neq a.$$

Como O é dirigido em (D, c) , nenhum corte de (D, c) contém arcos de O . Portanto, o conjunto de cortes de (D, c') é idêntico ao conjunto de cortes de (D, c) . Assim,

$$\tau(D, c') = \tau(D, c).$$

Nenhuma junção minimal de (D, c) contém a pois nenhum corte de (D, c) contém a . Assim, (D, c') e (D, c) têm as mesmas junções minimais. Portanto, todo empacotamento de junções minimais em (D, c) é também um empacotamento em (D, c') , e vice-versa. Segue daí que

$$\nu(D, c') = \nu(D, c).$$

Suponha agora que (D, c) é um contraexemplo. Então $\nu(D, c) < \tau(D, c)$ e portanto $\nu(D, c') < \tau(D, c')$, ou seja, (D, c') é um contraexemplo. Mas $I(D, c') \supset I(D, c)$, e portanto o contraexemplo (D, c) não é minimal. ■

Segue dessa proposição que todo contraexemplo minimal é essencialmente um dag.

10.4 Eliminação de cortes mínimos não periféricos

Qualquer digrafo capacitado pode ser dividido, ao longo de um corte mínimo não periférico, em dois digrafos capacitados “independentes”.

Proposição 4: *Num contraexemplo minimal, todo corte mínimo é periférico.*

PROVA: Seja C um corte mínimo de um digrafo capacitado (D, c) . Seja c' o vetor de capacidades definido assim:

$$c'_a := \begin{cases} \infty & \text{se } a \text{ tem ambas as pontas na margem negativa de } C, \\ c_a & \text{em caso contrário.} \end{cases}$$

(Informalmente, c' descreve a contração da margem negativa de C a um vértice.) Seja c'' o vetor de capacidades definido assim:

$$c''_a := \begin{cases} \infty & \text{se } a \text{ tem ambas as pontas na margem positiva de } C, \\ c_a & \text{em caso contrário.} \end{cases}$$

De acordo com o lema 3 abaixo, se (D, c) é um contraexemplo então (D, c') ou (D, c'') é um contraexemplo. Por outro lado, se C não é periférico então $I(D, c') \supset I(D, c)$ (pois algum arco não infinito tem ambas as pontas na margem negativa de C) e, analogamente, $I(D, c'') \supset I(D, c)$. Portanto, se o contraexemplo (D, c) é minimal, o corte C deve ser periférico. ■

Para concluir a prova da proposição é preciso estabelecer o seguinte lema:

Lema 3: *Seja C um corte mínimo de um digrafo capacitado (D, c) e sejam c' e c'' os vetores de capacidades definidos no início da prova da proposição 4. Se (D, c') e (D, c'') não são contraexemplos então (D, c) também não é contraexemplo.*

PROVA: Por um lado, C é um corte de (D, c') (pois C não contém arcos infinitos) e $c'(C) = c(C)$, donde $\tau(D, c') \leq c'(C) = c(C) = \tau(D, c)$. Por outro lado, $\tau(D, c') \geq \tau(D, c)$ pois o conjunto de cortes de (D, c') é parte do conjunto de cortes de (D, c) e a capacidade de um corte em (D, c') é igual à capacidade desse corte em (D, c) . Logo,

$$\tau(D, c') = \tau(D, c)$$

e portanto C é um corte mínimo de (D, c') . Um raciocínio análogo mostra que $\tau(D, c'') = \tau(D, c)$ e C é um corte mínimo de (D, c'') .

1. Suponha que (D, c') não é um contraexemplo, isto é, que $\nu(D, c') = \tau(D, c')$. Seja \mathcal{E}' um empacotamento máximo de junções de (D, c') . É claro que $|\mathcal{E}'| = \nu(D, c') = \tau(D, c')$. Como $\tau(D, c') = c'(C)$, temos $|\mathcal{E}'| = c'(C)$. O lema 2 (veja a seção 5) garante então que

$$|\mathcal{E}'(a)| = c_a \quad \text{para cada } a \text{ em } C \text{ e} \quad (8)$$

$$|J' \cap C| = 1 \quad \text{para cada } J' \text{ em } \mathcal{E}'. \quad (9)$$

Suponha agora que (D, c'') não é um contraexemplo e seja \mathcal{E}'' um empacotamento máximo de junções de (D, c'') . Um raciocínio análogo ao do parágrafo anterior mostra que

$$|\mathcal{E}''(a)| = c_a \quad \text{para cada } a \text{ em } C \text{ e} \quad (10)$$

$$|J'' \cap C| = 1 \quad \text{para cada } J'' \text{ em } \mathcal{E}''. \quad (11)$$

2. Em virtude de (8) e (9), para cada arco não nulo a de C , existem elementos $J'_{a,1}, \dots, J'_{a,c_a}$ de \mathcal{E}' tais que

$$J'_{a,i} \cap C = \{a\} \quad (12)$$

para $i = 1, \dots, c_a$. Em virtude de (10) e (11), existem elementos $J''_{a,1}, \dots, J''_{a,c_a}$ de \mathcal{E}'' tais que $J''_{a,i} \cap C = \{a\}$ para $i = 1, \dots, c_a$. Seja

$$J_{a,i} := J'_{a,i} \cup J''_{a,i} \quad (13)$$

para cada a em C e cada i em $\{1, \dots, c_a\}$. Dado qualquer par (a, i) , sejam J' , J'' e J abreviaturas de $J'_{a,i}$, $J''_{a,i}$ e $J_{a,i}$ respectivamente. Nossa próxima tarefa é mostrar que J é uma junção de (D, c) . É claro que J' , J'' e J não têm arcos nulos nem infinitos. Resta apenas mostrar que $J \cap B \neq \emptyset$ para todo corte B de (D, c) .

3. Seja B um corte de (D, c) e X a margem positiva de B . Seja Y a margem positiva de C . Se $X \cap Y = \emptyset$ ou $X \supseteq Y$ então B é um corte de (D, c') , donde $J'' \cap B \neq \emptyset$. Se $X \cup Y = V$ ou $X \subseteq Y$ então B é um corte de (D, c') , donde $J' \cap B \neq \emptyset$. Em ambos os casos temos $J \cap B \neq \emptyset$. Nos demais casos, graças a (9), (11), (12) e (13), o lema 4 abaixo garante que $J \cap B \neq \emptyset$. Concluímos assim que J é uma junção de (D, c) .

4. Seja \mathcal{E} a coleção de todas as junções $J_{a,i}$ tais que a é um arco não nulo de C e i pertence a $\{1, \dots, c_a\}$. Para todo arco e de D , se e tem ponta positiva na margem positiva de C então

$$|\mathcal{E}(e)| \leq c_e$$

pois \mathcal{E}' é um empacotamento em (D, c') e $c'_e = c_e$. Analogamente, se e tem ponta negativa na margem negativa de C então $|\mathcal{E}(e)| \leq c_e$. Portanto, \mathcal{E} é um empacotamento em (D, c) .

5. Segue do parágrafo anterior que $\nu(D, c) \geq |\mathcal{E}|$. Mas $|\mathcal{E}| = |\mathcal{E}'| = |\mathcal{E}''| = \tau(D, c)$, e portanto $\nu(D, c) \geq \tau(D, c)$. Logo, (D, c) não é um contraexemplo. ■

Para concluir a prova do lema, resta apenas estabelecer a seguinte consequência da submodularidade de ∂ :

Lema 4 (submodularidade): *Seja Y uma fonte não trivial de um digrafo D . Seja J um conjunto de arcos que intersecta todos os cortes $\partial(X)$ de D para os quais X é uma fonte tal que*

$$X \cup Y = V \quad \text{ou} \quad X \cap Y = \emptyset \quad \text{ou} \quad X \supseteq Y \quad \text{ou} \quad X \subseteq Y.$$

Se $|J \cap \partial(Y)| = 1$ então J é uma junção de D .

PROVA: Seja X uma fonte não trivial de D tal que $X \cup Y \neq V$ e $X \cap Y \neq \emptyset$. Para provar que J é uma junção de D , basta mostrar que $J \cap \partial(X) \neq \emptyset$.

É claro que $X \cup Y$ e $X \cap Y$ são fontes não triviais de D . Logo, $\partial(X \cup Y)$ e $\partial(X \cap Y)$ são cortes de D . Observe agora que a união de $\partial(X \cup Y)$ com $\partial(X \cap Y)$ é igual à união de $\partial(X)$ com $\partial(Y)$ e que a interseção de $\partial(X \cup Y)$ com $\partial(X \cap Y)$ é igual à interseção de $\partial(X)$ com $\partial(Y)$. Logo, a soma $|\partial(X \cup Y)| + |\partial(X \cap Y)|$ é igual à soma $|\partial(X)| + |\partial(Y)|$. Analogamente,

$$|J \cap \partial(X \cup Y)| + |J \cap \partial(X \cap Y)| = |J \cap \partial(X)| + |J \cap \partial(Y)|. \quad (14)$$

Como $X \cup Y \supseteq Y$ e $X \cap Y \subseteq Y$, as hipóteses do lema garantem que cada termo do lado esquerdo de (14) vale pelo menos 1. Como o segundo termo do lado direito de (14) vale exatamente 1, o primeiro termo do lado direito deve valer pelo menos 1. Logo, $J \cap \partial(X) \neq \emptyset$, como queríamos provar. ■

10.5 Eliminação de circuitos ativos

Williams [Wil04] mostrou que em qualquer contraexemplo minimal o subdigrafo induzido pelo conjunto de arcos ativos é uma floresta:

Proposição 5: *Nenhum contraexemplo minimal tem um circuito de arcos ativos.*

PROVA: Seja (D, c) um contraexemplo e O um circuito de D cujos arcos são ativos. Mostremos a seguir que o contraexemplo (D, c) não é minimal.

Seja e um arco de capacidade mínima em O e $k := c_e$. Ajuste a notação de modo que e seja direto em O . Seja c' o seguinte vetor de capacidades:

$$c'_a := \begin{cases} c_a - k & \text{se } a \text{ é arco direto de } O, \\ c_a + k & \text{se } a \text{ é arco inverso de } O, \\ c_a & \text{em caso contrário.} \end{cases}$$

É claro que $c'_e = 0$ e portanto $N(D, c') \supset N(D, c)$. Assim, se (D, c') é um contraexemplo então o contraexemplo (D, c) não é minimal, como prometemos mostrar. Passamos a tratar agora do caso em que (D, c') não é um contraexemplo.

O conjunto de cortes de (D, c') é idêntico ao conjunto de cortes de (D, c) . Segue daí que os conjuntos de junções de (D, c') e (D, c) são idênticos. Assim, podemos dizer “corte” e “junção”, sem acrescentar “de (D, c) ” ou “de (D, c') ”. Observe que todo corte contém o mesmo número de arcos inversos e arcos diretos de O . Portanto,

$$c'(C) = c(C) \quad (15)$$

para todo corte C . Assim,

$$\tau(D, c') = \tau(D, c). \quad (16)$$

Seja \mathcal{E}' um empacotamento máximo de junções de (D, c') . Como (D, c') não é contraexemplo, temos $|\mathcal{E}'| = \tau(D, c')$. Seja J_0 um elemento de \mathcal{E}' . O lema 5 abaixo mostra que $c'(C) - |J_0 \cap C| \geq |\mathcal{E}'| - 1$ para todo corte C . Logo,

$$c'(C) - |J_0 \cap C| \geq \tau(D, c') - 1$$

para todo corte C . Em virtude de (15) e (16), tudo vale com c no lugar de c' , ou seja,

$$c(C) - |J_0 \cap C| \geq \tau(D, c) - 1 \quad (17)$$

para todo corte C . É claro que J_0 não tem arcos nulos de (D, c') e portanto também não tem arcos nulos de (D, c) .

Agora que temos uma junção J_0 que satisfaz (17), podemos descartar c' e \mathcal{E}' . Seja c'' o vetor definido como segue: para cada arco a ,

$$c''_a := \begin{cases} c_a - 1 & \text{se } a \in J_0 \text{ e} \\ c_a & \text{em caso contrário.} \end{cases} \quad (18)$$

Como J_0 não tem arcos nulos, c'' é um vetor de capacidades. Os conjuntos de cortes de (D, c'') e de (D, c) são idênticos e portanto os conjuntos de junções de (D, c'') e (D, c) também são idênticos. Assim, podemos dizer “corte” e “junção” sem acrescentar “de (D, c) ” ou “de (D, c') ”. Para todo corte C , temos $c''(C) = c(C) - |J_0 \cap C|$, donde $c''(C) \geq \tau(D, c) - 1$ em virtude de (17). Portanto,

$$\tau(D, c'') \geq \tau(D, c) - 1.$$

Seja \mathcal{E}'' um empacotamento máximo de junções de (D, c'') . Suponha por um momento que (D, c'') não é contraexemplo. Então $|\mathcal{E}''| = \nu(D, c'') = \tau(D, c'')$. Considere agora a coleção $\mathcal{E} := \mathcal{E}'' \cup \{J_0\}$ e observe que

$$|\mathcal{E}| = |\mathcal{E}''| + 1 = \tau(D, c'') + 1 \geq \tau(D, c) - 1 + 1 = \tau(D, c).$$

Observe também que \mathcal{E} é um empacotamento em (D, c) , pois $|\mathcal{E}(a)| = |\mathcal{E}''(a)| + 1 \leq c''_a + 1 = c_a$ para cada a em J_0 e $|\mathcal{E}(a)| = |\mathcal{E}''(a)| \leq c''_a = c_a$ para cada a fora de J_0 . Logo, $\nu(D, c) \geq |\mathcal{E}| \geq \tau(D, c)$ e portanto (D, c) não é contraexemplo. Isso contradiz a maneira como (D, c) foi escolhido no início da prova. Portanto, ao contrário do que havíamos suposto por um momento, (D, c'') é um contraexemplo. Como $I(D'', c'') = I(D, c)$ e $N(D'', c'') \supseteq N(D, c)$ e $c'' < c$, o contraexemplo (D, c) não é minimal. ■

Para concluir a prova da proposição, falta apenas estabelecer o seguinte lema:

Lema 5: Para qualquer empacotamento \mathcal{E} de junções de (D, c) , qualquer elemento J_0 de \mathcal{E} , e qualquer corte C , vale a desigualdade $c(C) - |J_0 \cap C| \geq |\mathcal{E}| - 1$.

PROVA: Como \mathcal{E} é um empacotamento em (D, c) , temos $|\{J \in \mathcal{E} : J \ni a\}| \leq c_a$ para cada a em C . Logo,

$$\begin{aligned} c(C) &= \sum_{a \in C} c_a \\ &\geq \sum_{a \in C} |\{J \in \mathcal{E} : J \ni a\}| \\ &= \sum_{J \in \mathcal{E}} |\{a \in C : a \in J\}| \\ &= \sum_{J \in \mathcal{E}} |J \cap C|. \end{aligned}$$

Portanto, $c(C) \geq |J_0 \cap C| + \sum_{J \in \mathcal{E} \setminus \{J_0\}} |J \cap C| \geq |J_0 \cap C| + |\mathcal{E} \setminus \{J_0\}|$, uma vez que $|J \cap C| \geq 1$ para cada J . Segue daí que $c(C) - |J_0 \cap C| \geq |\mathcal{E}| - 1$. ■

Referências

- [CG02] G. Cornuéjols and B. Guenin. Note on dijoin. *Discrete Mathematics*, 243:213–216, 2002. [10](#)
- [CGM00] G. Cornuéjols, B. Guenin, and F. Margot. The packing property. *Mathematical Programming (Ser. A)*, 89:113–126, 2000. [1](#)
- [EG77] J. Edmonds and R. Giles. A min-max relation for submodular functions on graphs. In P. L. Hammer et al., editors, *Studies in Integer Programming*, volume 1 of *Annals of Discrete Mathematics*, pages 185–204. North-Holland, 1977. [7](#)
- [FY87] P. Feofiloff and D. H. Younger. Directed cut transversal packing for source-sink connected graphs. *Combinatorica*, 7(3):255–263, 1987. [4](#), [7](#)
- [LY78] C. L. Lucchesi and D. H. Younger. A minimax theorem for directed graphs. *J. of the London Math. Soc. (2)*, 17:369–374, 1978. [3](#), [4](#)
- [Sch80] A. Schrijver. A counterexample to a conjecture of Edmonds and Giles. *Discrete Math.*, 32:213–214, 1980. [8](#)
- [Sch82] A. Schrijver. Min-max relations for directed graphs. *Annals of Discrete Math.*, 16:261–280, 1982. [4](#), [7](#)
- [Sch03] A. Schrijver. *Combinatorial Optimization: Polyhedra and Efficiency*. Springer, 2003. [1](#), [3](#), [4](#), [5](#)

- [WG05] A. M. Williams and B. Guenin. Advances in packing directed joins. *Electronic Notes in Discrete Mathematics*, 19:249–255, 2005. <https://www.sciencedirect.com/science/journal/15710653>. 12
- [Wil04] A. M. Williams. Packing directed joins. Masters Thesis, University of Waterloo, 2004. 1, 10, 12, 16
- [Woo78a] D. R. Woodall. Menger and König systems. In Y. Alavi and D. R. Lick, editors, *Theory and Applications of Graphs*, volume 642 of *Lecture Notes in Mathematics*, pages 620–635. Springer, 1978. 3
- [Woo78b] D. R. Woodall. Minimax theorems in graph theory. In L. W. Beineke and R. J. Wilson, editors, *Selected Topics in Graph Theory*, pages 237–269. Academic Press, 1978. 3

Índice Remissivo

- arco, 1
 - ativo, 8, 12
 - direto, 2
 - infinito, 6
 - inverso, 2
 - nulo, 6
 - transitivo, 12
- associado, 1
- caminho dirigido, 5
- capacidade
 - crítica, 12
 - de arco, 6
 - de corte, 6
- circuito dirigido, 3
 - em digrafo capacitado, 6
- coleção disjunta
 - em digrafo capacitado, 6
- conexão fonte-sorvedouro, 7
- conexo, 1
- contraexemplo, 7
- corte, 1
 - associado a fonte, 1
 - crítico, 8
 - de digrafo capacitado, 6
 - dirigido, 1
 - mínimo, 3, 6
 - periférico, 12
- crítico, 12
- dag, 3
- digrafo, 1
 - capacitado, 6
- dijunção, 2
- disjunto, 2
- dual direcional, 1
- empacotamento, 2
 - em digrafo capacitado, 6
 - máximo, 3
- fluxo, 5
- fonte, 1
 - de digrafo capacitado, 6
 - trivial, 1
- fortemente conexo, 2
- junção, 2
 - de digrafo capacitado, 6
 - minimal, 2
- margem negativa, 1
- margem positiva, 1
- ponta negativa, 1
- ponta positiva, 1
- satisfaz a conjectura, 4
- semicorte, 5
- sorvedouro, 1
- submodularidade, 16
- transposto, 1
- vértice, 1
- vértice-fonte, 1
- vértice-sorvedouro, 1