Definição 1. Dizemos que A é uma K-álgebra se

(i) é um K-espaço vetorial

(ii) possui uma aplicação bilinear $\varphi: A \times A \to A$

~~Definição~~

Definição 2. Uma álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ sobre $\mathbb{C}$ é uma álgebra cuja aplicação bilinear $[\,,\,]: \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ (chamado colchete de Lie) satisfaz as condições:

(i) $[x, x] = 0$ para todo $x \in \mathfrak{g}$ (anti-simetria).

(ii) $[x,[y,z]] + [y,[z,x]] + [z,[x,y]] = 0$ para todo x, y, z (identidade de Jacobi).

Exemplo. Seja V um espaço vetorial sobre $\mathbb{C}$. Considere End V = $\{T: V \to V$ transformações lineares$\}$. Com a aplicação $[x,y] = xy - yx$ temos uma álgebra de Lie de $\mathbb{C}$, a qual denotamos por $\mathfrak{gl}(V)$. (e chamaremos álgebra linear geral)

Se $\dim_{\mathbb{C}} V = n$, então é conveniente utilizar a identificação entre $\mathfrak{gl}(V)$ e o espaço das matrizes $n \times n$ sobre $\mathbb{C}$ e neste caso a álgebra será denotada por $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{C})$.

Outros exemplos:

a) $\mathfrak{sl}_n(\mathbb{C}) = \{x \in \mathfrak{gl}_n(\mathbb{C}) \mid tr(x) = 0\}$ (álgebra linear especial)

Definição 3. Um ideal H de uma álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ é uma subálgebra com a propriedade $[\mathfrak{g}, H] \subseteq H$.

Objetivo 1. Definir subálgebra de Borel

Definição 4. Uma série derivada é uma sequência decrescente de ideais de uma álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ definida por recorrência da seguinte forma:

$$\mathfrak{g}^{(1)} = \mathfrak{g}' = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$$

$$\mathfrak{g}^{(i)} = [\mathfrak{g}^{(i-1)}, \mathfrak{g}^{(i-1)}], \text{ para } i \geq 2.$$

Definição 5. Uma álgebra de Lie é chamada solúvel se a sua série derivada estaciona, isto é, se $\exists\, N \in \mathbb{N}$ tq

$$\mathfrak{g}^{(N)} = 0$$

Definição 6. O radical $rd(\mathfrak{g})$ é o ideal maximal solúvel. (Logo $\mathfrak{g}$ é solúvel sse $rd(\mathfrak{g}) = \mathfrak{g}$)

Observação. $\mathfrak{g}$ é semi-simples se não possui ideais solúveis (isto é, se $\mathfrak{g} \neq 0$ e $rd(\mathfrak{g}) = 0$).

Definição 7. Uma subálgebra de Borel β de uma álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ é uma subálgebra maximal solúvel.

Objetivo 2. Definir subálgebra de Cartan

Definição 8. Uma série central descendente de uma álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ é uma sequência de ideais definida por recorrência da seguinte forma:

$$\mathfrak{g}^1 = \mathfrak{g}' = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$$

$$\mathfrak{g}^i = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}^{i-1}], \quad \text{para } i \geq 2$$

Definição 9. Uma álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ é chamada nilpotente se a sua série central descendente estaciona, isto é, $\exists\, N \in \mathbb{N}$ tq

$$\mathfrak{g}^N = 0$$

Observação. Como $\mathfrak{g}^{(i)} \subset \mathfrak{g}^i$ então nilpotência $\Rightarrow$ solubilidade, mas a recíproca não é sempre verdadeira. Uma álgebra é solúvel $\Longleftrightarrow$ sua álgebra derivada é nilpotente. (??? $\to$ Como mostrar isto??)

Definição 10. O normalizador de uma subálgebra H de uma álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ é a seguinte subálgebra:

$$N_{\mathfrak{g}}(H) = \{ x \in \mathfrak{g} \mid [x, H] \subseteq H \}$$

Definição 11. Uma subálgebra de Cartan H de uma álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ é uma subálgebra nilpotente que é igual ao seu normalizador em $\mathfrak{g}$

Objetivo 3. Usando os conceitos de representação e de $\mathfrak{g}$-módulos vistos na aula do Slava queremos definir espaço de peso, módulo de peso máximo, até definir módulo de Verma.

Definição 12. Seja V um H-módulo onde H é uma subálgebra de Cartan de uma álgebra de Lie $\mathfrak{g}$. Consideramos o seguinte subespa de V para $\alpha \in H^*$:

$$V_\alpha = \{ v \in V \,/\, h.v = \alpha(h)\, v, \ \forall h \in H \}$$

Se $V_\alpha \neq \{0\}$ então V_α é chamado de espaço de peso e α um peso de V. Dizemos que V admite uma decomposição em espaços de peso se

$$V = \bigoplus_{\alpha \in \Phi} V_\alpha$$

onde Φ denota o conjunto de todos os pesos de V.

Observação. Quando $V = \mathfrak{g}$ uma álgebra de Lie, em relação a sub álgebra de Cartan H de L, os pesos são chamados de raízes e $\mathfrak{g}$ pode decomposta em espaços de raízes

$$L_\alpha = \{ x \in L \,/\, [h, x] = \alpha(h)\, x, \ \forall h \in H \}$$

e

$$L = \bigoplus_{\alpha \in \Phi} L_\alpha$$

onde $L_0 = H$. Neste caso, o conjunto Φ é chamado de sistema de ra

Definição 13. Seja $\mathfrak{g}$ uma álgebra de Lie sobre $\mathbb{C}$ (não necessariamente de dimensão finita). Uma decomposição triangular de $\mathfrak{g}$ consiste de uma subálgebra abeliana $H \neq (0)$ (H abeliana significa $[H, H] =$ e duas subálgebras $\mathfrak{g}_+$ e $\mathfrak{g}_-$ tal que

(i) $L = L_- \oplus H \oplus L_+$;

(ii) $L_+ \neq (0)$, $[H, L_+] \subset L_+$ e L_+ admite uma decomposição em espaços de peso relativo a H com pesos $\alpha \neq 0$ pertencendo ao sub grupo aditivo livre $Q_+ \subset H^*$;

(iii) Existe uma anti-involução σ (isto é, anti-automorfismo de período 2) sobre $\mathfrak{g}$ tal que

$$\sigma(\mathfrak{g}_+) = \mathfrak{g}_-,$$

$$\sigma|_{\mathcal{H}} = id_{\mathcal{H}};$$

(iv) Existe uma base $\{\alpha_j\}_{j\in J}$ de Q_+ consistindo de elementos linearmente independentes de $\mathcal{H}^*$. Em particular, Q_+ consiste de todas as somas finitas não-nulas da forma

$$\sum_{j\in J} m_j \alpha_j,$$

para $m_j \in \mathbb{N}$.

Definição 14. Sejam V e W dois espaços vetoriais sobre $\mathbb{C}$ e para o produto cartesiano $V\times W = \{(v,w) \mid v\in V,\ w\in W\}$ considere o subespaço $I = \langle (v_1+v_2, w) - (v_1,w) - (v_2,w);\ (v, w_1+w_2) - (v,w_1) - (v,w_2);\ (\alpha v, w) - (v, \alpha w)\rangle$

para $v, v_1, v_2 \in V$, $w, w_1, w_2 \in W$ e $\alpha\in\mathbb{C}$. Então

$$V\otimes W := (V\times W)/I$$

é o produto tensorial entre V e W.

Seja $T(V)$ dada por

$$T(V) := \mathbb{C}\oplus V\oplus V^{\otimes 2}\oplus\ldots\oplus V^{\otimes n}\oplus\ldots$$

onde $V^{\otimes n} := \underbrace{V\otimes\ldots\otimes V}_{n \text{ vezes}}$

Chamamos tal $T(V)$ de álgebra tensorial, com produto $(v_1\otimes\ldots\otimes v_n)(w_1\otimes\ldots$
$= (v_1\otimes\ldots\otimes v_n\otimes w_1\otimes\ldots\otimes w_m) \in V^{\otimes(n+m)}$

Definição 15. Uma álgebra envelopante universal de uma álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ é um par (U, Ψ) onde U é uma álgebra associativa com unidade sobre $\mathbb{C}$, $\Psi: \mathfrak{g}\to U$ é uma aplicação linear satisfazendo

(1) $\quad \Psi([x,y]) = \Psi(x)\Psi(y) - \Psi(y)\Psi(x)$

para todo $x, y\in\mathfrak{g}$ e para alguma $\mathbb{C}$-álgebra V com unidade e alguma aplicação linear $\phi: \mathfrak{g}\to V$ satisfazendo (1), existe um único h morfismo de álgebras $i : V \to U$, (com $i(1_V) = 1_U$) tal que $i \circ \psi = \phi$.

Observação 1. Seja L uma álgebra de Lie. Então L admite uma álgebra envolvente universal.

Sejam $T(\mathfrak{g})$ a álgebra tensorial de $\mathfrak{g}$ e J o ideal bilateral de $T(\mathfrak{g})$ gerado por todos os elementos da forma $x \otimes y - y \otimes x - [x, y]$, com $x, y \in \mathfrak{g}$. Seja

$$U(\mathfrak{g}) := T(\mathfrak{g}) / J$$

e $\pi : T(\mathfrak{g}) \to U(\mathfrak{g})$ o homomorfismo canônico. Defina

$$i := \pi|_{\mathfrak{g}} : \mathfrak{g} \to U(\mathfrak{g}).$$

Então $(U(\mathfrak{g}), i)$ é a álgebra envolvente universal de $\mathfrak{g}$.

Teorema de Poincaré - Birkhoff - Witt (PBW). Seja $\mathfrak{g}$ uma álgebra de Lie com uma $\mathbb{C}$-base $\{x_j / j \in J\}$ indexados por um conjunto J totalmente ordenado. Seja (U, i) a álgebra envolvente universal de $\mathfrak{g}$. Então a família de elementos

$$i(x_{j_1})\, i(x_{j_2}) \ldots i(x_{j_n})$$

com $j_1 \leq j_2 \leq \ldots \leq j_n$, $n \in \mathbb{Z}_+$, juntamente com 1, forma uma base do espaço U.

Seja $\mathfrak{g}$ álgebra de Lie com decomposição triangular

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_- \oplus \mathcal{H} \oplus \mathfrak{g}_+$$

Usando o Teorema PBW temos a correspondente decomposição da álgebra envolvente universal:

$$U(\mathfrak{g}) = U(\mathfrak{g}_-) \otimes U(\mathcal{H}) \otimes U(\mathfrak{g}_+)$$

Definição 16. Um $\mathfrak{g}$-módulo V é chamado módulo de peso máximo $\Lambda \in \mathcal{H}^*$ se existe um $v_\Lambda \in V$ não-nulo tal que

$$\mathfrak{L}_+ (v_\Lambda) = 0 \; ; \quad h(v_\Lambda) = \Lambda(h)\, v_\Lambda \, , \quad \forall\, h \in \mathcal{H}$$

$$\text{e} \quad U(\mathfrak{g})(v_\Lambda) = V.$$

Chamamos tal v_Λ de vetor de peso máximo.

Definição 17. Um $\mathfrak{g}$-módulo $M(\Lambda)$ com peso máximo Λ é chamado módulo de Verma se todo $\mathfrak{g}$-módulo com peso máximo Λ é um quociente de $M(\Lambda)$.

Sejam A uma álgebra, V um A-módulo à direita e W um A-módulo à esquerda. Consideramos o ideal K de $V \otimes_{\mathbb{C}} W$ gerado pelos elementos da forma $v.a \otimes w - v \otimes a.w$ para $v \in V$, $w \in W$ e $a \in A$. Definimos

$$V \otimes_A W := (V \otimes_{\mathbb{C}} W)/K.$$

Teorema. Seja $\mathfrak{g}$ uma álgebra de Lie com decomposição triangular $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_- \oplus \mathcal{H} \oplus \mathfrak{g}_+$. Então, para todo $\lambda \in \mathcal{H}^*$, $\mathfrak{g}$ possui um módulo de Verma $M(\lambda)$ com peso máximo λ.

Dem. Seja $B = \mathcal{H} + \mathfrak{g}_+$ subálgebra de Borel de $\mathfrak{g}$. Seja $\mathbb{C}v$ um espaço vetorial unidimensional que pode ser transformado em B-módulo definindo-se:

$$\mathfrak{L}_+ v = 0 \quad \text{e} \quad h.v = \lambda(h)\, v, \quad \text{para todo } h \in \mathcal{H}.$$

Agora $\mathbb{C}v$ é um $U(B)$-módulo à esquerda. Então

$$M(\lambda) := U(\mathfrak{g}) \otimes_{U(B)} \mathbb{C}v$$

é um $U(\mathfrak{g})$-módulo à esquerda e portanto um $\mathfrak{g}$-módulo. Consideremos $1 \otimes v \in M(\lambda)$. Para $x \in \mathfrak{g}_+$,

$$x \cdot (1 \otimes v) = 1 \otimes xv = 0$$

e para $h \in H$,

$$h \cdot (1 \otimes v) = 1 \otimes h \cdot v = \lambda(h)(1 \otimes v)$$

Temos também $U(\mathfrak{g})(1 \otimes v) = U(\mathfrak{g}) \otimes_{U(B)} \mathbb{C}v = M(\lambda)$.

Logo $M(\lambda)$ é um módulo de peso máximo, com vetor de peso máximo $1 \otimes v$ de peso λ.

Seja M' algum módulo de peso máximo λ e de vetor de peso máximo v'. A aplicação $f: U(L) \times \mathbb{C}v \to M'$ dada por

$$(u, av) \mapsto au \cdot v'$$

é bilinear e $U(B)$-balanceada, ou seja, para $w \in U(B)$ temos

$$f(uw, av) = au \cdot w \cdot v' = f(u, w \cdot av)$$

Portanto existe uma aplicação linear induzida

$$f': U(\mathfrak{g}) \otimes_{U(B)} \mathbb{C}v \longrightarrow M'$$

satisfazendo $u \otimes av \mapsto au \cdot v'$ e é uma aplicação de $U(B)$-módulos e $1 \otimes v$ é levado para v'.

Exemplo (Módulo de Verma para $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$)

Em $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ temos os geradores $e = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $f = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ e $h = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ tais que $[h, e] = 2e$, $[h, f] = -2f$ e $[e, f] = h$. Esta álgebra admite uma decomposição triangular $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C}) = \mathfrak{g}_+ \oplus H \oplus$

onde $\mathcal{L}_+ = \langle e \rangle$, $\mathcal{H} = \langle h \rangle$ e $\mathcal{L}_- = \langle f \rangle$.

$U\ sl_2(\mathbb{C})$ - módulo

$$M(\lambda) = U(sl_2(\mathbb{C})) \otimes_{U(\beta)} \mathbb{C} v_\lambda$$

é um módulo de Verma, onde $1 \otimes v_\lambda$ é um vetor máximo, $U(sl_2(\mathbb{C})) = \langle f^k h^l e^m \rangle$ é a álgebra envolvente universal de $sl_2(\mathbb{C})$, $\beta = \mathcal{L}_+ + \mathcal{H}$ é a subálgebra de Borel de $sl_2(\mathbb{C})$ e $U(\beta)$ a álgebra envolvente universal de B.