Seminário: Módulos de Verma (parte 2)

Na semana passada vimos que um $\mathfrak{g}$-módulo $V$ é chamado módulo de peso máximo $\Lambda \in \mathcal{H}^*$ se existe um $v_\Lambda \in V$ não-nulo tal que $\mathfrak{g}_+(v_\Lambda) = 0$, $h(v_\Lambda) = \Lambda(h)\, v_\Lambda$, $\forall h \in \mathcal{H}$ e $U(\mathfrak{g})(v_\Lambda) =$
Chamamos tal $v_\Lambda$ de <u>vetor de peso máximo</u>.

Então um $\mathfrak{g}$-módulo $M(\Lambda)$ com peso máximo $\Lambda$ é dito um módulo de Verma se todo $\mathfrak{g}$-módulo com peso máximo $\Lambda$ é um quociente de $M(\Lambda)$.

Faltou provar o seguinte teorema:

Teorema. Seja $\mathfrak{g}$ uma álgebra de Lie com decomposição triangular $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_- \oplus \mathcal{H} \oplus \mathfrak{g}_+$. Então, para todo $\lambda \in \mathcal{H}^*$, $\mathfrak{g}$ possui um módulo de Verma $M(\lambda)$ com peso máximo $\lambda$. (e este é único, salvo isomorfismo)

Revisão. Sejam $A$ uma álgebra, $V$ um $A$-módulo à direita e $W$ um $A$-módulo à esquerda. Considere o ideal $K$ de $V \otimes_{\mathbb{C}} W$ gerado pelos elementos da forma $v.a \otimes w - v \otimes a.w$ para $v \in V$, $w \in W$ e $a \in A$. Defina

$$V \otimes_A W := (V \otimes_{\mathbb{C}} W)/K$$

Dem. Seja $B = \mathcal{H} + \mathfrak{g}_+$ subálgebra de Borel de $\mathfrak{g}$. Seja $\mathbb{C}v$ um espaço vetorial unidimensional que pode ser transformado em $B$-módulo definindo-se, para cada $\lambda \in \mathcal{H}^*$ fixado,

$$\mathfrak{g}_+ v = 0 \quad \text{e} \quad h.v = \lambda(h)\, v, \text{ para todo } h \in \mathcal{H}.$$

Segue que $\mathbb{C}v$ é também um $U(B)$-módulo à esquerda e assim podemos definir (ver revisão acima)

$$\boxed{M(\lambda) := U(\mathfrak{g}) \otimes_{U(B)} \mathbb{C}v}$$

Observe o seguinte: considere $1 \otimes v \in M(\lambda)$. Para $x \in \mathfrak{g}^+$ temos $x.(1 \otimes v) = 1 \otimes xv = 0$ e, para $h \in H$, temos $h.(1 \otimes v) = 1 \otimes hv = \lambda(h)(1 \otimes v)$

Temos também que $U(\mathfrak{g})(1 \otimes v) = U(\mathfrak{g}) \otimes_{U(\beta)} \mathbb{C}v = M(\lambda)$ logo $M(\lambda)$ é um módulo de peso máximo com vetor de peso máximo $1 \otimes v$ de peso $\lambda$ $(\lambda \in H^*)$.

Para provar que $M(\lambda)$ é, de fato, um módulo de Verma, então seja $M'$ um módulo de peso máximo $\lambda$ com vetor de peso máximo $v'$. A aplicação $f: U(\mathfrak{g}) \times \mathbb{C}v \to M'$ dada por

$$(u, av) \longmapsto au.v'$$

é bilinear e $U(\beta)$-balanceada, ou seja, para $w \in U(\beta)$ temos

$$f(uw, av) = au.w.v' = f(u, w.av).$$

Segue que existe uma aplicação linear induzida

$$f': U(\mathfrak{g}) \otimes_{U(\beta)} \mathbb{C}v \longrightarrow M'$$

satisfazendo $u \otimes av \longmapsto au.v'$ sendo uma aplicação de $U(\beta)$-módulos, onde $1 \otimes v$ é levado para $v'$ (o qual gera $M'$ por definição de módulo de peso máximo) o que implica que $f'$ é sobrejetora.

Como $M(\lambda)/\mathrm{Ker}\, f' \simeq \mathrm{Im}\, f' = M'$, segue que todo módulo de peso máximo $\lambda$ é um quociente de $M(\lambda)$.

<u>Observação</u>. Segue que, nas condições do teorema, temos unicidade salvo isomorfismo.

# Módulos de Verma para $sl_3(\mathbb{C})$

Para $g = sl_3(\mathbb{C})$ temos os geradores $e_1 = \left(\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$, $e_2 = \left(\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{array}\right.$

$f_1 = \left(\begin{array}{cc|c} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$, $f_2 = \left(\begin{array}{c|cc} 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$, $h_1 = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$, $h_2 = \left(\begin{array}{c|cc} 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{array}\right)$ tais que

$[h_i, e_j] = C_{ij} e_j$, $[h_i, f_j] = -C_{ij} f_j$ e $[e_i, f_j] = \delta_{ij} h_j$

onde $C_{ij} = \begin{cases} 2, & \text{se } i = j \\ -1, & \text{se } |i-j| = 1 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$ ← não se aplica em $sl_3(\mathbb{C})$

Esta álgebra admite a decomposição triangular $sl_3(\mathbb{C}) = g_- \oplus H \oplus$
onde $g_- = \langle f_1, f_2 \rangle$, $H = \langle h_1, h_2 \rangle$ e $g_+ = \langle e_1, e_2 \rangle$. O $sl_3(\mathbb{C})$-módulo

$$M(\lambda) = U(sl_3(\mathbb{C})) \otimes_{U(\beta)} \mathbb{C} v_\lambda$$

definido como no teorema anterior é um módulo de Verma (para cada $\lambda \in H^*$ fixado) onde:

1) $U(sl_3(\mathbb{C})) = \langle f_i^k h_j^l e_k^m \rangle$ é a álgebra envolvente univers de $sl_3(\mathbb{C})$ (abusando das notações)

2) $\beta = g_+ + H$ é subálgebra de Borel de $sl_3(\mathbb{C})$. De fato, $\beta$ é solúvel pois $\beta^{(1)} = [\beta, \beta] = g_+$, $\beta^{(2)} = [\beta^{(1)}, \beta^{(1)}] = [g^+, g^+] =$
$= \left\langle \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right\rangle$ e $\beta^{(3)} = [\beta^{(2)}, \beta^{(2)}] = 0$. Claramente $\beta$ é maximal com a propriedade de solubilidade (por exemplo, se tomarmos $\beta' \supset \beta$ tal que $f_1 \in \beta'$, então $f_1, h_1, e_1 \in \beta^{(N)}$ $\forall N \in \mathbb{N}^*$).

3) $H = \langle h_1, h_2 \rangle$ é subálgebra de Cartan pois $H^{(1)} = [H, H] = 0$ e $N_g(H) = \{x \in g \,/\, [x, H] \subseteq H\} = H$ pois, por exemplo, $[h_i, e_i] = 2e_i \notin H$ e $[h_i, f_i] = -2 f_i \notin H$.

Exercício. Mostrar que $\mathfrak{g}_- \oplus \mathcal{H} \oplus \mathfrak{g}_+$ é, de fato, uma decomposição triangular de $\mathfrak{g}$.

(algumas partes são mais fáceis como, por exemplo, que $\mathcal{H} \neq (0)$ é subálgebra abeliana, que $\mathfrak{g}_+ \neq (0)$ é tal que $[\mathcal{H}, \mathfrak{g}_+] \subset \mathfrak{g}_+$ e que a anti-involução $\sigma$ dada por $\sigma(e_i) = -f_i$, $\sigma(f_i) = -e_i$ e $\sigma(h_i) = h_i$ satisfaz as hipóteses (iii) da definição, porém outras partes requerem maior cuidado, além de definições que não foram propriamente dadas, como de submódulo aditivo livre $Q_+ \in \mathcal{H}^*$)