

Matemática Financeira

Regimes de Capitalização

a) Regime de J.S.

$$J1=J2=\dots=Jn= C \cdot i$$

“Não há capitalização dos juros no final de cada período. Só no final do prazo.” (n)

b) Regime de J.C.

$J1, J2, J3, \dots, Jn$, sendo:

$$J1=C.i \quad J2= (C+J1).i \quad J3= (C+J1+J2).i$$

“Aqui há capitalização dos juros no final de cada período”

$$J1 < J2 < J3 < \dots < Jn$$

Exemplo: Analisar segundo os 2 regimes a capitalização de 10.000, por 4 meses, a taxa de 10% a.m.

a) J.S.

Meses	Juro	Montante
1	1.000	11.000
2	1.000	12.000
3	1.000	13.000
4	1.000	14.000

Função do 1 grau = P.A de razão 1.000 = C.i

b) J.C.

Meses	Juro	Montante
1	1.000	11.000
2	1.100	12.100
3	1.210	13.310
4	1.331	14.641

Função Exponencial = P.G. de razão 1,1 = 1+i

Juros Simples

$J = Cin$

Simbologia:

J = total de juros em n períodos

C = capital inicial (principal)

i = taxa unitária de juros

n = número de períodos (prazo)

M = montante

$M = C + J = C + Cin = C(1 + in)$,

na fórmula acima a taxa (i) e o prazo (n) devem referir-se a mesma unidade de tempo.

Exercícios

1. Um capital de 2500,00 é empregado durante 5 anos à taxa de 6% ao bimestre. Qual os juros simples produzido?

$J = Cin$ $C = 2500$ $n = 5$ anos $i = 6\% \text{ a.b.} \times 6 = 36\% \text{ a.a.} = 0,36$

$J = 2500 \times 0,36 \times 5 = 4500$

2. Que prazo duplica um capital aplicado à 4% a.m. no juro simples?

$M = C + J$ $M = 2C$ $i = 4\% \text{ a.m.}$

$M = Cin + C$ $M = C(1 + in)$ $2C = C(1 + 0,04n)$ $2 = 1 + 0,04n$ $0,04n = 1$ $n = 25$ meses

3. Qual o montante produzido por um capital aplicado a taxa de 4% ao semestre durante 2 meses e 12 dias, sabendo que produz juros simples de 96 reais?

$M = C + J$

$i = 4\% \text{ a.s.} \times 2 = 8\% \text{ a.a.} = 0,08 \text{ a.a.}$

$n = 2$ meses e 12 dias = 72 dias / 360 dias = 0,2 anos

$J = Cin$ ou $96 = C \times 0,08 \times 0,2$ $C = 6.000$

$M = 6.000 + 96 = 6.096$

4. Um capital de 500 reais é aplicado durante oito meses produzindo um montante de 560. Qual a taxa mensal de aplicação?

$$C=500 \quad n=8\text{meses} \quad M=560 \quad i=?$$

$$J=560-500=60$$

$$J=Cin$$

$$60=500.i.8$$

$$i=0,18=18\%a.m$$

5. Uma pessoa aplicou 100.000 numa operação de "Overnight" (prazo de um dia), a taxa de juros de 38%a.m. Admitindo-se a alíquota de 45% de IR sobre os rendimentos, qual o juro líquido resgatado?

$$1) J = C i n \quad J = 10.000. 0,38/30 = 1266,6667 \quad 2) IR = 0,45 \cdot 5 = 570$$

$$3) J_{LR} = J - IR = 696,66$$

7. Os capitais de R\$ 240.000 e R\$400.000 foram aplicados a juros simples à mesma taxa. O primeiro rendeu, em 50 dias, R\$10.000 mais que o segundo em 21 dias. Qual foi a taxa diária de juros?

$$J_1 = J_2 + 10.000 \quad C_1 \cdot i \cdot n_1 = C_2 \cdot i \cdot n_2 + 10.000 \quad 240.000 \cdot i \cdot 50 = 400.000 \cdot i \cdot 21 + 10.000$$

$$i = 0,1/36 = 0,0027$$

8. (TTN) Calcular os juros simples que um capital de 2.000 rende em um ano e meio aplicado a taxa de 6%a.a. Os juros são de:

$$C=10.000 \quad n=1,5\text{anos} \quad i=6\%a.a$$

$$J=Cin \quad J=10.000 \times 0,06 \times 1,5=900$$

9. Um capital aplicado a juros simples de 36%a.a. durante n semestres, rendeu 72.000u.m. de juros e acumulou o montante de 112.000 u.m. Calcule n.

$$M=112.000 \quad J=72.000 \quad i=36\%a.a=18\%a.s.$$

$$M=C+J$$

$$C=112.000-72.000=40.000$$

$$J=Cin$$

$$72.000=40.000 \times 18 \times n$$

$$n=10 \text{ semestres}$$

10. Dois capitais estão entre si como 2 está para 3. Para que num mesmo prazo, seja obtido o mesmo rendimento, a taxa de aplicação do menor capital deve superar a do maior em quanto?

$$\frac{C_1}{C_2} = \frac{2}{3} \text{ ou } C_2 = \frac{3C_1}{2}$$

$$C_1.i_1.n = C_2.i_2.n$$

$$C.i_1 = \frac{3C}{2}.i_2$$

$$i_1 = 1,5i_2, \text{ isto é, } i_1 \text{ é } 50\% \text{ maior que } i_2$$

11. Rodrigo fez um depósito a prazo fixo de dois anos. Após o prazo, o montante que era de 112mil foi reaplicado por mais um ano a uma taxa de juros 15% superior a primeira. Sabendo-se que o montante final foi de 137.760, calcule o capital inicial depositado.

Resolução:

1) Na aplicação 2

$$J = 137.760 - 112.000 = 25.760$$

$$25.760 = 112.000 \times i_2 \times 1 \quad i_2 = 0,23 \text{ a.a.}$$

$$2) i_2 = 1,15 i_1 \quad i_1 = 0,2 \text{ a.a.}$$

2) Na aplicação 1

$$M = C(1+in) \quad 112.000 = C(1+0,2 \times 2) \quad C = 80.000$$

12. O capital de 200.000 foi investido a juros simples, a taxa de 7,5%a.m.. Após certo tempo a taxa foi majorada para 10%a.m. Quatro meses após a majoração foi apurado o montante de todo investimento que somou 370.000. Por quanto tempo a taxa foi de 7,5%a.m.?

1) Na Etapa 2

$$J_2 = 200.000 \times 0,1 \times 4 = 80.000$$

$$2) \text{ Como } J_1 + J_2 = 370.000 - 200.000$$

$$J_1 + J_2 = 170.000 \quad J_1 = 90.000$$

3) Na etapa 1

$$J = C \times i \times n \quad 90.000 = 200.000 \times 0,075 \times n \quad n = 6 \text{ meses}$$

Taxas Equivalentes

Duas taxas de juros são equivalentes quando aplicadas sobre o mesmo capital com o mesmo prazo produzem juros iguais.

Ex: 10% a.m. e 120% a.a.

Sendo i a taxa no período inteiro, i_k a taxa em cada subperíodo, k o número de subperíodos e C um capital qualquer:

Para que i e i_k sejam equivalentes devemos ter:

$$C.i.1 = C. i_k . k$$

$i = k. ik$

Taxa Média e Prazo Médio

$$J = \sum ck.ik.nk \quad J = (\sum ck). \bar{i}. \bar{n}$$

$$\bar{i} = \frac{J}{(\sum ck).n} = \frac{J}{\sum ck.nk} \quad \bar{n} = \frac{J}{(\sum ck).i} = \frac{\sum ck.nk}{\sum ck}$$

Exercícios:

1) Calcule o prazo médio e a taxa média para as aplicações abaixo (juros simples) :

Valor	Taxa (mensal)	Prazo (meses)
10.000	6%	4
15.200	8%	3
38.460	9%	6

Resolução:

$$\bar{i} = \frac{(10.000 \times 0,06 \times 4) + (15.200 \times 0,08 \times 3) + (38.460 \times 0,09 \times 6)}{(10.000 \times 4) + (15.200 \times 3) + (38.460 \times 6)} = \frac{28.816,4}{316.360} = 0,084765$$

$$\bar{n} = \frac{316.360}{10.000 + 15.200 + 38.460} = 4,96 \text{ meses}$$

2) Aplicou-se, à mesma taxa de juros simples, 10.000 durante 9 meses, 15.000 durante 5 meses e 30.000 durante 8 meses. Qual o prazo médio?

$$\bar{n} = \frac{90.000 + 75.000 + 240.000}{55.000} = 7,36 \text{ meses}$$

3) Considere as seguintes aplicações a juros simples, todas pelo prazo de um mês:

- a) 10.560 a 5% a.m.
- b) 7.521 a 6% a.m.
- c) 15.605 a 3,5% a.m.

Qual a taxa média do investimento?

$$\bar{i} = \frac{10.560 \times 0,05 + 7.521 \times 0,06 + 15.605 \times 0,035}{10.560 + 7.521 + 15.605} = 4,52$$

4) Aplicou-se 20.000 por 15 meses, 40.000 por 4 meses, 60.000 por 10 meses e 80.000 por 7 meses, obtendo-se um montante total de 302.000. Calcule o prazo médio e a taxa média correspondente a essas aplicações.

Juros Compostos

Capitalização Composta

$$M = C(1+i)^n$$

Taxas Equivalentes (J.C.)

Sendo i a taxa no período inteiro, i_k a taxa em cada subperíodo e k o número de capitalizações no período inteiro.

i e i_k são taxas equivalentes se

$$C(1+i)^1 = C(1+i_k)^k$$

$$1+i = (1+i_k)^k$$

ex: $i = i_a = 12\% \text{ a.a.}$ Calcule $i_m = ?$

Exercícios:

1) Calcule a taxa anual de juros compostos equivalente a:

a) 40% a.s. b) 21% a.t. c) 10% a.m. d) 0,3% a.d.

Taxa Efetiva e Nominal

a) Taxas efetivas

1) 120% a.a.

2) 80% a.s.

3) 45% a.t.

b) Taxas nominais

- 1) 120% a.a. capitalizados semestralmente
- 2) 70% a.a. capitalizados trimestralmente

Macete: Mecher no prazo conforme a taxa efetiva embutida.

Exercícios

- 1) Aplicou-se 500 à taxa de 24% a.a. capitalizados trimestralmente. Qual o montante no final de 2 anos?

$i_N = 24\% \text{ a.a. cap. trim.}$ $i_4 = 6\% \text{ a.t.}$
 $n = 2 \text{ anos} = 8 \text{ trimestres}$

$$M = 500 (1+0,06)^8$$

- 2) Qual a taxa efetiva anual correspondente à 12% a.a. capitalizados trimestralmente?

$$12\% \div 4 = 3\% \quad 1+i = (1+i_k)^n \quad 1+i = (1+0,03)^4 \quad i = 12,55\%$$

- 3) Calcule a taxa de juros simples equivalente à taxa composta de 5% a.a. capitalizados anualmente durante 20 anos.

$$M_s = M_c$$

$$C(1+in) = C(1+i)^n$$

$$1+in = (1+i)^n$$

$$1+i \cdot 20 = (1+0,05)^{20}$$

$$i = 0,082665 = 8,2665\%$$

- 4) Aplicou-se 100 a 10% a.a. capitalizados semestralmente e 40 a 20% a.a. capitalizados trimestralmente. Em quanto tempo os juros produzidos serão iguais?

- 5) Um investidor aplicou $\frac{1}{4}$ de seu capital à taxa de juros compostos de 24% a.a. capitalizados trimestralmente e o restante a 30% a.a. capitalizados semestralmente. Ao final de 3 anos ele retirou o montante de 331.192,29. Qual foi o capital empregado?

$$331.192,29 = \frac{1}{4}C(1+0,06)^{4 \times 3} + \frac{3}{4}C(1+0,15)^{2 \times 3} = 147.996,10$$

- 6) Com Calculadora HP-12c

$$C = 10.000$$

$$n = 10 \text{ meses}$$

$$M = 17.343$$

$$i = ?$$

1 passo) 10.000 – CHS- PV

2 passo) 10 – n

3 passo) 17343 –FV 4 passo) i