Aplicação de Áreas e volumes

RPM 11

Geraldo Ávila
IMECC-UNICAMP

Introdução

Em nosso artigo na RPM 10 — Arquimedes, a Esfera e o Cilindro — mostramos como foram descobertas as fórmulas do volume *V* e da área *A* da esfera em termos do raio *R:*

$$V = \frac{4\pi R^3}{3} \quad \text{e} \quad A = 4\pi R^2$$

Estas fórmulas servem, evidentemente, para calcular o volume e a área de uma esfera de raio *R,* mas fosse esta sua única serventia, certamente seriam muito limitadas. Na verdade elas vão muito além, como veremos no presente artigo: através de considerações simples, encarando o raio *R* como *variável independente,* obteremos um resultado aparentemente banal sobre a variação relativa de *V* e *A* como funções de *R,* o qual, no entanto, tem implicações surpreendentemente interessantes e de largo alcance em Ciência Aplicada. O professor encontrará aqui ilustrações simples para aliviar seus alunos daquele senso de frustração freqüentemente exarado na clássica pergunta: "Professor, mas pra que serve isto?".

A produção de calor no Sol

Vamos imaginar um corpo esférico em cujo interior existem fontes produzindo calor continuamente, tendendo a aumentar a temperatura do corpo. Este, todavia, não se torna mais quente porque o calor escapa pela sua superfície na mesma proporção em que é produzido no seu interior, de sorte que a temperatura permanece a mesma em cada ponto do corpo. É exatamente isto o que se passa com os animais de sangue quente, em particular conosco, os humanos: os processos metabólicos produzem calor, o qual escapa pela pele do animal na mesma proporção em que é produzido internamente, de sorte que a temperatura do animal permanece constante ao longo do tempo.

Vamos considerar a situação mais simples de um corpo esférico como o Sol, que produz calor internamente e o irradia pela sua superfície. Sabemos que a quantidade q_m de calor produzida por cada grama da massa solar por segundo é dada por $q_m = 4{,}5 \times 10^{-8}$ calorias(*). Será que esse número representa uma produção muito grande de calor ou muito pequena?

Para responder a essa pergunta, imaginemos que uma pessoa de 70 quilos (= 70×10^3 gramas) produzisse calor na mesma proporção que o Sol. Em um dia (= 24 horas = $24 \times 60 \times 60$ segundos) essa pessoa estaria queimando $4{,}5 \times 10^{-8} \times 70 \times 10^3 \times 24 \times 60^2 = 272$ calorias. Ora, isso é muito pouco, pois sabemos que uma pessoa de 70 quilos queima, em média, cerca de 3 000 calorias por dia, portanto mais de dez vezes a produção calórica do

Sol.

Como se explica isso? Como pode um corpo tão quente como o Sol estar produzindo calor a uma taxa tão baixa, inferior dez vezes à do corpo humano? A resposta se encontra nas fórmulas (1), como veremos a seguir.

A razão V/A

É claro, das fórmulas (1), que tanto o volume *V* quanto a área *A* de uma esfera crescem com o crescer de seu raio *R*. Isso pode ser visto graficamente na Fig. 1, que exibe os gráficos do volume e da área como funções do raio. Esses gráficos revelam não só o crescimento de *V* e de *A*, mas também o fato de que *V cresce mais depressa do que A à medida que o raio cresce*. De início, para valores pequenos de *R*, o volume é menor do que *A*; é exatamente igual a *A* quando $R = 3$; e passa a ser maior do que *A* para $R > 3$.

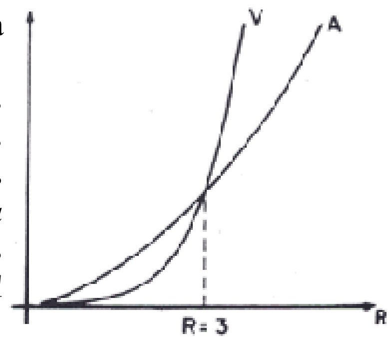

Fig. 1

Esse crescimento relativo de *V* e *A* também pode ser visto considerando-se a razão *V/A*. De (1) segue-se que

$$\frac{V}{A} = \frac{R}{3} \quad \text{ou seja} \quad V = \frac{R}{3} \cdot A,$$

(*) Veja o Apêndice adiante para o cálculo de q_m e outras taxas.

isto é, a razão do volume *V* para a área *A* é uma função linear do raio *R*, que cresce à medida que este cresce, como ilustra a Fig. 2. Isto significa que *V*cresce mais rapidamente do que *A*. Se *R* assume os valores $R = 3, 6, 9, 12$, etc, *V* será igual, respectivamente, a *A, 2A, 3A, 4A*, etc. Dito de maneira mais concreta, se $R = 3$ cm, $V = A$, isto é, o número de cm^3 em *V* é igual ao número de cm^2 em *A*; s = 6 *cm*, $V = 2A$, ou seja, para cada cm^2 em *A* teremos $3\ cm^3$ em *V*; se $R = 9\ cm$, $= 3A$, significando que para cada cm^2 em *A* temos agora $3\ cm^3$ em *V*; e assim por diante.

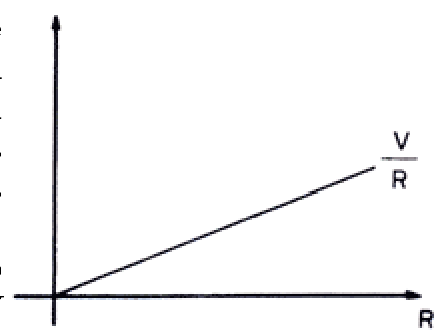

Fig. 2

Vamos comparar uma esfera do tamanho do Sol, de raio $R = 695\ 300\ km$, volume *V* e área *A*, com uma pequena esfera de raio $r = 24\ cm$, volume v e área *a*. Então, como $R = 69{,}53 \times 10^9\ cm$, teremos, de acordo com (2),

$$\frac{V}{A} \approx 23{,}2 \times 10^9 \ cm \quad \text{e} \quad \frac{v}{a} = 8 \ cm$$

Assim, para cada cm^2 da superfície solar existem

$$23{,}2 \times 10^9 = 23\ 200\ 000\ 000 = 23{,}2 \text{ bilhões}$$

de cm^3 de volume interno, enquanto, no caso da esfera menor, para cada cm^2 de sua superfície existem apenas 8 cm^3 de volume interno. Isso explica por que, embora a produção de calor no interior do Sol ocorra a taxas muito baixas ($q_m \approx 4{,}5 \times 10^{-8}$; $q_v \approx 6{,}5 \times 10^{-8}$. Veja o Apêndice), mesmo assim a quantidade de calor q_a que sai por cada cm^1 de sua superfície por segundo é bem alta; $q_a \approx 1500$ calorias; afinal, esta quantidade de calor provém de 23,2 bilhões de cm^3 internos! (Observe que $q_a = 23{,}2 \times 10^9 \times q_v$.)

Um resultado geral

Vamos explicar agora como as fórmulas (1) e (2) se generalizam para corpos semelhantes quaisquer. Lembramos a definição de semelhança, já dada na RPM 2, páginas 16 e 17.

Dois corpos (figuras espaciais) F e F_0 dizem-se semelhantes quando os pontos de F estão em correspondência biunivoca com os pontos de F_0 , de tal maneira que se P e Q são pontos quaisquer F e P_0 e Q_0 seus respectivos correspondentes em F_0 , então PQ/P_0Q_0 onde k é uma constante, chamada a razão de semelhança de Fe F_0.

Por exemplo, duas esferas quaisquer são semelhantes entre si, a razão de semelhança sendo dada pelo quociente de seus raios, seus diâmetros, duas cordas ou dois segmentos correspondentes quaisquer. De igual maneira, são semelhantes dois cubos ou dois tetraedros regulares quaisquer, a razão de semelhança sendo dada pela razão de duas arestas correspondentes quaisquer.

Sejam F e F_0 dois corpos semelhantes e R e R_0 os comprimentos de dois segmentos correspondentes em F e F_0 respectivamente. Sejam ainda V e Kq os respectivos volumes e A e A_o as respectivas áreas de F e Fq. Valem então os seguintes resultados$^{(*)}$:

$$\frac{V}{V_0} = \left(\frac{R}{R_0}\right)^3 \quad \text{e} \quad \frac{A}{A_0} = \left(\frac{R}{R_0}\right)^2 \tag{3}$$

dos quais obtemos as fórmulas abaixo, análogas às fórmulas (1):

$$V = C_v R^3 \quad \text{e} \quad A = C_a R^2 \tag{4}$$

onde $C_v = V_0 / R_0{}^3$ e $Ca = A_0 / R_0{}^2 V$ são constantes (que dependem, todavia, da escolha de P_0 e Q_0 em F_0) como $4\pi/3$ e 4π em (1). Das fórmulas (4) obtemos, em seguida, o análogo às relações (2):

$$\frac{V}{A} = \frac{R}{C} \quad \text{ou seja,} \quad V = \frac{R}{C} A \tag{5}$$

onde C é a constante $C = R_0 A_0 / V_0$ As fórmulas (4) e (5) têm interpretações e conseqüências inteiramente análogas às anteriores dadas em (1) e (2) respectivamente. Em particular, os gráficos de V e A como funções de R são praticamente os mesmos da figura 1, e bem assim o gráfico de V/A é linear como o da figura 2. A única diferença é que agora os gráficos de V e A se cruzam quando R = C, sendo $V < A$ para $R < C$ e $V > A$ para $R > C$. Como antes, também aqui o volume V de um corpo F (semelhante a F_0) cresce mais rapidamente que sua área A. Se R assume os valores C, 2C, 3C, etc, V será igual a A, 2A, 3A, etc. respectivamente; e *o número de* cm^3 *de volume que corresponde a cada* cm^2 *de área do corpo vai crescendo, assumindo os valores 1, 2, 3, etc.*

(*) As demonstrações desses resultados podem ser feitas por meios elementares, como no caso de áreas de figuras semelhantes (veja, p. ex., Lima, Elon L., *Áreas e Volumes.* Coleção Fundamentos da Matemática Elementar da SBM, p. 24.)

Aplicações

São muitas e variadas as aplicações das relações (4). Consideremos primeiro alguns casos de produção de calor no interior de um corpo e a saída desse calor pela superfície, seja por radiação, seja por condução. O que se passa é que, à medida que o calor é produzido no interior do volume, digamos a uma taxa de q_v calorias por cm^3 por segundo, a temperatura do corpo tende a aumentar, com o que aumenta também a taxa q_a , isto é, o número de calorias que escapa por cm^2 da superfície do corpo por segundo. A temperatura do corpo vai aumentando até que se atinja o *equilíbrio* ou *estado estacionário,* isto é, até que o calor produzido internamente iguale o calor que escapa pela superfície, o que se traduz pela equação

$$Vq_v = Aq_a \tag{6}$$

Daqui obtemos

$$q_a = \frac{V}{A} q_v \quad \text{e} \quad q_v = \frac{A}{V} q_a \tag{7}$$

No caso do Sol, o calor produzido internamente à taxa q_v teve como primeiro efeito elevar a temperatura e a taxa q_a até que a equação (6) ficasse satisfeita. Atingiu-se assim o estado estacionário em que hoje se encontra o Sol, com a temperatura da superfície em 6 000° absolutos (= 5 727° centígrados). A taxa q_a é então dada pela primeira equação em (7).

Uma situação diferente ocorre quando encaramos a taxa q_a como fixada de antemão. Portanto, fixada também está a temperatura (da superfície) do corpo. É este o caso de um animal de sangue quente, como um rato, um beija-flor ou um elefante. A segunda equação em (7) permite então calcular a taxa q_v. Ora, quanto maior o animal, tanto menor será sua área A comparada com seu volume V, portanto tanto menor será o quociente A/V e a taxa q_v. Ao contrário, quanto menor for o animal, tanto maior será sua área A em relação ao seu volume V e, conseqüentemente, maior também será o quociente A/V e a taxa q_v.

Essas considerações explicam por que os animais, em geral, têm um metabolismo (medido pela taxa q_v) tão menos intenso quanto maior o seu tamanho. Um rato ou um beija-flor precisam consumir muito mais alimento em relarão a seus volumes e produzir calor a uma taxa q_v muito mais elevada que ui elefante, daí seus metabolismos serem muito mais intensos que o do elefante. Como se vê, a expressão "comeu feito um passarinho", na verdade, significa que comeu muito e não pouco!

A equação (6) tem uma interessante aplicação na tecnologia do radiador — o sistema de resfriamento do motor do automóvel. Os primeiros radiadores funcionavam à base de água sob pressão normal e, em conseqüência, a temperatura máxima que eles podiam atingir era 100°C. Isto fixava também o valor máximo da taxa q_a, que, como já notamos antes, é função crescente dessa temperatura (da superfície do radiador). Ora, não sendo possível aumentar mais essa taxa, para que o produto Aq_a fosse efetivamente igual a todo o calor Vq_v que devia ser extraído do motor (veja a equação (6)), restava o expediente de aumentar a área do radiador. Durante muito tempo, desde o início da tecnologia do automóvel, esta foi realmente a única coisa que se podia fazer. Mas a solução estava longe de ser satisfatória. Os motores "ferviam" e a água evaporava, exigindo que se adicionasse mais água. E como isto nem sempre era possível (numa estrada, por exemplo), muitas vezes o motorista tinha de parar e deixar o motor esfriar...

A necessidade de melhorar a eficiência do radiador tornava-se mais premente à medida que a eficiência dos motores exigia o aumento da rotação, o que implicava um aumento de produção interna de calor (membro esquerdo da equação (6)). Não sendo sempre possível aumentar a área A, era preciso aumentar a taxa q_a (veja o membro direito da equação (6)). A primeira providência nessa direção foi a de selar parcialmente o radiador. Isso permitia que a pressão interna da água atingisse um valor máximo superior à pressão normal (de 1 atmosfera). Em conseqüência, a água também atingia uma temperatura de ebulição superior aos 100°C, aumentando assim a taxa q_a (que é função crescente da temperatura). Atingidas essa pressão e temperatura máximas, a tampa do radiador, por um sistema de molas, se levantava, dando vazão ao excesso de pressão por um orifício lateral. Com esse sistema, que esteve em uso até uns dez anos atrás, o radiador trabalhava com uma folga de ar logo abaixo da tampa. Se "completado" com água até a tampa, o próprio funcionamento do radiador se encarregava de eliminar a água em excesso e recobrar a folga desejada. Muitas pessoas não sabiam disto e, em cada posto de gasolina por que passavam, "completavam" desnecessariamente a água do radiador...

Mais recentemente, muitos automóveis estão vindo com o radiador totalmente selado, o que permite um aumento ainda maior da temperatura T da água e, conseqüentemente, da taxa q_a(*), aumentando assim a eficiência do radiador. A válvula de escape foi substituída por um reservatório lateral, para onde se desvia o excesso de água proveniente da ebulição.

Muitas outras aplicações interessantes da razão da área para o volume de um corpo existem, algumas das quais já foram mencionadas na RPM 5, página 55, onde o leitor encontrará também referências ao interessante livro de H. Fremont e a um artigo do famoso geneticista J. B. S. Haldane.

(*) Pois esta, segundo a chamada *Lei de Stefan-Boltzman,* é proporcional a T^4.

Apêndice

A quantidade de calor produzida no interior do Sol é calculada em termos da quantidade de calor que de lá nos chega aqui na Terra. Esta, por sua vez, é medida por instrumentos especiais colocados em satélites, de sorte que tais medições se façam sem a interferência da atmosfera terrestre, que absorve e reflete parte da radiação solar. Antes da existência dos satélites, esses instrumentos eram levados às camadas superiores da atmosfera por foguetes ou balões. E antes dos foguetes ou balões, a radiação solar era calculada a partir de medidas feitas na superfície terrestre, levando em conta as parcelas absorvidas e refletidas pela atmosfera.

Pois bem, graças a essas medições, sabe-se que a quantidade de calor que chega à Terra por segundo e por cm^2 (perpendicularmente aos raios solares) é *q,* = 0,032 calorias. Sejam R o raio do Sol e D a distância da Terra *á* Terra ao Sol. Consideremos duas esferas concêntricas, de raios R e D, uma representando o Sol e a outra passando pela Terra.

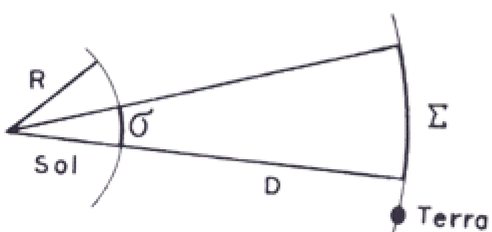

Fig. 3

Sejam *a* e E as áreas determinadas nessas esferas por um cone de vértice no centro das esferas, como ilustra a figura 3. Então, se q_a designa a quantidade de calorias que sai de cada cm^2 da superfície solar por segundo, teremos $q_a\sigma = q_t\Sigma$. Por outro lado, $\sigma R^2 = \Sigma / D^2$, e estas duas últimas equações nos dão

$$q_a = \frac{q_t \Sigma}{\sigma} = \frac{q_t D^2}{R^2}$$

Substituindo agora os valores

$$q_t = 0{,}032, \quad R = 6\ 953 \times 10^7 \text{ cm} \quad \text{e} \quad D = 1\ 495 \times 10^{10} \text{ cm}$$

obtemos:

ou seja, $q_a \approx 1500$.

Seja agora q_m o valor médio do número de calorias produzidas por cada

grama de massa solar por segundo. Evidentemente, como há equilíbrio entre o calor produzido internamente e o que sai através da superfície, teremos $Mq_m = Aq_a$, onde M é a massa do Sol, aproximadamente 2×10^{33} gramas. Obtemos então, com as devidas substituições,

$$q_m = \frac{q_a A}{M} = \frac{1\,500 \times 4\pi \times 6\,953^2 \times 10^{14}}{2 \times 10^{33}}$$

ou seja, $q_m \approx 4{,}5 \times 10^{-8}$.

Finalmente vamos calcular q_v, que é o valor médio de calorias produzidas em cada cm^3 do volume solar por segundo. Temos, em vista das segundas equações em (7) e (2),

$$q_v = q_a \frac{A}{V} = \frac{3q_a}{R} = \frac{3 \times 1\,500}{6\,953 \times 10^7}$$

donde o resultado desejado: $q_v \approx 6{,}5 \times 10^{-8}$.

SBM + USP + SPEC
A Revista do Professor de Matemática é uma publicação da Sociedade Brasileira de Matemática, SBM. A concepção da RPM, sua implantação e recursos iniciais foram gerados na SBM e são sócios da SBM que mais trabalham para a concretização de cada número da RPM. Desde o início, entretanto, a RPM contou com infra-estrutura física, técnica e administrativa do Instituto de Matemática e Estatística da Universidade de São Paulo, IME-USP, graças ao idealismo desinteressado dos seus dirigentes. Este apoio dado pelo IME-USP hoje se confirma através da assinatura de um convênio entre a SBM e a USP, com o objetivo de melhor servir ao leitor da RPM. Esperamos resolver com mais eficiência, daqui para frente, os problemas de atualização cadastral. Contamos para isto com a participação do assinante na comunicação pronta e completa (com etiqueta ou endereço e CEP antigos) de qualquer alteração de endereço, mesmo que seja somente uma atualização do CEP de sua cidade.

Nesta linha de boas novas, vale contar que assinamos um novo convênio, para sustento de mais três números da RPM, com o Subprograma "Educação para a Ciência", SPEC/PADCT. Trata-se de um subprograma gerido pela CAPES/MEC, graças ao qual o leitor tem recebido gratuitamente os números da RPM nestes últimos anos. Muitas outras atividades de melhoria do ensino de Ciências e Matemática no 1° e 2º graus têm sido apoiadas pelo SPEC.

A equipe da RPM agradece à USP e ao SPEC. Graças a esta colaboração, a SBM pode prosseguir na publicação da Revista do Professor de Matemática e distribui-la gratuitamente a milhares de professores de todo o Brasil.