MAC5770

Exercício resolvido

Prove por indução o seguinte teorema:

$$\text{Todo grafo } (V,E) \text{ satisfaz a identidade } \textstyle\sum_{v\in V} \mathrm{d}(v) = 2|E|. \tag{1}$$

(Dica 1: Antes de uma prova por indução, é essencial dizer *exatamente* o que se pretende provar, como fiz acima.)

(Dica 2: Indução se faz "de trás pra frente", isto é, "de n para $n-1$" e não "de n para $n+1$".)

Prova do teorema: Nossa prova é por indução no número de arestas de (V,E). A base da indução é o caso em que $|E| = 0$. Nesse caso, $\mathrm{d}(v) = 0$ para todo vértice v, donde $\sum_{v\in V} \mathrm{d}(v) = 0$, e assim a identidade (1) está satisfeita.

Agora tome um grafo (V,E) com $|E| > 0$ e suponha, por hipótese de indução, que a identidade (1) vale para qualquer grafo da forma (V,F) onde F é um subconjunto próprio de E. Seja xy uma elemento qualquer de E e seja F o conjunto $E - \{xy\}$. Como F é parte própria de E, a hipótese de indução garante que a identidade (1) vale para o grafo (V,F), ou seja, que $\sum_{v\in V} \mathrm{d}_F(v) = 2|F|$, sendo $\mathrm{d}_F()$ o grau de v no subgrafo (V,F). Como

$\mathrm{d}(x) = 1 + \mathrm{d}_F(x)$,
$\mathrm{d}(y) = 1 + \mathrm{d}_F(y)$ e
$\mathrm{d}(v) = \mathrm{d}_F(v)$ para todo v distinto de x e y,

temos

$$\begin{aligned}
\textstyle\sum_{v\in V} \mathrm{d}(v) &= 2 + \textstyle\sum_{v\in V} \mathrm{d}_F(v) \\
&= 2 + 2|F| \quad \text{(por hipótese de indução)} \\
&= 2(1 + |F|) \\
&= 2|E|\,.
\end{aligned}$$

Conclusão: a identidade (1) vale para o grafo (V,E), como queríamos demonstrar. □

O que há de errado com a seguinte "prova"? Nossa prova é por indução no número de arestas de (V, E). A base da indução é o caso em que $|E| = 0$. Nesse caso, $\mathrm{d}(v) = 0$ para todo vértice v, donde $\sum_{v \in V} \mathrm{d}(v) = 0$, e assim a identidade (1) está satisfeita.

Suponha agora que a identidade (1) vale quando $|E| = m$ e vamos provar que ela vale quando $|E| = m + 1$. Por hipótese de indução, $\sum_{v \in V} \mathrm{d}(v) = 2|E|$. Agora acrescente qualquer aresta xy a E, produzindo assim um grafo H com $m + 1$ arestas. Como $\mathrm{d}_H(x) = \mathrm{d}_G(x) + 1$ e $\mathrm{d}_H(y) = \mathrm{d}_G(y) + 1$, temos $\sum_{v \in V} \mathrm{d}_H(v) = \sum_{v \in V} \mathrm{d}_G(v) + 2 = 2|E_H| + 2 = 2m + 2 = 2(m + 1) = 2|E_H|$, como queríamos demonstrar. $\square$