Ainda Sobre o Teorema de Euler para Poliedro Convexos

RPM 05

Elon Lages Lima
Instituto de Matemática Pura e Aplicada
Estr. D. Castorina, 110
22460 – Rio de Janeiro – RJ

1 – Introdução

O número 3 da RPM traz um artigo do Professor Zoroastro Azambuja Filho, com uma demonstração do teorema de Euler para poliedros convexos. Lendo-o, ocorreu-me que talvez fosse interessante para os leitores desta Revista conhecer a prova desse teorema dada por A.M.Legendre, onde se apresenta, pela primeira vez, a idéia central do argumento exposto pelo Prof. Azambuja, baseado na soma dos ângulos de um polígono. A demonstração de Legendre, embora menos elementar, pois usa a fórmula da soma dos ângulos internos de um triângulo esférico, é por isso mais educativa, já que algumas noções básicas a respeito da Geometria Esférica constituem um assunto instrutivo e belo, ao alcance dos professores de Matemática no 2º. grau.

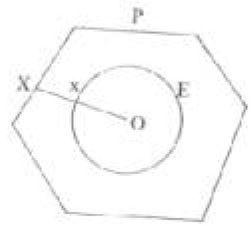
Adrien Marie Legendre (1752 + 81 = 1833) foi um notável matemático francês. Dentro de uma tradição que muitos dos seus compatriotas ainda seguem, sua destacada posição científica não o impediu de se interessar pelo ensino elementar. Com efeito, uma de suas obras mais conhecidas é o livro “Éléments de Géometrie”, publicado pela primeira vez em 1794, traduzido em inglês, alemão, italiano, romeno e até mesmo português. A biblioteca do IMPA possui um exemplar da 14ª. edição, impresso em Paris em 1846, treze anos depois da morte do autor.

A Geometria de Legendre, que tanto ajudou no treinamento matemático de sucessivas gerações em vários países, é um livro fascinante pela clareza, simplicidade e originalidade de apresentação. Além disso, suas edições consecutivas contam a história das repetidas tentativas de seu autor, buscando demonstrar o postulado das paralelas. Mas esse é outro assunto. Da Geometria de Legendre, interessa-nos aqui e agora a demonstração do Teorema de Euler para poliedros convexos. Foi a primeira demonstração inteligível desse teorema a ser publicada. Creio que muitos de nós nos deleitaremos com a elegância e a beleza do raciocínio nela contido, o qual passaremos a expor.

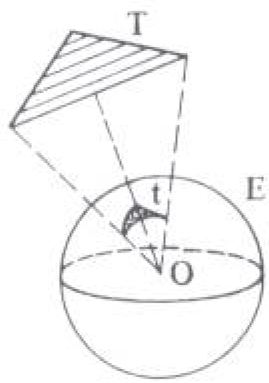
2 – Demonstração

Seja P um poliedro convexo, com V vértices, A arestas e F faces. Por conveniência, suporemos que as faces de P são triângulos. (Se isto não for verdade, por meio de diagonais decomporemos cada face em triângulos, sem alterar o número V – A + F. Com efeito, cada vez que traçamos uma diagonal numa face, o número V não se altera, enquanto cada um dos números A e F aumenta de uma unidade, esses aumentos se cancelando na expressão V – A + F.)

Consideremos uma esfera E, de raio r, cujo centro O é um ponto situado no interior do poliedro P. Projetando radialmente o poliedro P sobre a esfera E, obtemos uma decomposição de E em triângulos esféricos, dispostos de modo semelhante à situação das faces de P. Em particular, a esfera E fica recoberta por F triângulos esféricos, com um total de A lados e V vértices.

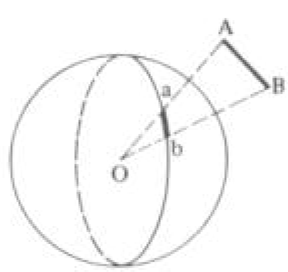


O ponto x da esfera E é a projeção radial do ponto X do poliedro P.

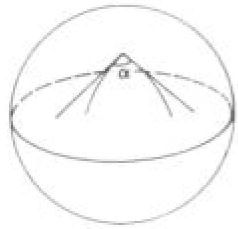


O triângulo esférico t, sobre a esfera E, é a projeção radial do triângulo T.

Esclareçamos que uma figura sobre a esfera E chama-se um *triângulo esférico* quando seus três lados são arcos de círculos máximos (todos menores do que uma sem-circunferência). Note que a interseção E $\cap$ L de uma esfera E com qualquer plano L que a encontre, é um círculo (ou um ponto, no caso excepcional em que o plano L é tangente à esfera) quando o plano L passa pelo centro da esfera E, a interseção E $\cap$ L é chama-se um *círculo máximo*. A projeção radial de um segmento de reta AB é um arco de círculo máximo ab sobre a esfera E (salvo no caso em que A, B e o centro O da esfera estão na mesma reta). Com efeito, A, B e O determinam um plano, que corta a esfera segundo um círculo máximo do qual ab é um arco.



Quando dois arcos de círculos máximos têm uma extremidade comum, o ângulo a formado por esses arcos é, por definição, o ângulo entre as semi-retas tangentes a esses arcos.



O geômetra francês Albert Girard demonstrou (em 1629) que se os ângulos a, b, g de um triângulo esférico forem medidos em radianos, a soma a + b + g é dada pela fórmula

$$\alpha + \beta + \gamma = \pi + \frac{a}{r^2},$$

onde a é a área do triângulo e r é o raio da esfera. Esta fórmula é o fato básico no qual se fundamentou Legendre para demonstrar o Teorema de Euler. Na seção seguinte provaremos a fórmula de Girard. Agora vamos mostrar como o Teorema de Euler resulta dela, de forma simples e elegante.

Voltemos à nossa decomposição da esfera E em F triângulos esféricos, com um total de A lados e V vértices. Para cada um desses triângulos t, vale a fórmula de Girard $s_t = \pi + a_t / r^2$, onde s_t é a soma dos ângulos e a_t é a área do triângulo esférico t. Temos ao todo F igualdades como esta acima. Somando-as todas vem:

$$\sum s_t = \pi \cdot F + \frac{\sum a_t}{r^2}.$$

Ora, $\sum s_t = 2\pi . V$ porque a soma dos ângulos em torno de cada vértice é igual a 2π. Além disso, $\sum a_t = 4\pi r^2$ = área da superfície esférica E. Portanto a igualdade acima se escreve $2\pi . V = \pi . F + 4\pi r^2/r^2$. Simplificando, temos 2V = F + 4, isto é:

$$2V – F = 4 \ (*)$$

Para obter uma relação entre F (número de triângulos esféricos) e A (número total de lados desses triângulos), observamos que todo triângulo tem 3 lados, e toda aresta é lado de 2 triângulos, logo 3F = 2A, ou seja:

$$F = 2A – 2F.$$

Substituindo F por este valor na igualdade (*), vem 2V – 2A + 2F = 4, donde

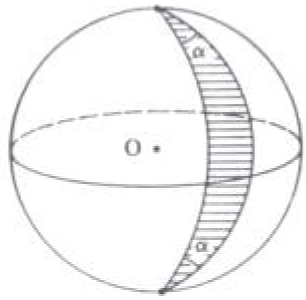
$$V – A + F = 2.$$

que é a relação de Euler.

3 – Soma dos ângulos internos de um triângulo esférico

Seja E uma esfera de centro O e raio r, a qual permanecerá fixa no decorrer desta seção.

Um *fuso* é uma região da esfera compreendida entre dois círculos máximos. Esses círculos têm dois pontos (diametralmente opostos) em comum, chamados os vértices do fuso. O *ângulo* do fuso é, por definição, o ângulo a entre os dois círculos máximos que constituem os lados do fuso.



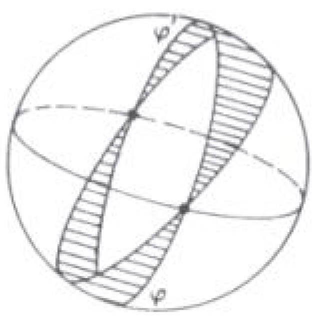
Um fuso de ângulo α.

Um fuso de ângulos $\alpha = \pi$ é um hemisfério (cuja área é $2\pi r^2$). Um fuso de ângulo $\frac{\pi}{2}$ ocupa ¼ da esfera, de modo que sua área é πr^2 de um modo geral a área de um fuso é proporcional ao seu ângulo.

Assim sendo, se o ângulo do fuso mede α radianos, a área desse fuso é igual a $2\alpha \cdot r^2$.

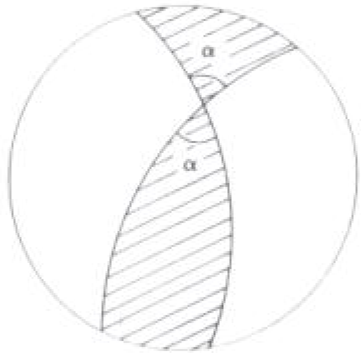
Dado um ponto qualquer x na esfera, seu antípoda x' é, por definição, o único ponto da esfera tal que o segmento de reta xx' contém o centro O.

Dado um fuso φ na esfera, o conjunto formado pelos antípodas dos pontos de φ é ainda um fuso φ', chamado o fuso antípoda de φ . A reunião $\Phi = \varphi \cup \varphi'$ chama-se um *fuso completo*.



Um fuso completo.

Teorema. Seja Φ *um fuso completo, cujo ângulo mede* α *radianos. Qualquer plano que passe pelo centro da esfera a decompõe em dois hemisférios* H e H'. *As partes* R, R' *do fuso completo* Φ *contidas em cada um desses hemisférios têm a mesma área* $2\alpha \cdot r^2$.



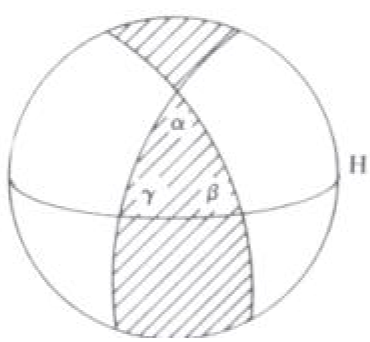
A região hachurada é a parte de um fuso completo contida num hemisfério arbitrário. Sua área é $2\alpha \cdot r^2$.

Demonstração: Consideremos a função f: E → E, que transforma cada ponto $x \in E$ em seu antípoda f(x) = x'. Esta função tem as seguintes propriedades: 1ª.) se x é um ponto do hemisfério H, seu antípoda x' = f(x) pertence ao hemisfério oposto H'; 2ª.) se x é um ponto do fuso completo Φ , seu antípoda x' = f(x) ainda pertence a Φ ; 3ª.) dada qualquer região R na esfera, a região antípoda R' = f (R), formada pelos pontos antípodas dos pontos de R, tem a mesma área que R. Portanto, se chamarmos de R a parte do fuso completo Φ situada no hemisfério H, veremos que sua região antípoda R' é a parte de Φ situada no hemisfério H' e que área de Φ = (área de R) + (área de R') = 2 . (área de R), logo área de R = $2\alpha \cdot r^2$.

Agora podemos demonstrar o teorema de Girard.

Teorema. Se a, b e g são os ângulos internos de um triângulo esférico, medidos em radianos, então $\alpha + \beta + \gamma = \pi + \frac{a}{r^2}$, *onde* a *é a área desse triângulo.*

Demonstração: Consideremos um hemisfério H que contenha o triângulo dado. Prolongando, nos dois sentidos, os lados que formam o ângulo a, até encontrarem o bordo do hemisfério H, obtemos uma região R_a Ì H, cuja área mede $2\alpha \cdot r^2$, de acordo com o teorema anterior.



A parte hachurada é a região R_a.

Fazendo o mesmo com os ângulos β e γ, obtemos regiões R_β e R_γ, cujas áreas medem respectivamente $2b \cdot r^2$ e $2g \cdot r^2$. A reunião dessas 3 regiões é o hemisfério H, com o triângulo dado contado três vezes (duas vezes mais do que devia). Segue-se que a soma das áreas das regiões R_a, R_b e R_g é igual à área do hemisfério H mais duas vezes a área a do triângulo dado, ou seja, $2\alpha \cdot r^2 + 2b \cdot r^2 + 2g \cdot r^2 = 2\pi \cdot r^2 + 2a$, pois a área de H é $2\pi r^2$. Simplificando, vem $\alpha+\beta+\gamma=\pi+\frac{a}{r^2}$, como queríamos demonstrar.

A fórmula de Girard mostra que a soma dos ângulos internos de um triângulo esférico é sempre superior a dois ângulos retos.

A diferença $\frac{a}{r^2}=\alpha+\beta+\gamma-2$ reto é chamado o "excesso esférico". Para um triângulo de área muito pequena, o excesso esférico é insignificante. Por outro lado, se tomarmos um triângulo esférico na superfície da terra com um lado sobre o equador e um vértice no pólo norte, os outros dois lados serão arcos de meridianos, logo dois ângulos serão retos. Se a base for um arco de um quarto do equador, os três ângulos desse triângulo serão todos retos. O leitor pode imaginar triângulos esféricos com $\alpha + \beta + \gamma$ tão próximo de 6 ângulos retos quanto ele deseje. Basta tomar os três vértices eqüidistantes e bem próximos do equador.

Resulta ainda da fórmula de Girard que se s e t são triângulos situados sobre a mesma esfera e os ângulos de s são iguais aos de t então s e t possuem a mesma área. Na realidade, pode-se provar bem mais: se os ângulos de s são iguais aos de t (sempre supondo s e t sobre a mesma esfera) então os lados de s também são iguais aos de t. Isto é bem diferente da Geometria Plana. Em particular, não há semelhança de triângulos sobre a mesma esfera, salvo quando a razão de semelhança é igual a 1. (Esta última afirmação também pode ser constatada se lembrarmos que dois arcos de círculo semelhantes subentendem o mesmo ângulo central e a razão de semelhança) é a mesma razão entre os raios dos círculos a que pertencem, portanto arcos de grande círculo sobre a mesma esfera só podem ser semelhantes quando têm o mesmo comprimento.

Soluções dos problemas da Olimpíada Internacional – 84 (pág. 53)

Solução do problema "mais fácil"

1. Seja $f(x,y,z) = xy + yz + xz - 2xyz$

$f(x,y,z) = (x + y + z)(xy + yz + xz - 2xyz) = xyz + x^2(y + z) + y^2(x + z) + z^2(x + y) \leqslant 0$

2. Sem perda de generalidade, supor $x \leqslant y \leqslant z$

Caso 1: $x > \frac{1}{3}, y \leq \frac{1}{3}, z < \frac{1}{3}$

Então $y = \frac{1}{3} - e;\ \ z = \frac{1}{3} - d;\ \ x = \frac{1}{3} + e + d,\ \ d \geq e > 0$

$$f(x,y,z) = \ldots = \frac{7}{27} - \frac{e^2}{3} - \frac{ed}{3} - \frac{d^2}{3} - 2e^2d - 2ed^2 < \frac{7}{27}$$

Caso:2 $x > \frac{1}{3},\ \ y > \frac{1}{3},\ \ z < \frac{1}{3}$

Então $x = \frac{1}{3} + e;\ \ y + \frac{1}{3} + d;\ \ z = \frac{1}{3} - e - d;\ \ e + d < \frac{1}{3},\ \ e \geq d > 0$

$$f(x,y,z) = \ldots \frac{7}{27} - \frac{1}{3}(d^2 + e^2 + ed) + 2ed(e+d) < \frac{7}{27} - \frac{1}{3}(d^2 + e^2 + ed) + \frac{2ed =}{3}$$

$$= \frac{7}{27} - \frac{1}{3}\left[(e-d)^2 + ed\right] < \frac{7}{27}.$$