

*Geraldo Ávila***Instituto de Matemática, UNICAMP
13081 Campinas, SP**

1. Considerações preliminares

Freqüentemente, o professor de Matemática se vê em dificuldades diante do aluno que deseja saber "pra que serve" o que está aprendendo, ou porque está estudando este ou aquele tópico. Nem sempre o professor tem uma resposta satisfatória e às vezes até encerra o assunto com uma justificativa nada convincente: "Você precisa aprender isto agora como embasamento para o que vai estudar mais tarde".

Em situações como essa, quem tem razão é o aluno: sua curiosidade por uma justificativa adequada das coisas que lhe são ensinadas é mais do que natural. Ele precisa de respostas certas, que satisfaçam sua curiosidade e estimulem sua mente inquisitiva. Só assim poderá o professor transformar o desinteresse do aluno pela Matemática numa ativa participação no aprendizado.

A Astronomia, que é a mais antiga das ciências, oferece excelentes exemplos de aplicações simples e interessantes de fatos geométricos elementares, que muito bem respondem ao "pra que serve" do aluno, estimulando ainda mais sua curiosidade científica e ajudando-o a bem entender o papel da Matemática como instrumento da ciência aplicada. Escrevemos sobre algumas dessas questões no primeiro número da RPM, onde mostramos como noções simples de semelhança e proporcionalidade permitiram aos sábios da Antiguidade encontrarem métodos de calcular os tamanhos da Terra, do Sol e da Lua e as distâncias entre esses astros. (Veja também os problemas 7, 8 e 9 sobre satélites em nosso artigo na RPM 9.) Muitos desses cálculos são acessíveis a alunos de 6.^a e 7.^a séries e servem como excelente motivação ao estudo de triângulos e círculos.

No presente artigo apresentaremos outros cálculos simples que nos dão os períodos de revolução dos planetas & suas distâncias ao Sol em termos da distância da Terra ao Sol, cálculos esses que são devidos, originariamente, a Copérnico.

2. O que fez Copérnico

A famosa obra de Nicolau Copérnico (1473-1543) sobre a teoria heliocêntrica do sistema solar foi publicada no ano de sua própria morte. Mas não teve repercussão imediata, embora se revelasse mais tarde como o impulso inicial mais importante para o desenvolvimento científico que persiste até os dias de hoje. Por isso mesmo historiadores da ciência adotam o ano de 1543 como o do início da ciência moderna.

Essa idéia de que o Sol está fixo no espaço e os planetas, inclusive a Terra, giram em torno dele, não era nova no tempo de Copérnico. Ela já havia sido proposta por Aristarco no 3.^o

século a.C. Mas não vingou, porque esbarrava em sérias dificuldades, uma das quais é uma objeção muito interessante, aparentemente levantada pela primeira vez por Hiparco (que viveu por volta de 150 a.C). Se a Terra girasse em torno do Sol — dizia Hiparco — a direção em que vemos uma estrela particular deveria variar durante o ano (fig. 1). E Hiparco, um eminente astrônomo, nunca constatara esse fenômeno em suas observações.

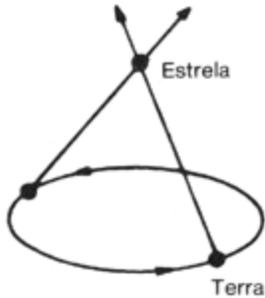


Figura 1

Para bem entender do que estamos falando, imagine um observador olhando fixamente para frente, movimentando a cabeça para a direita e para a esquerda. Ele notará que os objetos diante de si também se movimentam para a esquerda e para direita respectivamente. Os objetos "se deslocam" tanto menos quanto mais afastados estiverem do observador. Pois bem, era exatamente esse deslocamento que Hiparco esperava das estrelas, se é que a Terra estivesse mesmo dando voltas em torno do Sol. Ao que parece, Hiparco descartava como absurda a idéia de que as estrelas estivessem tão afastadas de nós a ponto de permanecerem praticamente fixas na abóbada celeste.

Hoje sabemos que as estrelas efetivamente "se deslocam" ao longo do ano, mas por ângulos ínfimos que sempre escaparam à capacidade de detecção dos instrumentos de Hiparco e de todos os astrônomos até muito recentemente. De fato, esse deslocamento das estrelas, chamado *paralaxe*, só foi medido pela primeira vez pelo astrônomo russo Struve em 1837 e pelo alemão Bessel em 1838. Essas descobertas mostraram que as estrelas estão a diferentes distâncias de nós, umas mais longe, outras mais perto. A estrela mais próxima é a Alfa Centauro, que é a segunda estrela mais brilhante à esquerda do Cruzeiro do Sul (fig. 2). Ela é, na verdade, um sistema triplo, isto é, são três estrelas agrupadas, das quais a mais próxima de nós está a 4,3 anos-luz* de distância. Ora, o Sol está a 8,3 minutos-luz da Terra, de sorte que



Figura 2

$$\frac{4,3 \text{ anos-luz}}{8,3 \text{ minutos-luz}} = \frac{4,3 \times 365 \times 24 \times 60}{8,3} = 272 \text{ 000.}$$

Isto mostra que essa estrela está distante de nós 272 000 vezes mais que o Sol. Assim, se o Sol estivesse a 1 metro de distância da Terra, a estrela mais próxima estaria a 272 km de distância! E Copérnico pensava que as estrelas estivessem 400 vezes mais longe de nós que o Sol...

Se a idéia heliocêntrica já havia ocorrido a Aristarco — chamado "o Copérnico da Antiguidade" — por que então a fama ficou com Copérnico? A explicação é simples: não basta uma hipótese, é preciso elaborar um sistema, construir uma teoria. Das idéias de Aristarco só nos chegaram uma breve referência num dos livros de Arquimedes.



Copérnico, por outro lado, deixou-nos um livro — *Sobre as revoluções das esferas celestes* — contendo um estudo que compatibiliza suas idéias com os dados de observação acumulados ao longo de milênios. E nesse arranjo de compatibilização ele teve de introduzir várias modificações em sua idéia original. Assim, por exemplo, embora o Sol seja considerado fixo, ele não ocupa os centros das órbitas dos planetas, nem esses centros são coincidentes (fig. 3). Isso foi necessário porque Copérnico mantinha a idéia de que os planetas eram dotados de velocidade uniforme em suas órbitas, o que não condizia com os dados de observação se as órbitas fossem concêntricas.

Veremos, a seguir, como Copérnico calculou os períodos de revolução do planetas e suas distâncias ao Sol, admitindo órbitas circulares centradas no Sc e movimentos uniformes dos planetas em suas órbitas.

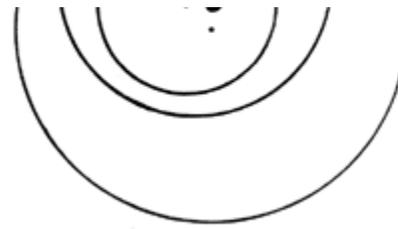


Figura 3

3. Período sideral e período sinódico

Consideremos o planeta Marte, que é um planeta superior, isto é, *cuja* órbita abarca a órbita da Terra. Sejam T e M as posições da Terra e de Marte, respectivamente, quando ambos se encontram de um mesmo lado do Sol S e com ele alinhados (fig. 4). Nesse caso, diz-se que Marte está em *oposição* (ao Sol relativamente à Terra). Quando isso acontece, Marte é visto no zênite à meia-noite; ele nasce quando o Sol se põe e se põe ao nascer do Sol. Por observações feitas, desde a Antiguidade, sabe-se que Marte volta a ficar em oposição a cada 780 dias. Esse é o período de revolução do planeta em torno da Terra, chamado *período sinódico*. O período de revolução do planeta em torno do Sol é chamado *período sideral*.

Para calcularmos esse último período, observemos primeiro que a velocidade angular de Marte é menor que a da Terra — um fato que se constata po observações simples. Então, a partir de uma oposição, a Terra vai ganhando dianteira sobre Marte e esse planeta voltará a ficar novamente em oposição quando a dianteira da Terra sobre ele for de 360° , isto é, uma volta completa. Ora em 780 dias, que é o tempo que decorre entre duas oposições sucessivas, a Terra terá dado duas voltas em torno do Sol e se deslocado ainda, ao longo d um arco $\widehat{TT'}$ (fig. 4), durante os 50 dias restantes (pois $780 = 2 \times 365 + 50$) Devido à uniformidade do movimento da Terra, teremos a proporção:

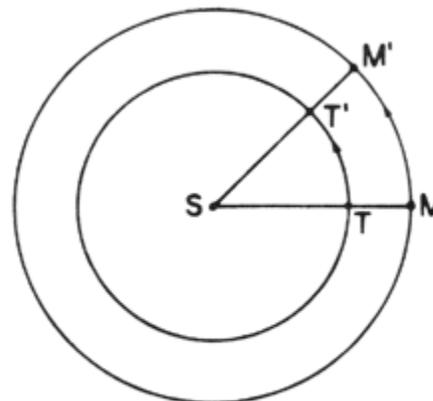


Figura 4

$$\frac{\widehat{TT'}}{50} = \frac{360}{365} \therefore TT' = 49^\circ$$

Durante os mesmos 780 dias, Marte completou uma volta em torno do Sol mais o arco $\widehat{MM'} = \widehat{TT'} = 49^\circ$. Então, se P é o período sideral de Marte teremos a proporção:

$$\frac{P}{360} = \frac{780}{360 + 49} \therefore P \approx 687 \text{ dias}$$

Com esse mesmo raciocínio, Copérnico calculou os períodos siderais dos demais planetas superiores conhecidos em seu tempo, Júpiter e Saturno. Sugerimos que o leitor faça esses cálculos, sabendo que os períodos sinódicos desses planetas são 399 dias e 378 dias respectivamente. Os períodos siderais correspondentes serão, aproximadamente, 11,8 anos e 29,5 anos respectivamente.

Um raciocínio parecido permite calcular os períodos siderais dos planetas inferiores, o que faremos no Apêndice adiante.

4. Distância de Marte ao Sol

O conhecimento do período sideral de um planeta superior é essencial para o cálculo de sua distância ao Sol, como veremos agora, no caso de Marte. Imaginemos, como ilustra a fig. 5. que Marte em M esteja em oposição, em a Terra estando em T e o Sol S . Sabemos, por dados de observação, que 106 dias após, a Terra e Marte se encontrarão em posições T' e M' respectivamente, tais que $\widehat{ST'M'} = 90^\circ$. Durante esse tempo, o ângulo a , descrito pela Terra, é de aproximadamente 105° , como é fácil calcular (pois $a: 106 = 360^\circ : 365$). Quanto a Marte, ele terá descrito um ângulo $\beta \approx 56^\circ$, pois

$$\frac{\beta}{106} = \frac{360^\circ}{687}$$

Como consequência, $\widehat{T'SM'} = 105 - 56 = 49^\circ$. Finalmente, o triângulo retângulo $ST'M'$ nos dá:

$$SM' = \frac{ST'}{\cos 49^\circ} \approx \frac{ST'}{0,65606} \approx 1,5 ST'$$

Fica assim calculada a distância de Marte ao Sol como 1,5 vezes a distância da Terra ao Sol.

Com o mesmo raciocínio Copérnico calculou as distâncias de Júpiter e Saturno ao Sol. Notamos, mais uma vez, que os cálculos dessas distâncias dependem do conhecimento dos períodos siderais dos planetas, os quais são conceitos ligados à hipótese heliocêntrica de Copérnico. Essas distâncias, portanto, só podiam ser calculadas por Copérnico ou pelos sábios que vieram depois. Pode ser que Aristarco as tenha calculado na Antiguidade,

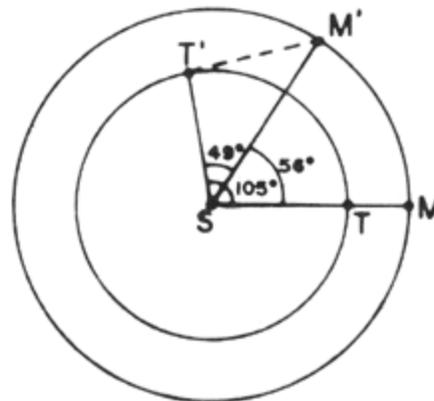


Figura 5

mas disso nada sabemos porque muitos dos seus escritos não chegaram até nós.

5. As distâncias de Mercúrio e Vênus ao Sol

Contrariamente ao que se passa com os planetas superiores, Marte, Júpiter e Saturno, o cálculo das distâncias de Mercúrio e Vênus ao Sol é muito simples e não depende do conhecimento de seus períodos siderais. Estes são os *planetas inferiores*, assim chamados porque suas órbitas são abarcadas pela órbita da Terra (fig. 6). Em consequência, o afastamento angular desses planetas em relação ao Sol, dado pelo ângulo \widehat{STP} e chamado a *elongação* do planeta P , nunca ultrapassa um certo valor máximo, inferior a 90° . É por isso que Mercúrio e Vênus nunca são visíveis no zênite, por onde eles só podem passar durante o dia. Eles são visíveis ao romper da manhã ou ao cair da noite, já que nunca se afastam muito do Sol.

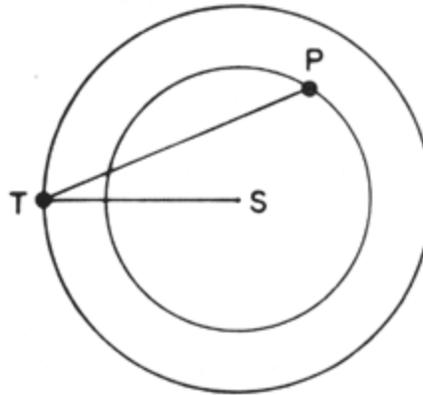


Figura 6

Esses dois planetas se situam em extremos opostos, no que diz respeito à visibilidade: Vênus' é muito fácil de ser visto, seja como "estrela matutina" ou "estrela vespertina"; ele é o astro mais conspícuo, e mais brilhante no céu depois do Sol e da Lua. Mercúrio é diferente: estando muito perto do Sol, não é fácil localizá-lo, já que só será visto quase ao raiar do Sol, ou pouco depois do Sol poente, de preferência quando em elongação máxima, que

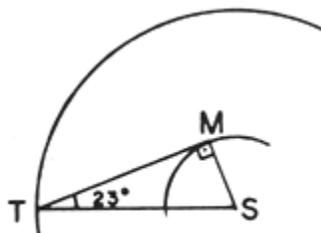


Figura 7

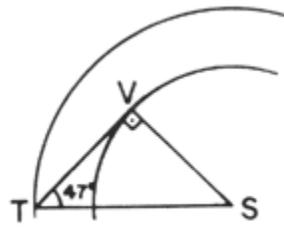


Figura 8

é, em média, de 23° . Quando isso acontece (fig. 7) o triângulo STM é retângulo em M , logo,

$$SM = ST \cdot \text{sen } 23^\circ \approx 0,39 ST.$$

Vemos assim que Mercúrio dista do Sol 0,39 vezes a distância da Terra ao Sol. O planeta Vênus, por sua vez, tem elongação que atinge valor máximo de 47° . Portanto, sua distância ao Sol é (fig. 8)

$$SV = ST \cdot \text{sen } 47^\circ \approx 0,73 ST.$$

6. Conclusão

Os cálculos aqui apresentados são uma pequena amostra do trabalho de Copérnico na elaboração de sua teoria heliocêntrica. Usar a teoria para fazer previsões sobre o movimento dos planetas e comparar essas previsões com o que revelavam os dados da observação era o teste necessário para comprovar ou refutar a teoria. Esse teste foi revelando discrepâncias inaceitáveis e exigindo ajustes nas hipóteses. Já mencionamos um desses ajustes, que foi o de deslocar o Sol dos centros das órbitas dos planetas. Mas as modificações, ainda nas mãos de Copérnico, não pararam aí. As mais espetaculares mudanças viriam com Kepler, cerca de 70 anos após a morte de Copérnico. Só então emergiria uma teoria definitiva do sistema solar e que iria encontrar forma acabada na teoria da gravitação de Newton. Pretendemos falar sobre isso num futuro artigo.

Apêndice

Mostraremos, aqui, como se pode calcular o período sideral de um planeta inferior como Mercúrio. Imaginemos o planeta em elongação máxima a oeste, na posição M , quando a Terra se encontra em T_1 (fig. 9). Sabemos, por dados de observação, que dali a 58 dias ele estará novamente em elongação máxima, desta vez ao leste, na posição M_2 . Nesses 58 dias a Terra

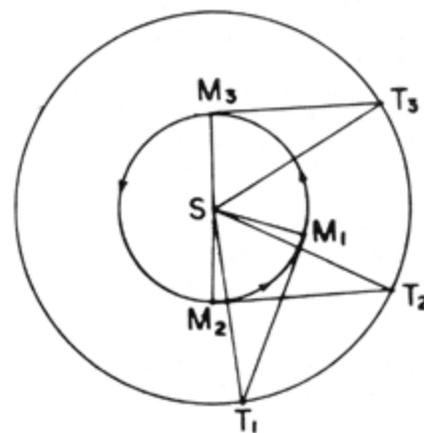


Figura 9

terá coberto um arco $\widehat{T_1 T_2} = 57$, como é fácil calcular. Mais 58 dias e voltaremos a ver Mercúrio em elongação máxima a oeste, na posição M_3 , com a Terra em T_3 . Assim, em 116 dias ($58 + 58$) a Terra descreverá o arco $\widehat{T_1 T_3} = 2 \times 57 = 114^\circ$; e Mercúrio, descreverá uma volta completa em torno do Sol, mais o arco $\widehat{M_1 M_3} = \widehat{T_1 T_3} = 114^\circ$, um total de 474° . Se P é o período sideral de Mercúrio teremos

$$\frac{P}{360} = \frac{116}{474} \therefore P \approx 88 \text{ dias}$$

O procedimento é análogo para Vênus, que tem um período sideral de 225 dias.

* Um *ano-luz* é a distância percorrida pela luz em um ano.